Adaptive Expectation、くもの巣過程および均衡価格の安定性

奥口孝二

一　問題

競争市場の安定分析の一般均衡論的アプローチの主題は、所謂 within week の静学的均衡価格の安定性である。これに対し、古典的なくもの巣理論は農産物のある期の需要および供給がそれぞれその期の価格および一期前の価格に依存する需給均衡の動学過程を想定し、静止的均衡価格の over weeks の安定性を問題にする。

本論文の目的は、全財にくもの巣過程を適用した場合と、それを特殊ケースとして含むより一般的な動学体系の均衡価格の安定性について試論的議論を展開することである。von Neumann の均衡成長モデルでは、一期間経過後に input が output となるものと想定されている。くもの巣過程を全財に適用した場合にも、供給については同様な解釈が可能であろう。したがって、くもの巣過程の一般化は理論的には十分その raison d'être を主張できるのである。

はじめに、n財の場合へ単純な拡張をおこなう。くもの巣過程では、今期も継続するであろうと予想される前期の価格にもとづいて生産が行なわれるが、この予想は Arrow, K. J. and M. Nerlove〔2〕の adaptive expectation と称される一般的な予想形成式の特殊ケースと解釈され得るから、すすんで adaptive expectation を explicitly に導入した体系を考える。

しかし、これら二つの場合には、静学的または静止的均衡価格の安定性が問題とされるに過ぎない。over weeks の均衡価格は時間的に変化するものとし、移動均衡を考慮するのがより現実的であろう。そこで、需要に autonomous factor を導入することが考えられる。この場合、移動均衡価格の非負性と安定性が問題にされる。最後に autonomous factor と adaptive expectation を同時に考慮した動学体系が考察される。

二　くもの巣過程の一般化

n財の場合、くもの巣過程はつぎのように一般化される。左辺はt期の需要をあらわし、右辺は同期の供給をあらわす。需給は均衡する。Pは価格ベクトルをあらわす。

$$(1)\quad DP(t)+\gamma=SP(t-1)+\delta$$

ただし、

$$D=[d_{ij}],\ S=[s_{ij}]$$

$$\gamma=\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \vdots\\ \gamma_n\end{pmatrix},\quad \delta=\begin{pmatrix}\delta_1\\ \vdots\\ \delta_n\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}P_1\\ \vdots\\ P_n\end{pmatrix}$$

とし、

（２） $d_{ii}<0,\ i=1,\cdots\cdots,n,\quad d_{ij}\geqq 0,\ i\neq j,\quad i,\ j=1,\cdots\cdots,n$

（３） $s_{ii}>0,\ i=1,\cdots\cdots,n,\quad s_{ij}\leqq 0,\ i\neq j,\quad i,\ j=1,\cdots\cdots,n$

と仮定する。仮定(2)(3)は各財が需給両面において相互に代替関係にあることを意味する。また、$|D|\neq 0$ と仮定し、[1] (1)には非負の均衡価格が存在するものと仮定する。

P の均衡価格からの偏差を $\bar{P}$ とすると、(1)より、

（１）′ $\bar{P}(t)=D^{-1}S\bar{P}(t-1)$

$\qquad\quad =C\bar{P}(t-1)$

$$C=[c_{ij}]=D^{-1}S$$

が得られ、つぎの定理が成立する。ただし、任意の実正方行列 $A=[a_{ij}]$ の各要素の絶対値をとったものを要素とする行列を $A^{+}=[|a_{ij}|]$ とあらわし、u は要素が全て１の n 次列ベクトルをあらわす。（以下同様）

定理１ (Tsukui, J., 〔6〕)、$u>C^{+}u$ は $\bar{P}(t)\to 0$（即ち、くもの巣過程(1)が安定的）となるための十分条件である。

証明 McKenzie 〔5, Theorem 3〕より明らか。

ここで、D の対角要素が負であることに注意し、

$$u>C^{+}u=(D^{-1}S)^{+}u$$

の両辺に D^{+} をかけると

$$D^{+}u>D^{+}(D^{-1}S)^{+}u\geqq(DD^{-1}S)^{+}u=S^{+}u$$

となり、前掲の定理はつぎの解釈がより容易な定理と同等になる。

定理１′ くもの巣体系(1)が安定であるためには $D^{+}u>S^{+}u$ となることが十分である。

三 Adaptive Expectation の導入

さて、つぎに前節のくもの巣過程を特殊ケースとして含む adaptive expectation を考慮した動学体系を考えよう。adaptive expectation は予想価格形成式としては最も一般的であるとされている。これによると、次期の予想価格の今期のそれに対する増減は、今期の実際の価格と予想価格との差に比例する。[2] したがって、つぎのごとき動学体系が考えられる。

$$(4)\quad \begin{cases} DP(t)+\gamma=S^{*}P^{*}(t)+\delta \\ P^{*}(t+1)-P^{*}(t)=H(P(t)-P^{*}(t)) \end{cases}$$

