The Mathematical Theory of Optimal Processes

by L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mischenko

鍋谷清治

微分法によって関数の極大極小を求めることは古くから行なわれていたのに対して，線型計画法・非線型計画法などの方法によって関数の最大最小を求めることは，比較的最近の話題である．本書で取り扱う問題は，ある種の条件のもとで，ある積分の値の最大最小を求めることであって，その限りでは，従来の変分学の問題と同じである．変分学の問題の解は微分方程式を解くことによって与えられるのに対して，本書の方法による解は，必ずしも微分方程式にもとづかず，境界上の値をとる関数によって最大最小の与えられることがしばしばある．この意味で両者の差は，いわば上記の微分法と線型並びに非線型計画法との差に類似している．

つぎに順を追って本書の内容を紹介しよう．

第1章には，本書で取り扱う基本的な問題の説明とその解答が与えられている．

ある対象物の状態は n 個の実数 $x^1, x^2, \cdots, x^n$ によって与えられるものとし，

$$x=(x^1, x^2, \cdots, x^n)$$

とおく．x は n 次元 Euclid 空間 R^n の点である．x の運動の法則は，連立微分方程式

$$(1)\qquad \frac{dx^i}{dt}=f^i(x^1, x^2, \cdots, x^n, u^1, u^2, \cdots, u^r) \qquad (i=1, 2, \cdots, n)$$

によって与えられる．ここで

$$u=(u^1, u^2, \cdots, u^r)$$

は r 次元 Euclid 空間 R^r の部分集合 U の点をとる control できる t の関数とする．

いま，U の値をとる t の関数 $u(t)$ を適当に定めれば，微分方程式 (1) の解で，最初の時点 t_0 において

$$(2)\qquad x(t_0)=x_0=(x_0^1, x_0^2, \cdots, x_0^n)$$

をみたし，将来のある時点 $t_1(>t_0)$ で

$$(3)\qquad x(t_1)=x_1=(x_1^1, x_1^2, \cdots, x_1^n)$$

をみたすものが得られると仮定する．（ここで t_0, x_0, x_1 は与えられた時点ないしは空間の点であるが，t_1 の値は与えられてはいない．）このような $u(t)$ のなかで，積分

$$(4)\qquad J=\int_{t_0}^{t_1} f^0(x(t), u(t))dt$$

の値を最小にするものを求めるのが，本書におけるもっとも基本的な問題である．この問題をこの書評では問題1と名づけることにする．

問題1は，新しい変数

$$x^0=\int_{t_0}^{t} f^0(x(t),\ u(t))dt$$

$$\mathrm{x}=(x^0,\ x^1,\ \cdots,\ x^n)=(x^0,\ x)$$

を導入することにより，つぎのように述べることもできる．

$u(t)$ は上と同様とし，連立微分方程式

$$(5)\qquad \frac{dx^i}{dt}=f^i(x,\ u)\qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

の解で，時点 t_0 で

$$\mathrm{x}(t_0)=(0,\ x_0)$$

をみたし，将来のある時点 t_1 で，x の第 $2\sim n+1$ 座標は x_1 となる，すなわち

$$\mathrm{x}(t_1)=(x_1{}^0,\ x_1)$$

の形となるものがあると仮定する．このような $u(t)$ のなかで，t_1 における第1座標 $x_1{}^0$ を最小にするものを求めることが問題1であるということができる．ただし t_0, x_0, x_1 は与えられたものであり，t_1, $x_1{}^0$ は与えられてはいない．

ここで

$$(6)\qquad K(\psi,\ x,\ u)=\sum_{\alpha=0}^{n}\psi_\alpha f^\alpha(x,\ u)$$

とおけば，問題1の解の必要条件がつぎのように与えられる．

定理 1　$u(t)$ から (5) によって対応する $\mathrm{x}(t)$ をつくり，さらに ψ_0, ψ_1, $\cdots$, ψ_n に関する線型連立微分方程式

$$(7)\qquad \frac{d\psi_i}{dt}=-\frac{\partial K}{\partial x^i}\qquad (i=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

をつくる．$u(t)$ $(t_0\leqq t\leqq t_1)$ が問題1の最適解ならば，(7) の同時には0にならない解であって，$t_0\leqq t\leqq t_1$ なるすべての t について，

$$(8)\qquad K(\psi(t),\ x(t),\ u(t))=\max_{u\in U}K(\psi(t),\ x(t),\ u)=0$$

$$(9)\qquad \psi_0(t)=\mathrm{const.}\leqq 0$$

となるものが存在する．　　　　　　　　　　　　　　(以上)

