《研究ノート》

# 線型分数計画について

鍋 谷 清 治

## 1 序 説

線型分数計画とは，与えられた連立1次不等式をみたす非負の未知数の値の組のなかで，与えられた1次分数式の値を最大にするものを求めるという問題である．この問題は山田欽一教授〔6〕によって提出され，そのなかで特殊な場合の解法が，そしてとくに線型計画の問題を解くときに使われるのと同様な単体表が与えられている．このノートの目的は，山田教授の論文のなかの本質的でない仮定を取り除いて，これを一般的に取り扱うこと，並びに線型分数計画の問題の解法をふつうの線型計画の問題のくり返しに帰着させること，の2つである．山田教授の線にそって一般的な1つの解法を示し，また線型計画の問題のくり返しによる他の解法を述べることにする．

ここでまず記号の説明をする．

$A$ $(m\times n)$, $B$ $(m\times 1)$, $C$ $(n\times 1)$, $D$ $(n\times 1)$ は与えられた行列またはベクトル，

$E$ $(n\times 1)$ は1ばかりからなるベクトル，

$M$ は十分大きな正数，

$X$ $(n\times 1)$, $z$ は未知のベクトル並びにスカラー．

（ここで $m\times n$ とは $m$ 行 $n$ 列ということを示す．）

つぎに分数式 $C'X/D'X$ の値は（プライムは転置行列を示す），

$$\begin{cases} D'X\neq 0 & \text{ならばふつうの分数値,} \\ D'X=0,\ C'X>0 & \text{ならば}\ \infty, \\ D'X=0,\ C'X<0 & \text{ならば}\ -\infty, \\ D'X=C'X=0 & \text{ならば}\ 0/0\ \text{のまま,} \end{cases}$$

とする．そして 0/0 と実数または $\pm\infty$ の間では大小関係を定義しない．よって 0/0 は，最大値や最小値を求めるときの競争に参加させないものとする．

このノートでいう線型分数計画の問題とは，つぎの問題0である．

**問題 0** $AX\leqq B$, $D'X\geqq 0$, $X\geqq 0$ という条件のもとで $C'X/D'X$ を最大にする．

山田教授は $B$ を正のベクトル，$C$ と $D$ は零ベクトルでない非負のベクトルと仮定しているが，このノートではこれらの仮定は用いない．しかし，未知数の与えられた区域で，目的函数 $C'X/D'X$ の分母 $D'X$ が正になったり負になったりすると，最大化の意味を失なうことになるので，とくに $D'X\geqq 0$ を条件式の1つとして取り上げることにした．

条件式 $AX\leqq B$ が $AX=B$ の形であっても問題の本質に変化のないことは，線型計画のときと同様である．

問題0の条件式 $AX \leqq B$, $D'X \geqq 0$, $X \geqq 0$ をみたす $X$ を問題0の適解という．このとき山田教授の定理1はつぎのように述べることができる．

**定理 1**　問題0の適解全体の集合を $S$ とする．$S$ は，空集合でなければ，つぎの形の点 $X$ の全体の集合である．

$$X=u_1P_1+\cdots+u_kP_k+v_1Q_1+\cdots+v_lQ_l,$$

ただし

$$u_1 \geqq 0, \cdots, u_k \geqq 0, \quad u_1+\cdots+u_k=1,$$
$$v_1 \geqq 0, \cdots, v_l \geqq 0.$$

ここで $k$ は $k \geqq 1$ なるある整数，$l$ は $l \geqq 0$ なるある整数であって，$P_1, \cdots, P_k$, $Q_1, \cdots, Q_l$ は $k+l$ 個の適当な定ベクトル $(n \times 1)$ である．

さらにこのとき，$AX \leqq 0$, $D'X \geqq 0$, $X \geqq 0$ をみたす $X$ 全体の集合は，

$$X=v_1Q_1+\cdots+v_lQ_l.$$

ただし　$v_1 \geqq 0, \cdots, v_l \geqq 0$

の形の $X$ 全体の集合と一致する．　(以上)

この定理の証明は例えば Goldman〔3〕，筆者〔5〕のなかに与えられている．

山田教授はここで $S$ は凸多面体をつくる，すなわち $l=0$ と仮定しているが，この仮定も設けないことにする．このとき，山田教授の定理2に相当するものはつぎのようになる．

