書 評

Arthur S. Goldberger, *Econometric Theory.*

Wiley, New York, c. 1964, pp. xi, 399.

磯 野 修

1

本書の著者は改めて紹介するまでもなく Klein-Goldberger Model として知られている計量経済学モデルの作成者であり，*Econometric Theory* と題するその著書が Wiley & Sons から出版されたというだけでも計量経済学・経済統計学に関心をもつ人々の注意を惹くに十分である．最近，計量経済学についての教科書または参考書が国の内外で次々と刊行されているが，その内容は当然のことながら著者によって相当に異なる．本書の著者は計量経済学を以て，数理経済学・計量経済学理論・経験的計量経済学の三つの分野から成るものとする．第一の数理経済学は経済理論を数学的に形式化することを目標とし，第二の計量経済学理論は統計的推定法を扱い，第三の経験的計量経済学とは具体的な資料に基づく計測的研究を指す．本書では専ら第二の分野すなわち計量経済学における統計的手法にその主題を限定し，具体的な計測は単に計算例として示されているにすぎない．この点では J. Johnston の近著と大体の方向を同じくしており，計量経済学の経済学的内容に重点をおく L. R. Klein の入門書 (1) とは著しくその性格を異にする．

計量経済学における統計的手法を解説すると言っても，通常の参考書でよくされるように，多くの主題について多くの論者が提示した模型や推定法を百科辞典的に展示するというのでは体系的著作として余りに能のないことになる．本書の著者が叙述の最終目標を同時方程式体系の推定という問題に定めていることは，その研究の経歴から見て当然のことと言わなければならないが，著者はこの最終目標に向うに当って論述の出発点を古典的最小二乗法に求めている．この基礎理論を十分に消化した後，古典的最小二乗法の要求する前提条件が計量経済学的研究にとって厳しすぎるために，経済学的理論模型に適合するような推定法を考える必要が生じてくること，それを解決するために従来どのような方法が考えられてきたかを説明し，最後に自然的な帰結として同時方程式体系の推定が問題とならざるを得ないことを示す．その叙述の筋道は極めて説得的であり，多岐にわたる各種の問題を簡潔に整理して体系化している点は，本書を手にするに際して読者が懐いた期待に応えて余りあると言わなければならない．以下では上記の大筋をはっきりさせることを念頭におきながら本書の概要を紹介する．その際この目的に照して若干の個所で本書で用いられたのとは異なる記号を

使っている点に注意していただきたい.

2

第1章の簡単な序論に続いて第2章では行列論，第3章では統計学的予備知識が解説される．本書は大学院学生に対する講義の教科書として書かれたことを考えると，この2章で150頁余りを費し全体の約3/8を使っているのは少なからず冗長の感がある．代数学や統計学の初等教科書に見られる定義や定理の説明は然るべき他の著作に譲り，本書の第3章以下で特に必要な概念や定理を一括して示すに止めた方がよかったのではないかと思われる.

本書の主な内容は第4章「古典的線型回帰」から始まる．同時方程式体系の推定という目標に備えて，はじめから多元回帰分析のタームで説明がなされる．まず確率論的な条件は何ら前提せずに単なる記述手段としての最小二乗法が述べられ，次に攪乱項の母平均と共分散行列に関する前提を設けて最良線型不偏推定子の説明が続き，最後に攪乱項が多変量正規分布に従う場合の検定や区間推定および多元回帰分析の計算法が述べられている．これらは言わば標準的な場合であって詳しく紹介する必要はないが，それへの補充として多重共線型性・回帰独立変数を追加する場合の問題なども付け加えられている.

後の叙述と対比するために古典的線型回帰模型を数式的に記しておく．K 個の回帰独立変数と1個の回帰従属変数について T 組の観測値があるとき，前者についての $T\times K$ 型の観測値行列を X, 後者についての T 次の列ベクトルを y, 回帰係数列ベクトル（K 次）を β, 攪乱項を示す T 次の列ベクトルを u とし，母集団平均値を E, 転置行列を $'$ で示し，0 は零を成分とする列ベクトル，I は単位行列，σ^2 を同時点攪乱項の母分散とすると，

$$(1)\qquad \begin{cases} y=X\beta+u \\ Eu=0, \qquad Euu'=\sigma^2 I \\ X \text{ は固定されていて階数は } K(\leq T) \end{cases}$$

というのが古典的線型回帰模型である.