ただし

$$S^{*}=[s^{*}_{ij}]$$

$$H=\begin{bmatrix} h_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_n \end{bmatrix},\quad h_i>0,\quad i=1,\cdots\cdots,n$$

とし、

（３）* $s^{*}_{ii}>0,\ i=1,\cdots\cdots,n.\quad s^{*}_{ij}\leqq 0,\ i\neq j,\ i,j=1,\cdots\cdots,n$

と仮定する。なお、星印は予想価格に関することを明示する。

くもの巣過程は(4)で $H=I$（I は単位行列）とした場合に等しい。

ここで、非負の均衡価格の存在を仮定し、実際の価格及び予想価格の均衡価格からの偏差をそれぞれ $\bar{P}$, $\bar{P}^{*}$ とすると、(4)より、

$$(4)' \quad \begin{cases} D\bar{P}(t)=S^*\bar{P}(t) \\ \bar{P}(t+1)-P(t)=H(\bar{P}(t)-\bar{P}(t)) \end{cases}$$

が得られ、$|D|\neq 0$ と仮定し、$\bar{P}$ の体系になおすと、

$$(4)'' \quad \bar{P}(t+1)=(I-H+HD^{-1}S^*)\bar{P}(t)$$
$$=F\bar{P}(t)$$
$$F=\{f_{ij}\}=I-H+HD^{-1*}S$$

となる。これよりつぎの定理が導かれる。この定理は $H=I$ の場合定理1と同じである。

定理2　$u>F^+u$ は動学体系(4)が安定であるための十分条件である。

証明　(4)″ で $\bar{P}(t)\to 0$ となるとき、(4)′より $\bar{P}(t)\to 0$ となる。よって、(4)の安定性は(4)″の安定性よりしたがう。McKenzie〔5, Theorem 3〕より $u>F^+u$ の十分性は明らかであるが、直接証明してみよう。いま、F の任意の固有値を λ とし、$|\lambda|\geqq 1$ と仮定すると、

$$|f_{ii}-\lambda|\geqq|\lambda|-|f_{ii}|\geqq 1-|f_{ii}|>\sum_{j\neq i}|f_{ij}|$$

となり、$F-\lambda I$ は dominant diagonal をもつことになり、McKenzie〔5, Theoren 1〕より $|F-\lambda I|\neq 0$ でなければならない。これは λ が固有値であることに矛盾する。即ち、$u>F^+u$ のとき $|\lambda|<1$ となり、$P(t)\to 0$ でなければならない。

四　Autonomous Factor と移動均衡

本節では単純化のため定数項を無視した一般的くもの巣過程に、需要面から autonomous factor を導入する。この場合、各財の需要は価格に依存する部分とそれとは独立に一定の増加率で増加する部分とから構成される。即ち、つぎの動学過程が考えられる。

$$(5) \quad DP(t)+\alpha(1+g)^t=SP(t-1)$$

ただし、

$$\alpha=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \vdots\\ \alpha_n\end{pmatrix}, \quad \alpha_i\geqq 0,\ i=1,\cdots\cdots,n.$$

$$(1+g)^t=\begin{pmatrix}(1+g_1)^t\\ \vdots\\ (1+g_n)^t\end{pmatrix}, \quad g_i>0, \quad i=1,\cdots\cdots,n$$

(5) の特殊解 $\bar{P}(t)$（これが移動均衡価格）を求めよう。

$\bar{\alpha}=-\alpha$

$A=\{a_{ij}\}=\{a^1\cdots\cdots a^k\cdots\cdots a^n\}$

とし、

$$(6) \quad \bar{P}(t)=A\bar{\alpha}(1+g)^t$$

を(5)に代入すると、

$$DA\bar{\alpha}(1+g)^t-SA\bar{\alpha}(1+g)^{t-1}=\bar{\alpha}(1+g)^t$$

$$Da^k\bar{\alpha}_k(1+g_k)^t-Sa^k\bar{\alpha}(1+g_k)^{t-1}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \bar{\alpha}_k(1+g_k)^t\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Big\}k,$$

$k=1,\cdots\cdots,n$

これより、

$$(7)\quad \left(\frac{S}{1+g_k}-D\right)(-a^k)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Big\}k,\qquad k=1,\cdots\cdots,n$$