**定理 2**　$S$ が空集合でなければ，

$$(1)\qquad \sup_{X\in S}\frac{C'X}{D'X}=\max\left(\frac{C'P_1}{D'P_1}, \cdots, \frac{C'P_k}{D'P_k}, \frac{C'Q_1}{D'Q_1}, \cdots, \frac{C'Q_l}{D'Q_l}\right).$$

ここで右辺の最大値が，最初の $k$ 個の値のなかにあるとし，例えばそれが $C'P_1/D'P_1$ であるとすれば，

$$\max_{X\in S}\frac{C'X}{D'X}=\frac{C'P_1}{D'P_1}.$$

また右辺の最大値が最初の $k$ 個の値のなかにはなくて，それが例えば $C'Q_1/D'Q_1$ であるとする．$S$ のなかに $C'P/D'P=0/0$ となる点 $P$ があれば，$v>0$ なる $v$ に対して，

$$\max_{X\in S}\frac{C'X}{D'X}=\frac{C'(P+vQ_1)}{D'(P+vQ_1)}=\frac{C'Q_1}{D'Q_1}.$$

このような点がなければ，任意の適解 $P$ に対して，

$$\frac{C'P}{D'P}<\frac{C'Q_1}{D'Q_1},$$

$$\sup_{X\in S}\frac{C'X}{D'X}=\lim_{v\to\infty}\frac{C'(P+vQ_1)}{D'(P+vQ_1)}=\frac{C'Q_1}{D'Q_1}.$$

また (1) の右辺の括弧内が全部 0/0 であれば，問題0の任意の適解 $X$ に対して，$C'X/D'X=0/0$ となる．　(以上)

この定理の証明は，定理1を用いて，任意の適解 $X$ に対して，

$$\frac{C'X}{D'X}=\frac{u_1C'P_1+\cdots+u_kC'P_k+v_1C'Q_1+\cdots+v_lC'Q_l}{u_1D'P_1+\cdots+u_kD'P_k+v_1D'Q_1+\cdots+v_lD'Q_l},$$

ただし

$$u_1 \geqq 0, \cdots, u_k \geqq 0, \quad u_1 + \cdots + u_k = 1,$$
$$v_1 \geqq 0, \cdots, v_l \geqq 0$$

となることから明らかである.

ここで問題0を解くということは，つぎのいずれかの場合に到達したことを意味するものと定める.

1) $\max\limits_{X \in S} \dfrac{C'X}{D'X}$ が存在する（$\pm\infty$ も許す）ときには，

$$P \in S, \qquad \max_{X \in S} \frac{C'X}{D'X} = \frac{C'P}{D'P}$$

となる1つのベクトル $P$ が求められる.

このとき $P$ を問題0の最適解という.

2) $\max\limits_{X \in S} \dfrac{C'X}{D'X}$ は存在しないが，$\sup\limits_{X \in S} \dfrac{C'X}{D'X}$ が意味をもつときには，

$$P \in S, \qquad Q \in T,$$
$$\sup_{X \in S} \frac{C'X}{D'X} = \lim_{v \to \infty} \frac{C'(P+vQ)}{D'(P+vQ)}$$

となる2つのベクトル $P, Q$ が求められる.

このとき $(P, Q)$ を問題0の最適解という.

3) $S$ は空集合ではないが，$X \in S$ なるすべての $X$ に対して $C'X/D'X = 0/0$ となることがわかる.

4) $S$ は空集合，すなわち問題0の適解が存在しないことがわかる.

## 2 単体判別基準

本節ではつぎの仮定をおく.

(2) $S$ は有界とし $(l=0)$，さらに $X \in S$, $D'X > 0$ となる $X$ が存在する.

この仮定のもとで，目的函数を最大化する手順は，本質的には山田教授によって与えられている．しかしここでは問題の条件も異なるので，その手順をもう一度簡単に述べることにする.