M 個の回帰従属変数 $y_1, y_2, \cdots, y_M$ について上記と同様の模型が成立し,

$$(2)\qquad \begin{cases} y_m=X\beta_m+u_m \\ Eu_m=0, \qquad Eu_m u'_n=\sigma_{mn} I \\ (m=1, 2, \cdots, M;\ n=1, 2, \cdots, M) \\ X \text{ は固定されていて階数は } K(\leq T) \end{cases}$$

の場合には

$$Y=(y_1, y_2, \cdots, y_M)$$
$$B=(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_M)$$
$$U=(u_1, u_2, \cdots, u_M)=\begin{pmatrix} u'(1) \\ u'(2) \\ \vdots \\ u'(T) \end{pmatrix}$$
$$\Omega=(\sigma_{mn})=Eu(t)u'(t)$$

と書き，0 を成分零の行列とすると，(2) は

$$
(3)\quad
\begin{cases}
Y=XB+U\\
EU=0\\
Eu(t)u'(s)=\begin{cases}\Omega:\ t=s\\ 0:\ t\neq s\end{cases}\\
(t=1,\ 2,\ \cdots,\ T;\ s=1,\ 2,\cdots,\ T)\\
X\ \text{は固定されていて階数は}\ K(\leq T)
\end{cases}
$$

となる．(2) の各式に対して最小二乗法を適用したとき，(3) の一般化された残差分散 generalized residual variance $\frac{1}{T}|U'U|$ は最小になっている．

3

第5章および第6章では計量経済学的研究のために古典的線型回帰模型をどのように拡張し補充する必要があるかについて説明する．第5章「線型回帰論の拡充」では今までと同じように回帰独立変数値の行列 X の固定性を前提した上で他の諸条件の緩和について考える．まず簡単に曲線回帰分析に触れた後，回帰独立変数として特殊な形の変数を用いる例として dummy variables の使い方について極めて分りやすい解説がなされ，それを用いて回帰分析と分散分析との関係が示される．定性的変数については dummy variables のほか，生物学の probit analysis の応用についても他の個所で紹介されている．

次に前提条件 (1) のうち $Euu'=\sigma^2I$ に代えて $Euu'=\sigma^2A$ (ただし A は正値行列) としたものを，一般化された線型回帰模型と名づけ，そこでの最良線型不偏推定子について研究する．いわゆる不等分散 heteroskedasticity の場合や，攪乱項が一階の自己回帰系列の場合には A は簡単な形になる．

第5章の終りのところでは再び古典的線型回帰の前提 (1) に戻り，外部情報によって回帰係数間に一定の制約条件の存在を仮定する場合，および一部の回帰係数を他の情報源から推定する場合の取扱い方を述べている．

第6章「確率的回帰独立変数による線型回帰」においては，古典的最小二乗法の前提 (1) のもとで標本をとるたびに固定されていた回帰独立変数値行列 X が，一定ではなくて確率変数となる場合を扱う．

まず他の諸条件は前提 (1) と同じであるが，行列 X が確率変数で攪乱項ベクトル u とは独立に分布するという単純な場合が扱われる．古典的最小二乗推定子が一致性をもち，且つ $T\to\infty$ のときの推定子の漸近的共分散行列 (標本の大きさを T，母数 β の推定子 b の共分散行列を C とするとき，TC が $T\to\infty$ のとき定数行列 W に確率収束するならば W/T を β の漸近的分散行列と呼ぶ．) の一致推定子を最小二乗法で得ることのできるように次第に模型を拡張して行く．そして攪乱項が自己回帰系列を形成するような模型をも特殊ケースとして含む，同時点無相関線型回帰模型に到達する．

これを前提条件 (1) の記号を用いて記すと，X の行ベクトルのうち時点 t の観測値から成るものを $x'(t)$ と書くとき，

$$\begin{cases} y=X\beta+u \end{cases}$$

（4）
u は系列相関をもたない母平均 0, 母分散 σ^2 の定常確率過程に従う.
$x(t)$ は定常確率過程に従い, その母平均を μ とするとき, 同時点共分散行列 $E(x(t)-\mu)(x(t)-\mu)'$ は非特異であり, 且つ $x(t)$ は u の t 時点成分と無相関である.
さらに二つの定常確率過程における異時点間の関連はその間の時間間隔が長くなると共に十分速かに減少して, 標本平均および標本同時点共分散行列は観測回数 $T\to\infty$ のとき母平均および母集団同時点共分散行列に確率収束する.