ここで、

$$B^{(k)}=[b_{ij}{}^{(k)}]=\frac{S}{1+g_k}-D,\qquad k=1,\cdots\cdots,n$$

とすると、仮定(2)、(3)より

$$(8)\quad b_{ij}{}^{(k)}\leq 0,\ i\neq j,\qquad k=1,\cdots\cdots,n$$

移動均衡 $\bar{P}(t)$ が非負であるためには、$A\leqq 0$ でなければならないが、これは $-a^k\geqq 0$ for all k と同等である。よって、(7)、(8)および Hawkins-Simon の定理より

$$(9)\quad b_{11}{}^{(k)}>0,\quad \begin{vmatrix}b_{11}{}^{(k)} & b_{12}{}^{(k)}\\ b_{21}{}^{(k)} & b_{22}{}^{(k)}\end{vmatrix}>0,\cdots\cdots,$$

$$\begin{vmatrix}b_{11}{}^{(k)}\cdots\cdots b_{1n}{}^{(k)}\\ \vdots \qquad\qquad \vdots\\ b_{n1}{}^{(k)}\cdots\cdots b_{nn}{}^{(k)}\end{vmatrix}>0\qquad k=1,\cdots\cdots,n$$

は $A\leqq 0$ の十分条件である。(3) 定理1をも考慮するとつぎの定理が得られる。

定理3 $u>C^+u$ および(9)は動学体系(5)が非負の移動均衡解(6)に収斂するための十分条件である。

五 Adaptive Expectation と Autonomous Factor

つぎに問題となるのは adaptive expectation と autonomous factor とを同時に考慮する場合である。この場合にも前節同様、定数項の存在を無視する。動学体系はつぎのごとくなる。

$$(10)\quad \begin{cases}DP(t)+\alpha(1+g)^t=S^*P^*(t)\\ P^*(t+1)-P^*(t)=H(P(t)-P^*(t))\end{cases}$$

これを予想価格体系になおすと

$$(10)'\quad DH^{-1}P^*(t+1)-(DH^{-1}-D+S^*)P^*(t)=\bar{\alpha}(1+g)^t$$

特殊解 $\bar{P}^*$ を

$$(11)\quad \bar{P}^*=G\bar{\alpha}(1+g)^t$$

$$G=[g_{ij}]=[g^1\cdots\cdots g^k\cdots\cdots g^n]$$

とすると、

$$DH^{-1}G\bar{\alpha}(1+g)^{t+1}-(DH^{-1}-D+S^*)G\bar{\alpha}(1+g)^t=\bar{\alpha}(1+g)^t$$

$$DH^{-1}g^k\bar{\alpha}_k(1+g_k)^{t+1}-(DH^{-1}-D+S^*)g^k\bar{\alpha}_k(1+g_k)^t$$

$$=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ \bar{\alpha}_k(1+g_k)^t\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Big\}k,\qquad k=1,\cdots\cdots,n$$

これより

$$(12)\quad Q^{(k)}(-g^k)=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 1\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}\Big\}k,\qquad k=1,\cdots\cdots,n$$

ただし

$$Q^{(k)}=[q_{ij}{}^{k}]=S^{*}-g_{k}DH^{-1}-D, \qquad k=1, \cdots\cdots, n$$

仮定(2)、(3)*及び g_i. $h_i>0$ for all i より、

(13)　$q_{ij}{}^{(k)}\leqq 0,\ i\neq j,\ k=1,\ \cdots\cdots,\ n$

よって、Hawkins-Simon の定理より、

$$(14)\quad q_{11}{}^{(k)}>0, \begin{vmatrix} q_{11}{}^{(k)} & q_{12}{}^{(k)} \\ q_{21}{}^{(k)} & q_{22}{}^{(k)} \end{vmatrix}>0, \cdots\cdots \begin{vmatrix} q_{11}{}^{(k)} & \cdots\cdots & q_{1n}{}^{(k)} \\ \vdots & & \vdots \\ q_{n1}{}^{(k)} & \cdots\cdots & q_{nn}{}^{(k)} \end{vmatrix}$$

$$>0, \qquad k=1, \cdots\cdots, n$$

は $q^{k}\leqq 0$ for all k 即ち、$\bar{P}^{*}(t)\geqq 0$ の十分条件である。

つぎに、$P^{*}(t)$ (10)が移動均衡価格 $\bar{P}^{*}(t)$ に収斂する場合、(その十分条件は定理2で示される)

$$P(t)=D^{-1}S^{*}P^{*}(t)-D^{-1}\alpha(1+g)^{t}$$

より $t\to\infty$ とすると、

$$P(t)\to D^{-1}S^{*}\bar{P}^{*}(t)-D^{-1}\alpha(1+g)^{t}$$

さて、ここで

$$(15)\quad d_i|d_{ii}|>\sum_{j\neq i}d_j\, d_{ij}, \qquad d_i>0, \qquad i=1, \cdots\cdots, n$$