まず，

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}, \qquad D = \begin{pmatrix} d_1 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$c_{n+1} = \cdots = c_{m+n+1} = d_{n+1} = \cdots = d_{m+n+1} = 0$$

とおき，$m+1$ 個の slack variables $x_{n+1}, \cdots, x_{m+n+1}$ を導入すれば，問題0はつぎの形になる：

(3) $$\sum_{i=1}^{m+n+1} A_i x_i = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}; \qquad x_1, \cdots, x_{m+n+1} \geqq 0$$

という条件のもとで

(4) $$\sum_{i=1}^{m+n+1} c_i x_i \bigg/ \sum_{i=1}^{m+n+1} d_i x_i$$

を最大にする．ただし

$$A_1=\begin{pmatrix}a_{11}\\ \vdots\\ a_{m1}\\ -d_1\end{pmatrix},\ \cdots,\ A_n=\begin{pmatrix}a_{1n}\\ \vdots\\ a_{mn}\\ -d_n\end{pmatrix},$$

$$A_{n+1}=\begin{pmatrix}1\\ 0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix},\ \cdots,\ A_{m+n+1}=\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{pmatrix}.$$

仮定 (2) によれば，$m+n+1$ 次元空間で (3) をみたす点 $(x_1, \cdots, x_{m+n+1})$ 全体の集合 $\bar{S}$ は凸多面体をつくる．しかもそのなかで，(4) の分母を正にする点があるので，この最大化の問題では $-\infty<\max\leqq\infty$ なる最大値が存在する．しかもその最大値は，定理2によれば，$\bar{S}$ の1つの頂点で達せられる．

$\bar{S}$ の頂点はつぎのようにして求められる．自然数の集合 $\{1, 2, \cdots, m+n+1\}$ のうちからとった $m+1$ 個の添数の集合を $I$ とし，$i\in I$ なる $i$ に対する $A_i$ は1次独立とする．このとき，

$$\sum_{i\in I}A_ix_i=\begin{pmatrix}B\\ 0\end{pmatrix};\qquad x_i=0\quad(i\notin I)$$

とおく．$i\in I$ なるすべての $i$ について $x_i\geqq0$ となれば，こうして得られた $(x_1, \cdots, x_{m+n+1})$ が $\bar{S}$ の1つの頂点となる．

ここでまずつぎの仮定をおく．

(5)　退化は生じない．

このとき $I$ が1つの頂点を定めるならば，$i\in I$ なるすべての $i$ について $x_i>0$ となる．さて，この頂点において，(4) の値は有限または $\infty$ とする．ここで線型計画のときと同様に，

(6)　$$A_j=\sum_{i\in I}\lambda_{ij}A_i\qquad(j=1, \cdots, m+n+1)$$

となるように係数 $\lambda_{ij}$ を定める．

ここで1つの $j$ $(\notin I)$ をとり，$\theta>0$ として

(7)　$x_i^*=x_i-\theta\lambda_{ij}$ $(i\in I)$,　$x_j^*=\theta$,　$x_k^*=0$ $(k\notin I,\ k\neq j)$

をつくれば，$x_i^*=x_i-\theta\lambda_{ij}\geqq0$ $(i\in I)$ なる限り，これも (3) を満足する．ここで $\lambda_{ij}$ $(i\in I)$ なる $\lambda_{ij}$ のなかに少なくも1つは $\lambda_{ij}>0$ となるものがある．しからざれば，(7) から $\bar{S}$ の $j$- 座標は有界でなくなる．

ここで2つの不等式

(8)　$$\frac{\sum_{i\in I}c_i(x_i-\theta\lambda_{ij})+c_j\theta}{\sum_{i\in I}d_i(x_i-\theta\lambda_{ij})+d_j\theta}\gtreqless\frac{\sum_{i\in I}c_ix_i}{\sum_{i\in I}d_ix_i}$$

(9)　$$\Big(\sum_{i\in I}d_ix_i\Big)\Big(c_j-\sum_{i\in I}c_i\lambda_{ij}\Big)\gtreqless\Big(\sum_{i\in I}c_ix_i\Big)\Big(d_j-\sum_{i\in I}d_i\lambda_{ij}\Big)$$

の関係をみる．(8) の右辺は有限または $\infty$ と仮定してあるから，(8) の左辺が 0/0 とならない限り，(8) での $\gtreqless$ は (9) での $\gtreqless$ と同一のものが成り立つ．