もしも f^0, f^1, $\cdots$, f^n から，(7) の解の形が簡単に求められれば，それを利用して，定理1によって，問題1を解くことができる．本書のなかの例を1つ引用しよう．

例　$n=2$, $r=1$ とし，U は区間 $[-1,\ 1]$ として，連立微分方程式

$$(10)\qquad \frac{dx^1}{dt}=x^2,\qquad \frac{dx^2}{dt}=u$$

を考える．初期時点 t_0 で $x=(x^1,\ x^2)$ は $x_0=(x_0{}^1,\ x_0{}^2)$ にあり，将来のある時点 t_1 で原点を通るような (10) の解のなかで，原点にくるまでの時間 t_1-t_0 が最小になる $u(t)$ を求めることを問題とする．

この場合には

$$(11)\qquad J=t_1-t_0=\int_{t_0}^{t_1}1dt$$

であるから，$f^0(x^1,\ x^2,\ u)=1$ となる．よって，

$$(12)\qquad K=\psi_0+\psi_1x^2+\psi_2u$$

となるから，(7) は

$$\frac{d\phi_0}{dt}=0, \qquad \frac{d\phi_1}{dt}=0, \qquad \frac{d\phi_2}{dt}=-\phi_1$$

となる．これより

$$\phi_1(t)=c_1 \qquad \phi_2(t)=c_2-c_1t$$

が得られる．これを (8) に代入すると，(8) の第1の等号の条件から，$\phi_2(t)\neq 0$ のとき，

$$u(t)=\mathrm{sgn}\,\phi_2(t)=\mathrm{sgn}\,(c_2-c_1t)$$

となることがわかる．よって U の符号の変化は多くとも1回である．$u(t)=1$ となる t の区間では，(x^1, x^2) の軌跡は

$$x^1=\frac{(x^2)^2}{2}+s, \tag{13}$$

$u(t)=-1$ となる t の区間では，(x^1, x^2) の軌跡は

$$x^1=-\frac{(x^2)^2}{2}+s' \tag{14}$$

となる．ここで s, s' は parameter である．最終的には $(x^1, x^2)=(0, 0)$ となるので，この例の解の軌跡は，つぎの4つのどれかの形になる．

i) (13) で $s=0$ の曲線，

ii) (14) で $s'=0$ の曲線，

iii) 始めは曲線 (13)，その後は (14) で $s'=0$ とおいた曲線，

iv) 始めは曲線 (14)，その後は (13) で $s=0$ とおいた曲線．　(以上)

問題1では，時点 t_0 における x の位置 x_0，将来のある時点で x のとるべき位置 x_1 が与えられているが，この条件を少し緩めて，時点 t_0 では $x(t_0)$ は k 次元のある多様体 S_0 の上にあり，将来のある時点 t_1 では，$x(t_1)$ は l 次元のある多様体 S_1 の上にあることだけを要求する．問題1と同様に，$u(t)$ は U の値をとる t の関数とし，それに対する連立微分方程式 (1) の解で，この新しい境界条件をみたすものが存在すると仮定する．このような $u(t)$ のなかで積分 (4) の値を最小にするものを求めるのが，つぎに基本的な問題であって，これをこの書評では問題2とよぶことにする．

問題2の解の必要条件を与えるつぎの定理が得られている．

定理 2 $u(t)$ $(t_0\leqq t\leqq t_1)$ が問題2の解であって，$x(t)$ はこれに対応する (1) の解とする．$x(t_0)$ において S_0 に接する (k 次元の) 接平面を T_0 とし，$x(t_1)$ において S_1 に接する (l 次元の) 接平面を T_1 とする．このとき，(7) の同時には0にならない解であって，$t_0\leqq t\leqq t_1$ なるすべての t について (8)，(9) をみたし，しかも

(15) "$(\phi_1(t_0), \cdots, \phi_n(t_0))$ は T_0 に垂直であり，また $(\phi_1(t_1), \cdots, \phi_n(t_1))$ は T_1 に垂直である．"

という条件をみたすものが存在する．　(以上)

(15) は t_0 において k 個の条件，t_1 において l 個の条件を意味している．この条件を transversality condition という．