と仮定しよう。このとき、

$$(-D)\begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\sum_j d_j d_{1j} \\ \vdots \\ -\sum_j d_j d_{nj} \end{pmatrix}>0$$

で、$-D$ の非対角要素が非正であることを考慮すると、Hawkins-Simon の定理より、$-D$ は非負逆転可能で $D^{-1}\leqq 0$ となる。したがって

$$D^{-1}S^{*}P^{*}(t)-D^{-1}\alpha(1+g)^{t}\geqq D^{-1}S^{*}\bar{P}^{*}(t)$$

即ちつぎの定理が導かれる。

定理4　(15)を仮定し、$u>F^{+}u$, $D^{-1}S^{*}\geqq 0$ とし、かつ全ての k について $Q^{(k)}$ の左上隅から順次とった首座小行列式が全て正であるとき、動学体系(10)は非負の移動均衡価格に収斂する。

(1)　例えば、

$$d_i|d_{ii}|>\sum_{j\neq i}d_j\ d_{ij},\ d_i>0,\ i=1,\ 2,\cdots\cdots,n$$

を満足する正数 d_i. $i=1,\ \cdots\cdots,\ n$ が存在する場合、とくに

$$|d_{ii}|>\sum_{j\neq i}d_{ij},\ i=1,\ \cdots\cdots,n$$

の場合、または、

$$d_j|d_{jj}|>\sum_{i\neq j}d_i\ d_{ij}.\ d_j>0,\ j=1,\ \cdots\cdots,n$$

を満たす正数 d_j, $j=1,\cdots\cdots,\ n$ が存在する場合、とくに、

$$|d_{jj}|>\sum_{i\neq j}d_{ij}, \qquad j=1,\ \cdots\cdots,n$$

の場合、$|D|\neq 0$ となる。Mckenzie [5 Theorem 1] を参照せよ。

(2)　$P^{*}(t+1)-P^{*}(t)=H(p(t)-P^{*}(t))$

より、

$$P^{*}(t)=(I-H)^{t}P^{*}(0)+H\sum_{i=1}^{t}(I-H)^{t-i}\ P(i-1)$$

となるから、$P^{*}(t)$ は過去の実際の価格に依存する。そこで例えば、$H<I$ とすると、たまたま $P(t)=P^{*}(t)$ であ

ってゃ、これまで実際の価格が上昇し続けてきた場合には、予想価格も上昇するであろう。しかし

$$P^*(t+1)-P^*(t)=H(P(t)-P^*(t))$$

を直接考えるとこの点が見失われる。そのため、右の式の左辺に定数項を加えるべきであろう。なお、この点については、Arrow, K. J. 〔1〕および Arrow, K. J. and M. Nerlove, 〔2〕を参照せよ。

(3) 例えば、

$$b^{(k)}u=\begin{pmatrix}\sum_j b_{1j}{}^{(k)}\\ \vdots\\ \sum_j b_{nj}{}^{(k)}\end{pmatrix},\qquad u'b^{(k)}=(\sum b_{i1}{}^{(k)}\cdots\cdots\sum b_{in}{}^{(k)})$$

であるから、

$$\sum_j b_{ij}{}^{(k)}>0 \text{ for all } i \text{ and } k$$

または、

$$\sum_i b_{ij}{}^{(k)}>0 \text{ for all } j \text{ and } k$$

のとき、(9)は満たされる。

参考文献

〔2〕 Arrow, K. J., "Price-Quantity Adjustments in Multiple Markets with Rising Demands," in Arrow, K. J., S. Karlin, and P. Suppes (ed.), *Mathematical Methods in the Social Sciences, Stanford*, Stanford Univ. Press. 1960, 3—15

〔2〕 Arrow, K. J. and M. Nerlove, "A Note on Expectations and Stability," *Econometrica*, 26 (1958). 297—305.

〔3〕 Brown, M. and R. Jones, "Economic Growth and the Theory of International Income Flows," *Econometrica*, 30 (1962). 88—97

〔4〕 Ferguson, C. E., "Learning, Expectations, and the Cobweb Model," Zeitschrift für Nationalökonomie, 20 (1960), 297—315

〔5〕 McKenzie, L., "Matrices with Dominant Diagonals and Economic Theory," in Arrow, K. J., S Karlin, and P. Suppes (ed.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford Univ. Press, 1960. 47—62.

〔6〕 Tsukui, J,. "Price Stability in a Generalized Cobweb Case," *Harvard Economic Research Project*, 1963.

〔7〕 奥口孝二「予想と均衡価格の安定性」『一橋論叢』第五十巻第二号、七一—七六頁。

（一橋大学大学院学生）