となる. これを M 個の式についての (2) または (3) に拡張することは容易であって, (4) における X の規定はそのままで, u を u_m とすればよい. この模型で中心になるのは X および u の同時点の成分が無相関という点であり, この仮定によって推定子の一致性が保たれる.

第6章の終りの部分では, この無相関性が満たされない場合を一般的な確率変数線型回帰と名づけ, 変数誤差模型がこの部類の一例として述べられている. このような一般的な模型に対しては古典的最小二乗法は一致性を持ち得ないが, 一致推定子を得る推定法として手段変数による方法が紹介されている.

4

古典的線型回帰模型から出発して前提条件を次第に緩和し, 一般化された確率変数線型回帰模型にまで到達したが, それらはすべて最後の第7章「同時線型関係の体系」を導き出すための準備に他ならない. 第6章までは一個の回帰従属変数に関する回帰式の推定を中心に考え, 時に M 個の回帰従属変数を考えることがあっても, それは前提条件 (2) または (3) に見るように, 同一の回帰独立変数行列 X の上での M 個の回帰従属変数 $y_1, y_2, \cdots, y_M$ を並列的に考えるにすぎず, 独立および従属の立場にある回帰諸変数間の相互関係は一向に考慮されていない. もし経済諸量間の関係式を同時方程式体系として考え, その体系を構成する一個の方程式について推定を試みるならば, 仮りにその方程式に関して回帰独立変数と回帰従属変数とを区別することができたとしても, 一般的に言って回帰独立変数は確率変数として扱わなければならないし, 攪乱項と回帰独立変数との間の独立性はもちろん同時点無相関係性も保証されない. そこでは古典的最小二乗推定子はもはや一致性を持ち得ないし, 同時方程式体系から得られる情報を利用するためにも新しい推定方法を考えなければならない. 通常, 方程式誤差模型を考える場合には攪乱項は多変量正規分布に従うものとして出発し, 最尤法の考え方を紹介した後に, 全情報最尤法は理論的には望ましいけれども計算量が大きくなるために簡便法として他の諸方法があるというように説明されている. しかし推定子の一致性に重点をおく限り攪乱項の分布について正規性を前提する必要はなく, 本書では正規性の仮定と最尤法の説明は各種の推定法を紹介した後に補足的に付け加えられているにす

ぎない．以下では第7章で述べられている推定法の考え方の大要を紹介する．

時点 t における M 個の内生変数値を成分とする列ベクトルを $y(t)$, K 個の先決変数値を成分とする列ベクトルを $x(t)$，内生変数に関する $M\times M$ 型の非特異な係数行列を Γ，先決変数に関する $K\times M$ 型の係数行列を B, M 個の内生変数に対応する撹乱項を成分とする列ベクトルを $u(t)$ とすれば，構造方程式は

$$y'(t)\Gamma+x'(t)B+u'(t)=0 \quad (t=1,\ 2,\cdots,\ T) \tag{5}$$

と書くことができる．

$y'(1),\cdots, y'(T)$ を行ベクトルとする $T\times M$ 型の行列を Y, $x'(1),\cdots, x'(T)$ を行ベクトルとする $T\times K$ 型の行列を X, $u'(1),\cdots, u'(T)$ を行ベクトルとする $T\times M$ 型の行列を U とすれば，(5) は

$$Y\Gamma+XB+U=0 \tag{6}$$

とも書ける．ただし (5) の右辺は零ベクトル，(6) の右辺は零行列である．以下でも記号0をこの二つの意味に用いる．両式から得られる

$$y'(t)=x'(t)\Pi+v'(t) \tag{7}$$

$$Y=X\Pi+V \tag{8}$$

$$\Pi=-B\Gamma^{-1} \tag{9}$$

$$v'(t)=-u'(t)\Gamma^{-1} \tag{10}$$

$$V=-U\Gamma^{-1} \tag{11}$$

が誘導形である．

撹乱項については

$$\begin{cases} EU=0 \\ Eu(t)u'(s)=\begin{cases}\Sigma: t=s\\ 0: t\neq s\end{cases} \\ (t=1,\ 2,\cdots,\ T;\ s=1,\ 2,\cdots,\ T) \end{cases} \tag{12}$$