これまで，関数 $f^i(i=0, 1, \cdots, n)$ が t を explicit には含まない場合を取り扱ってきたが，f^i が t を explicit に含む場合には，

$$(16)\qquad \frac{dx^{n+1}}{dt}=1, \qquad x^{n+1}(t_0)=t_0$$

で定義される変数 x^{n+1} (実は $=t$) を導入することにより，この問題を問題2の形に帰着させることができる．

またこれまで t_1 が予じめ与えられてはいない場合を述べてきたが，t_0, t_1 がともに予じめ与えられている場合にも，同様の工夫によって，問題1または問題2の形に帰着させることができる．

以上が本書の第1章の主な内容であって，この章は豊富な例題と図も含んでいて，数学者以外の読者にも面白く読めるであろう．

第2章は第1章で述べた2つの基本的な定理の証明にあてられている．この章では，証明の必要上，Lebesgue 式の積分と微分，“ほとんどいたるところ”という表現などをしばしば使っているので，証明を理解しようという読者は，例えば〔1〕,〔2〕によって，これらの概念に通じておく必要があろう．

第3章では，問題1において，

$$(17)\qquad f^i(x^1, x^2, \cdot\cdot\cdot, x^n, u^1, u^2, \cdot\cdot\cdot, u^r)$$

がいずれも $x^1, x^2, \cdot\cdot\cdot, x^n, u^1, u^2, \cdot\cdot\cdot, u^r$ について定係数をもつ1次式で，U は有界な凸多面体，x_1 は R^n の原点の場合に，(11) を最小にする問題について，特別の考察を加えている．この場合には，他のいくつかの細かい条件をつけ加えると，この問題の解の存在と一意性とが証明される．上に引用した例はこのタイプのものである．この章も多くの図と例を含んでいて，比較的読みやすい．章の最後には，relay 回路による simulation と，(17) が t の関数を係数にもつ1次式の場合についての説明とが与えられている．

第4章では，相互に関連のない雑多な問題が取り扱われている．まず第1に，条件 (3) のかわりに

$$\lim_{t\to\infty} x^i(t)=x_1^i \qquad (i=1, 2, \cdot\cdot\cdot, n)$$

を仮定して，(4) が変格積分になる場合，つぎに $u(t)$ のほかに予じめ指定できる parameter (時間的には定数) がある場合を取り扱い，これに次いで，平均近似の意味での関数近似の理論を著者の方法で論じている．さらに，f^i が時間的な遅れをもつ変数を含む

$$f^i(x(t), x(t-\theta), u(t))$$

の形の場合，最後に2物体間の追跡の問題を扱っている．

第5章では，積分の最大最小を求めるための著者の方法と従来の変分法との関係を述べている．ここで本書のやり方によって変分学の Euler の微分方程式を導びく方法を紹介しておこう．

いま，時点 t_0 と t_1, R^n の点 x_0 と x_1, 関数形 f が与えられて，

$$x(t_0)=x_0, \qquad x(t_1)=x_1$$

をみたす関数 $x(t)$ のなかで

$$J=\int_{t_0}^{t_1} f\left(t, x(t), \frac{dx(t)}{dt}\right)dt$$

を最小にする問題を考えることにする．

ここで $dx(t)/dt$ のかわりに u とおき，また (16) によって変数 x^{n+1} を導入すれば，$U=R^n$ とおくことにより，この問題は問題1の形になる．そこで定理1から，この問題の最適解 $u(t)$, $x(t)$ のみたすべき必要条件を調べてみよう．

連立微分方程式 (1) は

$$\frac{dx^i}{dt}=u^i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

$$\frac{dx^{n+1}}{dt}=1,$$

したがって (6) は

$$K=\phi_0 f(x^{n+1},\ x,\ u)+\phi_1 u^1+\ \cdots\ +\phi_n u^n+\phi_{n+1},$$

(7) は

$$\frac{d\phi_0}{dt}=0, \tag{18}$$

$$\frac{d\phi_i}{dt}=-\phi_0\frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (i=1,\ \cdots,\ n,\ n+1) \tag{19}$$

となる．よって定理1によれば，線型連立微分方程式 (18), (19) の同時には0にならない解 $\phi_0,\ \phi_1,\cdots,\ \phi_n,\ \phi_{n+1}$ であって，$t_0\leqq t\leqq t_1$ なるすべての t について，(8), (9) をみたすものが存在する．

ここで (9) から $\phi_0(t)$ は定数であるが，この定数は0ではあり得ない．なぜなら，$\phi_0=0$ とすれば，(19) から $\phi_1,\cdots,\ \phi_n,\ \phi_{n+1}$ はいずれも定数である．これら $n+1$ 個のうち少なくも1つ0でないものがあるはずであるが，その場合には (8) の第2の等号が成り立たなくなる．