ここで2つの場合を区別することができる．

1)　$j\notin I$ なる少なくも1つの $j$ に対して，(9) で不等号 $>$ が成り立つ．

2)　$j\notin I$ なるすべての $j$ に対して，(9) で不等号または等号 $\leqq$ が成り立つ．

第1の場合には，

$$\theta=\min_{\substack{\lambda_{ij}>0\\ i\in I}}\frac{x_i}{\lambda_{ij}}$$

とおけば，(7) から $\bar{S}$ の他の頂点が得られて，そこでの目的函数 (4) の値は，前より大きくなる．したがって，その値はまた有限または $\infty$ となる．第1の場合が無限に続くことはなく，有限個の段階で 2) が生ずる．

2) が生じたならば，$(x_1,\cdots,x_{m+n+1})$ が最適解になることが，つぎのように示される．いま，(3) をみたす任意の $(x_1^*,\cdots,x^*_{m+n+1})$ をとる．すなわち，

$$\sum_{i=1}^{m+n+1}A_ix_i^*=\begin{pmatrix}B\\0\end{pmatrix};\qquad x_1^*,\cdots,x^*_{m+n+1}\geqq 0.$$

このとき，(6) によって，

$$x_i^*=x_i-\sum_{j\notin I}x_j^*\lambda_{ij}\qquad(i\in I)\tag{10}$$

が成り立ち，また，この場合の仮定から

$$\begin{aligned}&(\sum_{i\in I}d_ix_i)\sum_{j\notin I}x_j^*(c_j-\sum_{i\in I}c_i\lambda_{ij})\\&\qquad\leqq(\sum_{i\in I}c_ix_i)\sum_{j\notin I}x_j^*(d_j-\sum_{i\in I}d_i\lambda_{ij})\end{aligned}\tag{11}$$

となる．(10) によれば，

$$\sum_{j\notin I}x_j^*(c_j-\sum_{i\in I}c_i\lambda_{ij})=\sum_{i=1}^{m+n+1}c_ix_i^*-\sum_{i\in I}c_ix_i,$$

$$\sum_{j\notin I}x_j^*(d_j-\sum_{i\in I}d_i\lambda_{ij})=\sum_{i=1}^{m+n+1}d_ix_i^*-\sum_{i\in I}d_ix_i.$$

これらを (9) に代入し，(8) の右辺が有限または $\infty$ のことに注意すれば，$(x_1^*,\cdots,x^*_{m+n+1})$ において目的函数が 0/0 とならない限り，

$$\sum_{i=1}^{m+n+1}c_ix_i^*\Big/\sum_{i=1}^{m+n+1}d_ix_i^*\leqq\sum_{i\in I}c_ix_i\Big/\sum_{i\in I}d_ix_i$$

となることがわかる．よってこのとき $I$ は (4) が最大になる頂点を与えることになる．

仮定 (5) は線型計画のときと同様に，perturbation method (〔1〕参照) によって避けることができる．よって仮定 (2) さえみたされていれば，上述の単体基準（本質的には山田教授のものと同じ）を用いて，問題0を解くことができる．

## 3 問題0の第1解法

本節では，一般の場合に戻って上述の単体判別基準を用いた問題0の解法を述べることにする．そのため，つぎの問題 1～6 を用意する．このうち問題2は前節の単体判別基準によって解くことができる．他の問題はいずれもふつうの線型計画の問題である．

**問題 1** $AX\leqq B,\ E'X\leqq M,\ X\geqq 0$ という条件のもとで $D'X$ を最大にする．

**問題 2** $AX\leqq B,\ D'X\geqq 0,\ E'X\leqq M,\ X\geqq 0$ という条件のもとで $C'X/D'X$ を最大にする．

**問題 3** $AX\leqq 0,\ D'X=0,\ X\geqq 0$ という条件のもとで $C'X$ を最大にする．

**問題 4** $AX\leqq 0,\ D'X=1,\ X\geqq 0$ という条件のもとで $C'X$ を最大にする．

**問題 5**　$AX \leqq B$. $D'X=0$, $X \geqq 0$ という条件のもとで $C'X$ を最大にする.

**問題 6**　$AX \leqq B$, $D'X=0$, $X \geqq 0$ という条件のもとで $C'X$ を最小にする.

以下に第1解法を説明する. ここで $\max_i$ (または $\min_i$) は, 問題 $i$ を解くことによって得られる最大値 (または最小値) を示す. この最大値 (または最小値) はないが上限 (または下限) が意味をもつときには, それを $\sup_i$ (または $\inf_i$) で表わす. その問題の適解がないときに n. f. (non-feasible の略) としるす. 場合の分け方は小数点方式による.