を前提する．これは同時点撹乱項共分散行列がすべての時点を通じて同一であること，および撹乱項の異時点間無相関性を意味し，前提 (3) と対比すればその意味が理解できる．(12) から誘導形の撹乱項について

$$\begin{cases} EV=0 \\ Ev(t)v'(s)=\begin{cases}\Gamma'^{-1}\Sigma\Gamma^{-1}=\Omega: t=s\\ 0: t\neq s\end{cases} \end{cases} \tag{13}$$

が出る．

先決変数ベクトル $x(t)$ は外生変数のほかラグつき内生変数を含むから確率変数として扱わなければならないが，確率過程 $\{x(t)\}$ の性質，および $\{x(t)\}$ と $\{u(t)\}$ との関係については，前提 (4) を M 個の式に拡張した場合の諸条件を前提する．(10) または (11) によって $\{x(t)\}$ と $\{v(t)\}$ との間にも同じような条件が成立して，誘導形は同時点無相関線型回帰模型となり，最小二乗法によって誘導形方程式係数の一致推定子を求め，且つ推定子の漸近的共分散行列の一致推定子を計算することができる．その際 (5) 以下の諸式の形を見れば分かるように，両辺に定数をかけても Γ, B, Π, $u(t)$, $v(t)$ などを適当に

調整すれば全く同一の方程式体系を得るから，内生変数に関する係数行列 Γ の各列について特定番目（この番号は列によって異なってよい）の成分を-1 に等しいとおき，これを規準化則と呼ぶ．

誘導形に対して最小二乗法を適用し Π および Ω の推定値を得たとき (9) (13) から出る

$$\Pi\Gamma = -B \tag{14}$$

$$\Sigma = \Gamma'\Omega\Gamma \tag{15}$$

と規準化則を用いて Γ, B, Σ を推定できるかどうかという所で認定の問題が論ぜられる．認定の必要・十分条件としての階数条件と必要条件としての位数条件を述べた後に，認定可能な場合が適度認定・過剰認定に分かれるという説明がなされるが，この部分は特に簡明で分かりやすい．適度認定の場合には誘導形 (8) に対して最小二乗法を適用した後，(14) (15) と規準化則を用いて構造方程式の係数行列を推定できる．この方法を間接的最小二乗法と呼ぶが，さきに (3) について述べたことを回顧すると，このとき (8) の一般化された残差分散 $\frac{1}{T}|V'V|$ は最小になっている．過剰認定の場合にも誘導形を最小二乗法で推定することはできるが，そこから構造形の推定へ進むことができない．これを解決するために工夫された諸方法を示すと次のようになる．

5

同時方程式体系の推定に当って，(6) および (8) に一括された体系について係数行列 Γ, B, Π を一挙に推定することを目的とするものは体系法と呼ばれ，(6) または (8) なる体系に属する単一方程式係数の推定を目ざすものは単一方程式法と呼ばれる．

詳しく言えば，Γ, B, Π, Y, V の第 m 列をそれぞれ γ_m, β_m, π_m, y_m, u_m, v_m とすれば，(6) (8) は

$$Y\gamma_m + X\beta_m + u_m = 0 \quad (m=1,\ 2, \cdots, M) \tag{16}$$

$$y_m = X\pi_m + v_m \quad (m=1,\ 2, \cdots, M) \tag{17}$$

となり，これらの係数列ベクトルの推定を行なうのが単一方程式法である．

はじめ単一方程式法について述べる．

まず二段階最小二乗法と呼ばれるものは，(16) の式の第1項において規準化則により係数が-1 になっている内生変数に関する列ベクトルを移項して

$$y = Y_1\gamma_{1m} + X\beta_m + u_m \tag{18}$$

とし，Y_1 を構成する列ベクトルへ (17) を代入して

$$y = X\Pi_1\gamma_{1m} + X\beta_m + (u_m + V_1\gamma_{1m}) \tag{19}$$

を得る．ここに Π_1, V_1 は Π, V のうち (18) で左辺に移項した変数に該当する列を抹消したものである．(19) は同時点無相関線型回帰模型であるから，Π_1 が分かりさえすれば $X\Pi_1$ および X の上での y の回帰を最小二乗法で計算して γ_{1m}, β_m の一致推定子とその漸近的共分散行列の一致推定子を求めるこ