つぎに (8) の第1の等号の条件から，

$$\frac{\partial K}{\partial u^i}=\phi_0\frac{\partial f}{\partial u^i}+\phi_i \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

は，$u=u(t)$ とおくことによって0となる．これと (19) から，

$$\frac{d\phi_i}{dt}=-\phi_0\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)=-\phi_0\frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n),$$

よって，

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial u^i}\right)=\frac{\partial f}{\partial x^i} \qquad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

を得る．これが変分学における Euler の微分方程式である．

第5章では，このほか変分学における 2, 3 の結果が，本書の考え方で導かれている．

これまでの章では，u の区域は U に限定されていたが，x の区域は空間全体であって，何の制限もなかった．第6章では x の許される範囲も R^n の一部 B であって，区分的に滑らかな超曲面を境界とする閉集合であるとする．この場合には，解の曲線 $x(t)$ のうちで，B の内部に属する部分については，第1章の条件がみたされなければならず，B のある1つの面分上にある部分については，別の必要条件が導かれる．また B の内部から境界へ移る点，並びに2つの滑らかな面分上の点については，ある種のつなぎの条件がみたされなければならない．これらを述べたのが第6章である．

第7章ではふたたび追跡の問題を扱っている．R^n のなかで

逃げる点 Q は Markov 過程によって経路が与えられる．時点 σ において Q が x にいるという条件のもとで，時点 τ において Q が Borel 集合 E にはいる確率を $P(\sigma, x, \tau, E)$ とし，対応する確率密度を $p(\sigma, x, \tau, y)$ で表わす．この p は一般に

$$(20)\quad \frac{\partial p}{\partial \sigma}+\sum_{i,j=1}^{n} a^{ij}(\sigma, x)\frac{\partial^2 p}{\partial x^i \partial x^j}+\sum_{i=1}^{n} b^i(\sigma, x)\frac{\partial p}{\partial x^i}=0$$

の形の偏微分方程式を満足する．他方，追う点 P は，control できる関数 $u(t)$ を用いてつくられる連立微分方程式 (1) によって，その経路がきまるものとする．

Σ_x は x を中心とする半径が ε の球とし，$\phi_u(\sigma, z, \tau)$ は，時点 σ において z にいた点 Q が，$\sigma \leqq t \leqq \tau$ の間に，点 P の近傍 Σ_x 内にはいる確率とする．これはもちろん $u(t)$ にも依存する．$h(t)$ は $0 \leqq t < \infty$ なる t に対して定義され，$0 \leqq h(t) \leqq 1$ なる値をとる与えられた関数とし，積分

$$J=\int_0^{\infty} h(s)\frac{\partial}{\partial s}[\phi_u(\sigma, z, s)]ds$$

が最大になるように $u(t)$ をきめようというのが，第7章での問題である．例えば

$$h(t)=\begin{cases}1 & \sigma \leqq t \leqq \tau \quad \text{のとき,} \\ 0 & t > \tau \quad \text{のとき,}\end{cases}$$

なる $h(t)$ を用いれば，この問題は $\phi_u(\sigma, z, \tau)$ を最大にする問題になる．

この問題を解くには，まず $\phi_u(\sigma, z, s)$ の形を explicit に算出した上で，これまでの理論を適用することになる．本書の第7章でたくさんの頁数を使って述べていることは，$\phi_u(\sigma, z, s)$ の形を (20) の係数 $a^{ij}(\sigma, x)$, $b^i(\sigma, x)$ を用いて近似的に表わすことであって，前章までの結果を適用して解の解析的性質を導びくことまではやっていない．

本書の内容はおよそ以上のようなものである．従来の変分学を包括した新しい理論を樹立した本書の価値は多大なものであり，すでに宇沢氏によって経済学の問題への本書の応用が考えられていると聞く．本書の叙述は，内容の複雑さに比べれば明解であり，大半の部分は数学者向きの筆法で書かれている．この書評ではいっさい省略したが，与えられた関数の連続性・微分可能性などの条件ももちろんいちいち断わってある．それらのことのため，応用上の目的から本書を読もうという読者には，あるいは読みずらい感じがするかも知れない．しかし先にも述べたように，第1章・第3章はそれらの読者にも親しみの持てる章であって，このような読者はこの2つの章と第4章以後の必要な部分とを読まれれば十分であろう．

参考文献

〔1〕 伊藤清三『ルベーグ積分入門』1963，裳華房．
〔2〕 高木貞治『解析概論』1961，岩波書店．

(一橋大学助教授)