例えば Case ($\alpha$. $\beta$) を分けたものを Case ($\alpha$. $\beta$. 1), Case ($\alpha$. $\beta$. 2), $\cdots$ とする.

まず問題1を解く.

Case (1) : $\max_1 > 0$. この場合には, $C'X/D'X$ に有限の値を与えるような問題0の適解がある. $D'X>0$ となる基本解から出発して, つぎに問題2を解く.

Case (1. 1) : $X_2$ を問題2の最適解とするとき, "$\max_2 = \infty$" または "$\max_2 < \infty$ でしかも $E'X_2 < M$". この場合には $X_2$ が問題0の最適解となって, $-\infty < \max_0 = \max_2 \leqq \infty$ が成り立つ.

Case (1. 2) : $\max_2 < \infty$ でしかも $E'X_2 = M$. この場合には $\sup_0 = \infty$ または $\max_2 < \sup_0 < \infty$ または $\max_0 = \max_2$ という3つの場合が考えられる. そこで問題3を解く. その結果, $\sup_3 = \infty$ または $\max_3 = 0$ が得られる.

Case (1. 2. 1) : $\sup_3 = \infty$. $X_3$ を

(12)　$$C'X>0,\ AX \leqq 0,\ D'X=0,\ X \geqq 0$$

の解とすれば, ($X_2$, $X_3$) が問題0の最適解となって, $\sup_0 = \infty$ となる.

Case (1. 2. 2) : $\max_3 = 0$. 問題4を解く. このとき $\sup_4 = \infty$ とはならない.

Case (1. 2. 2. 1) : $\max_4 > \max_2$. この場合には, 問題4の最適解を $X_4$ とすると, ($X_2$, $X_4$) が問題0の最適解となって, $\sup_0 = \max_4$ となる.

Case (1. 2. 2. 2) : $\max_4 \leqq \max_2$ または問題4が n. f. となる. この場合には $X_2$ が問題0の最適解となる.

Case (2) : $\max_1 = 0$. この場合には, $C'X/D'X$ が有限の値になるような問題0の適解はない. ここで問題5を解く.

Case (2. 1) : $\sup_5 = \infty$ または $\max_5 > 0$. $X_5$ を

(13)　$$C'X>0,\ AX \leqq B,\ D'X=0,\ X \geqq 0$$

の解とすれば, $X_5$ が問題0の最適解となって, $\max_0 = \infty$ となる.

Case (2. 2) : $\max_5 = 0$. 問題0の任意の適解 $X$ に対して, $C'X/D'X = -\infty$ または $C'X/D'X = 0/0$ の可能性だけが残る. 問題6を解く.

Case (2. 2. 1) : $\inf_6 = -\infty$ または $\min_6 < 0$. $X_6$ を

(14)　$$C'X<0,\ AX \leqq B,\ D'X=0,\ X \geqq 0$$

の解とすれば, $X_6$ が問題0の最適解で, $\max_0 = -\infty$ となる.

Case (2. 2. 2) : $\min_6 = 0$. この場合には, 問題0のすべての

適解 $X$ に対して $C'X/D'X=0/0$ となる．

Case (2.3)：$\max_5<0$．$X_5$ を問題5の最適解とすれば，$X_5$ が問題0の最適解となって，$\max_5=-\infty$ となる．

Case (3)：$\max_1<0$ または問題1が n. f. となる．この場合には問題0も n. f. となる．

**例 1**

$$\begin{cases} -2x_1+x_2\leqq -2, \\ x_1-x_2\leqq 2, \\ 2x_1-x_2\geqq 0, \\ x_1,\ x_2\geqq 0 \end{cases}$$

という条件のもとで，

$$\frac{x_1+x_2}{2x_1-x_2} \tag{15}$$

を最大にせよ．

1) 問題1を解く．問題1は slack variables $x_3$, $x_4$, $x_5$ の導入により，つぎの形となる．

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3 = -2, \\ x_1-x_2+x_4 = 2, \\ x_1+x_2+x_5 = M, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4\ x_5\geqq 0 \end{cases}$$