とができる．この前提になっている Π_1 の推定については $M-1$ 個の (17) に対して最小二乗法を用いれば一致推定子とその漸近的共分散行列の一致推定子を求めることができる．このように (17) と (19) とに対して二段階に亘って最小二乗法を適用するのが二段階最小二乗法の考え方であるが，手段変数による推定法という立場から見ると，第一段階での最小二乗法による Y_1 の推定値を第二段階で手段変数として用いていることになる．また問題としている方程式が適度認定ならばこの方法は間接的最小二乗法に帰着する．

H. Theil は k クラス推定子という概念を提示したが，この推定子で $k=0$ とおけば最小二乗推定子，$k=1$ とおけば二段階最小二乗推定子となる．一般的に言って $T\to\infty$ のときに k が 1 に確率収束するような k クラス推定子は (16) の γ_m, β_m に対する一致推定子となるし，$\sqrt{T}(k-1)$ が 0 に確率収束するような k クラス推定子ならば，その推定子の漸近的共分散行列は二段階最小二乗推定子と同じになる．

本書で限定情報一般化残差分散最小法と呼ぶものは，通常，限定情報最尤法と呼ばれているものであるが，攪乱項についての多変量正規分布を前提しない本書では次のようにしてこれを導き出す．いま問題としている (16) 式には M 個の内生変数のうち $G(<M)$ 個しか含まれないとすると，γ_m は 0 なる成分を含む．零成分を抹消して G 次元の列ベクトル γ_{mG} を作り，それに対応して Y の列から G 個を取り出して作った行列を Y_G とすれば，

$$Y_G\gamma_{mG}+X\beta_m+u_m=0$$

となる．行列 Y_G に含まれている G 個の内生変数についての (17) 式をまとめると，Π および V の G 個の列から作った Π_G, V_G, を用いて

(20) $$Y_G=X\Pi_G+V_G$$

を得る．同時に γ_{mG} に対する条件式として (14) から

(21) $$\Pi_G\gamma_{mG}=-\beta_m$$

が出るから，この制約条件のもとで (20) の一般化残差分散 $\frac{1}{T}|V'_GV_G|$ を最小にする方法を考える．それは誘導形に対する最小二乗法が何らの制約条件を設けることなく (8) の一般化された残差分散を最小ならしめたことを参照して考えられた方法である．上記の方法によって得られる推定子は k クラス推定子の一種であること，γ_m, β_m の推定子として一致性を持つこと，この推定子の漸近的共分散行列は二段階最小二乗法による場合と同じであることが分かる．さらに適度認定の方程式については，この方法は間接的最小二乗法に帰着する．

以上の単一方程式法を順次に各方程式に繰返して適用すれば，体系が認定不能な方程式を含まない限り全体系を推定できる道理であるが，単一方程式法では当面問題としている式以外の他の方程式についての情報は極めて限られた形でしか利用されていない．この意味で上記の単一方程式法はすべて限定情報推定法であると言わなければならない．これを一歩進めて，どの方程式の推定の場合にもすべての方程式に関する情報を利用しようとする完全情報推定法は，全方程式体系を同時に推定す

る体系法とならざるを得ない．本書では単一方程式法に比較して体系法の部分の叙述が簡単になっているが，この点は第2章・第3章の入門的部分に多くの頁数を割いたことと共に残念に思われる．

体系法のはじめに登場するのは三段階最小二乗法である．

$$Z=\begin{pmatrix} Y_1 \\ X \end{pmatrix}, \qquad \alpha_m=\begin{pmatrix} \gamma_{1m} \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