という条件のもとで，$2x_1-x_2$ を最大にする．最適解は

$$x_1=\frac{M+2}{2},\quad x_2=\frac{M-2}{2},\quad x_3=\frac{M+2}{2}, \tag{16}$$
$$x_4=0,\quad x_5=0;\qquad \max_1=\frac{M+6}{2}$$

となる．

2) 問題2を解く．

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+x_3 = -2, \\ x_1-x_2+x_4 = 2, \\ x_1+x_2+x_5 = M, \\ -2x_1+x_2+x_6 = 0, \\ x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6\geqq 0 \end{cases}$$

という条件のもとで (15) を最大にする．ここで問題2の最初の適解として，(16) の $x_1\sim x_5$ の値と $x_6=(M+6)/2$ とを用いることができる．最適解は

$$x_1=\frac{M+2}{3},\quad x_2=\frac{2M-2,}{3},\quad x_3=0,$$
$$x_4=\frac{M+2}{3},\quad x_5=0,\quad x_6=2;\qquad \max_2=\frac{M}{2}$$

となる．

3) 問題3を解く．

$$\begin{cases} -2x_1+x_2\leqq 0 \\ x_1-x_2\leqq 0 \\ 2x_1-x_2=0 \\ x_1,\ x_2\geqq 0 \end{cases}$$

という条件のもとで，$x_1+x_2$ を最大にする．これに対して $\sup_3=\infty$ となるので，$\sup_0=\infty$ が得られる．

$x_1+x_2>0$ となるような問題3の適解として，$x_1=1$, $x_2=2$ が得られるので，問題2の最適解と合わせて，例1の最適解は

$$\left\{\begin{pmatrix}(M+2)/3\\(2M-2)/3\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

となる.

### 4　問題 0 の第 2 解法

本節では，前節の問題 5，問題 6 のほかに，つぎの 3 つの問題を利用する.

これらはいずれも線型計画の問題である.

**問題 7**　$AX-Bz\leqq 0,\ D'X=1,\ X\geqq 0,\ z\geqq 0$ という条件のもとで $C'X$ を最大にする.

**問題 8**　問題 0 の適解を求める.

**問題 9(r)**　$AX\leqq B,\ D'X\geqq 0,\ X\geqq 0$ という条件のもとで $(C-rD)'X$ を最大にする．ただし $r$ は parameter である.

ここで $z>0$ であって，$\begin{pmatrix}X\\z\end{pmatrix}$ が問題 7 の適解となれば，$\dfrac{X}{z}$ は問題 0 の適解であって，$D'\left(\dfrac{X}{z}\right)>0,\ C'\left(\dfrac{X}{z}\right)\Big/D'\left(\dfrac{X}{z}\right)=C'X$ となることに注意する．第 2 解法はつぎのように行なわれる.

問題 7 を解く.

Case (1)：$\sup_7=\infty$ でしかも $z_{71}>0$．ここで $\begin{pmatrix}X_{70}\\z_{70}\end{pmatrix}$ を問題 7 の 1 つの適解とし，$\begin{pmatrix}X_{71}\\z_{71}\end{pmatrix}$ は

(17)　　$C'X>0,\ AX-Bz\leqq 0,\ D'X=0,\ X\geqq 0,\ z\geqq 0$

の 1 つの解とする．これらは，問題 7 を単体法によって解くとき，最後の段階で与えられる．この場合には，$\dfrac{X_{71}}{z_{71}}$ が問題 0 の適解で，$C'\left(\dfrac{X_{71}}{z_{71}}\right)\Big/D'\left(\dfrac{X_{71}}{z_{71}}\right)=\infty$　となるので，$\dfrac{X_{71}}{z_{71}}$ が問題 0 の最適解で，$\max_0=\infty$ となる.

Case (2)：$\sup_7=\infty$ でしかも $z_{71}=0$．問題 5 を解く．その結果，有限の $\max_5$ は生じない．なぜなら，$\max_5$ が有限で $X_5$ が問題 5 の最適解とすれば，$X_5+X_{71}$ も問題 5 の適解となって，$C'(X_5+X_{71})>C'X_5=\max_5$ となるからである.

Case (2. 1)：$\sup_5=\infty$．$X_5$ を (13) の解とすれば，$X_5$ は問題 0 の最適解で，$\max_0=\infty$ となる.

Case (2. 2)：問題 5 は n. f. で $z_{70}>0$．この場合には問題 0 の適解で $C'X/D'X=\infty$ となるものはない．$X_{70}/z_{70}$ は問題 0 の適解で，$X_{71}$ は (12) をみたすので，$(X_{70}/z_{70},\ X_{71})$ は問題 0 の最適解で，$\sup_0=\infty$ となる.

Case (2. 3)：問題 5 は n. f. で $z_{70}=0$．問題 8 を解く.

Case (2. 3. 1)：問題 0 に適解がある．$X_8$ を問題 0 の適解とすれば，Case (2. 2) と同様の理由で，$(X_8,\ X_{71})$ が問題 0 の最適解で，$\sup_0=\infty$ となる.

Case (2. 3. 2)：問題 0 は n. f. となる.

Case (3)：$\max_7=s$ でしかも $z_7>0$．ここで $\begin{pmatrix}X_7\\z_7\end{pmatrix}$ を問題 7 の最適解とする．このとき，$\dfrac{X_7}{z_7}$ は問題 0 の適解で，

$C'\left(\dfrac{X_7}{z_7}\right)\Big/D'\left(\dfrac{X_7}{z_7}\right)=s$ となる．この場合には $\max_0=s$，したがって $X_7/z_7$ が問題 0 の最適解になることが証明できる.

なぜなら，第 1 に，問題 0 の適解で $C'X/D'X=\infty$ となるものがあるとすると，そのような解の 1 つを $X_5$ とすれば，$X_5$ は (13) をみたすので，$\begin{pmatrix}X_7+X_5\\z_7+1\end{pmatrix}$ も問題 7 の適解で，

$$C'(X_7+X_5)>C'X_7=\max_7$$

となって矛盾である．第2に，問題0の適解 $X$ であって，$-\infty<C'X/D'X<\infty$ なる $X$ に対しては，$D'X>0$ となるので，$z=1/D'X$ とおけば，$\begin{pmatrix} zX \\ z \end{pmatrix}$ が問題7の適解となり，

$$C'X/D'X=C'(zX)\leqq\max_7=s$$

となる．

Case (4)：$\max_7=s$ でしかも $z_7=0$．このとき $X_7$ は

$$C'X_7=s,\ AX_7\leqq 0,\ D'X_7=1,\ X_7\geqq 0$$

をみたす．そこで問題 $9(s)$ を解く．上と同様の理由によって，問題0の適解 $X$ で $C'X/D'X>s$ となるものはないので，問題 $9(s)$ が適解をもてば，$\max_9\leqq 0$ となる．

Case (4. 1)：$\max_9=0$．$X_9$ を問題 $9(s)$ の最適解とすれば

$$C'X_9=sD'X_9,\ AX_9\leqq B,\ D'X_9\geqq 0,\ X_9\geqq 0$$

となるので，$X_9+X_7$ は問題0の適解であって，$C'(X_9+X_7)/D'(X_9+X_7)=s$ が得られる．そこで $X_9+X_7$ が問題0の最適解で，$\max_0=s$ となる．

Case (4. 2)：$\max_9<0$．この場合には，$C'X/D'X=s$ となるような問題1の適解 $X$ はない．$X_9$ を問題 $9(s)$ の最適解とすれば，$(X_9, X_7)$ が問題0の最適解で，$\sup_0=s$ となる．

Case (4. 3)：問題 $9(s)$ が n. f. となる．この場合には問題0も n. f. となる．

Case (5)：問題7が n. f. となる．この場合には，問題0の適解 $X$ で，$D'X>0$ となるものはない．問題5を解く．

Case (5. 1)：$\sup_5=\infty$ または $\max_5>0$．$X_5$ を (13) の解とすれば，$X_5$ が問題0の最適解で，$\max_0=\infty$ となる．

Case (5. 2)：$\max_5=0$．問題6を解く．

Case (5. 2. 1)：$\inf_6=-\infty$ または $\min_6<0$．$X_6$ を (14) の解とすれば，$X_6$ が問題0の最適解となって，$\max_0=-\infty$ となる．