と書くと，(18) は

$$y=Z\alpha_m+u_m \tag{22}$$

となる．y, Z は m ごとに異なるが，$m=1, 2,\cdots, M$ のいずれに対しても (22) の形の式が成立するから X' を左から乗じて

$$X'y=X'Z\alpha_m+X'u_m \quad (m=1, 2,\cdots, M) \tag{23}$$

を得る．この M 個の式全体に対して同時に一般化された最小二乗法を適用して α_m ($m=1, 2,\cdots,$ M) を推定し，その場合に必要となる

$$Eu(t)u'(t)=\Sigma=(\sigma_{mn})$$
$$\sigma_{mn}=\frac{1}{T}Eu'_m u_n$$

の計算のためには，(18) に対して二段階最小二乗法を適用したときの残差 $\hat{u}_m$ を用いて $\frac{1}{T}\hat{u}'_m\hat{u}_n$ を以てその推定値とすれば，最小二乗法を三段階に亘って使用することになる．この方法による推定子は一致性をもち，推定子の共分散行列に対する一致推定子も得られるが，この間の詳しい説明は関係文献に譲られており本書では結果だけが示されている．なお構造方程式についての攪乱項が無相関で，Σ が対角行列であれば三段階最小二乗法は二段階最小二乗法に帰する．

次に完全情報一般化残差分差最小法というのは，普通，完全情報最尤法と呼ばれているものであるが，制約条件 (14) のもとで誘導形 (8) の一般化残差分散を最小にする方法として導入される．この方法による推定子は一致性をもち，その漸近的共分散行列は三段階最小二乗法のそれと同じになる．

以上に述べた各種の推定法の優劣については，これを統計理論的立場から詳細に比較検討することは未開発の領域に属するが，計算のための労力という点から見るならば，単一方程式の推定ならば二段階最小二乗法が，全体系の推定ならば三段階最小二乗法がよろしいであろうとされる．もっとも全体系の推定の場合に攪乱項の共分散行列 Σ に関する情報が存在するならば，完全情報一般化残差分散最小法の方が良いという．

最後にこのようにして推定された方程式体系の応用として，予測の問題・動態模型の構成などについて簡単な解説がなされているが，この部分は L. R. Klein との共著 (2) の理論的骨組を示したものと見ることができる．

6

以上から分かるように本書は同時方程式体系の推定法を中心にして計量経済学における統計的手法を統一的に解説したものとして勝れた内容をもつ．Klein-Goldberger Model の推定法

について我国で刊行されている二・三の著作 (3) を併せ読むならば，本書の簡明な叙述を補うことができ同時方程式体系の推定についての理解を一層深めることができるであろう．

最後に本書のすぐれた叙述を通読した後においても，なお且つ筆者に残る問題点を記すならば，同じく確率論的模型を構成する場合でも，情報理論や待合せ理論ではその模型の性質が極めて納得的であるにもかかわらず，計量経済学での確率論的前提条件には，いかにも未だ無理な点が残されているように思われる．その一つの例は同時方程式体系の攪乱項について異時点間無相関性を前提しているのがこれであって，近代数理統計学を経済模型の計測に用いる道は未だ大いに残されていると思われる．

(1) J. Johnston, *Econometric Methods*. McGraw, New York, 1963, pp. xiii, 300.

Lawrence R. Klein, *An Introduction to Econometrics*. Prentice-Hall, New Jersey. 1962 pp viii, 280.

前者については一橋大学経済研究所編集『経済研究』第15 巻第 1 号（1964 年 1 月号）に森口親司氏の書評があり，後者については同誌第 14 巻第 3 号（1963 年 7 月号）に江口英一氏の書評がある．

(2) L. R. Klein and A. S. Goldberger, *An Econometric Model of the United States 1929—1952*. North-Holland, Amsterdam, 1955, pp. xv, 165.

(3) 福地崇生『計量経済学入門』東洋経済新報社，1962, pp. iv, 302.

柴山幸治『計量経済学』ミネルヴァ書房，1962, pp. v, 460. 第 10 章—第 13 章.

通商産業大臣官房調査統計部編『日本産業の計量経済分析』通商産業調査会，1963, pp. iv, 372.

（一橋大学教授）