Case (5. 2. 2)：$\min_6=0$．問題0のすべての適解 $X$ について，$C'X/D'X=0/0$ となる．

Case (5. 3)：$\max_5<0$．$X_5$ を問題5の最適解とすれば，$X_5$ が問題0の最適解となって，$\max_0=-\infty$ となる．

Case (5. 4)：問題5は n. f. となる．この場合には，問題0も n. f. となる．

**例 2** 例1と同じ問題を本節の方法で解け．

1) 問題7を解く．

$$\begin{cases} -2x_1+x_2+2z\leqq 0, \\ x_1-x_2-2z\leqq 0, \\ 2x_1-x_2 \qquad =1, \\ x_1,\ x_2,\ \ z\geqq 0 \end{cases}$$

という条件のもとで $x_1+x_2$ を最大にする．これに対して，$\sup_7=\infty$ となり，

$$\begin{pmatrix} X_{70} \\ z_{70} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\qquad \begin{pmatrix} X_{71} \\ z_{71} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

が得られる．

2) 問題5を解く．

$$\begin{cases} -2x_1+x_2\leqq -2. \\ x_1-x_2\leqq 2, \\ 2x_1-x_2=0, \\ x_1,\ x_2\geqq 0 \end{cases}$$

という条件のもとで $x_1+x_2$ を最大にする．この問題は n. f. である．

3）問題8を解く．問題0の適解として，$x_1=1$, $x_2=0$ が得られるので，

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

が例2の最適解で，$\sup_0=\infty$ となる．

**例 3**

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad \leqq 2, \\ -x_1+\ x_2\leqq -1, \\ 3x_1+2x_2\geqq 0, \\ x_1.\quad x_2\geqq 0 \end{cases}$$

という条件のもとで，

$$\frac{x_1+x_2}{3x_1+2x_2}$$

を最大にせよ．

1）問題7を解く．

$$\begin{cases} x_1 \qquad\quad -2z\leqq 0 \\ -x_1+\ x_2+\ z\leqq 0, \\ 3x_1+2x_2 \qquad =1, \\ x_1,\quad x_2,\quad z\geqq 0 \end{cases}$$

という条件のもとで $x_1+x_2$ を最大にする．この問題の最適解は，

$$x_1=\frac{1}{4},\quad x_2=\frac{1}{8},\quad z=\frac{1}{8}>0;\qquad \max{}_7=\frac{3}{8}$$

であるから，$\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}$ が例3の最適解で，$\max_0=\max_7=\frac{3}{8}$ となる．

## 5　結　語

米国では線型分数計画の問題は Isbell and Marlow〔4〕によって取り扱われ，そのなかでやはり線型計画の問題への還元が行なわれているが，そこで解くべき線型計画の問題の数に限界はない．上の第2解法では，序説で述べた意味でもっとも一般的な解を得るのにたかだか3つの（ときには例3のように1つの）線型計画の問題を解けばよい．Dorn〔2〕は最近の結果を報じているが，詳細は明らかでない．

最後にわたくしの結果に深い興味を示された一橋大学山田欽一教授，並びに文献〔4〕を筆者に貸して下さった小樽商科大学古瀬大六教授に深い謝意を表する次第である．

## 参　考　文　献

〔1〕Charnes, A., Cooper, W. W., and Henderson, A. (1953), *An Introduction to Linear Programming*——John Wiley and Sons.

〔2〕Dorn, W. S. (1963), Non-Linear Programming—

—A survey——*Management Science*, vol. 9.

〔3〕 Goldman, A. J. (1956), Resolution and Separation theorems for Polyhedral Convex Sets——*Linear Inequalities and Related Systems*, Edited by Kuhn, H. W. and Tucker, A. W.

〔4〕 Isbell, J. R. and Marlow, H. W. (1956), Attrition Games——*Naval Research Logistics Quarterly*, vol. 3.

〔5〕 鍋谷清治 (1957),「一次不等式系の解に関する幾何学的考察」『一橋論叢』38 巻 3 号.

〔6〕 山田欽一 (1963),「線型分数計画について」『一橋論叢』49 巻 5 号.

(一橋大学助教授)