Nonlinear Programming の理論的展望

奥口孝二

はしがき

戦後、経済理論でひろく activity analysis ないしは linear economics と総称される産業連関分析、リニア・プログラミング及びゲームの理論の発展は著しい。周知のごとく、リニア・プログラミングは一次不等式の制約のもとで目的函数の一次式の最適化（最大化または最小化）を問題にするが、実際には目的函数、あるいは制約条件、あるいはそれら両者が一次式としてはあらわされ得ない場合にしばしば直面する。ノンリニア・プログラミングはこのような場合の目的函数の最適化を問題にする。この場合、変数に非負性の制約がなく、且つまた制約条件が等式で与えられるものとすると、ラグランジュ乗数法の適用で簡単に問題は処理され、ノンリニア・プログラミング独自の新しい問題は何らおこらない。しかし、そうでない場合にはラグランジュ乗数法の直接的適用は不可能になる。このような場合の問題の理論的解決の緒口となったのが Kuhn, H. W. and A. W. Tucker [14] の研究である。これによって、ノンリニア・プログラミングの問題と鞍点問題との関係が明らかになり、最適解のもつ性質が明らかになった。その後、ノンリニア・プログラミングの研究がさかんに行なわれつつある。

以下、われわれは本稿において、理論的視点から（したがって、実際的見地からはより重要な algorithm については殆んど言及しない）、最近のノンリニア・プログラミングについて展望することにしよう。

二　一般的ノンリニア・プログラミング

本節では一般的なノンリニア・プログラミングの最適解の性質を吟味する。$x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$ とし、$g(x)$, $f(x)=(f_1(x), f_2(x), \cdots\cdots, f_m(x))$ をいずれも x に関して微分可能な函数とすると、ノンリニア・プログラミングは一般的に次のように定式化される。[1]

問題A　$g(x)$ を制約条件 $f(x)\geqq 0$, $x\geqq 0$ のもとで最大にせよ。

この問題を直接考える前に、$\phi(x, u)$, $x=(x_1, x_2, \cdots\cdots, x_n)$, $u=(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_m)$ を x 及び u に関して微分可能な函数、ϕ_x^0, ϕ_u^0 を $x=x^0$, $u=u^0$ としたときの ϕ の x 及び u に関する偏微係数ベクトルとして、

問題B　$\phi(x, u^0)\leqq\phi(x^0, u^0)\leqq\phi(x^0, u)$ for all $x\geqq 0$, $u\geqq 0$ を満足する非負ベクトル x^0 及び u^0 を求めよ。

という問題を考えよう。この所謂鞍点問題については次の定理

が成立することが簡単に証明される。

定理1　$\phi_x^0 \leqq 0, \quad \phi_x^{0\prime} x^0 = 0, \quad x^0 \geqq 0$　（1）

$\phi^0_u \geqq 0, \quad \phi_u^{0\prime} u^0 = 0. \quad u^0 \geqq 0$　（2）

は点 (x^0, u^0) が鞍点であるための必要条件である。

定理2　（1），（2）及び次の二式

$$\phi(x, u^0) \leqq \phi(x^0, u^0) + \phi_x^{0\prime}(x - x^0) \qquad \text{for all } x \geqq 0 \tag{3}$$

$$\phi(x^0, u) \geqq \phi(x^0, u^0) + \phi_u^{0\prime}(u - u^0) \qquad \text{for all } u \geqq 0 \tag{4}$$

の同時的成立が点 (x^0, u^0) が鞍点であるための十分条件である。

さらに，最適解の性質を導くために，Kuhn, H. W. and A. W. Tucker〔14〕の所謂 Constraint Qualification を仮定する。

Kuhn-Tucker の Constraint Qualification の仮定，最適点 x^0 において制約条件のあるものが等号で満たされるものとし，例えば，$f_1(x^0) = f_2(x^0) = \cdots\cdots = f_k(x^0) = x_1^0 = \cdots\cdots = x_l^0 = 0$ とする。このとき，点 x^0 における微小変動はつねに他の制約条件を満たし，かつ

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_j^0}{\partial x_i} dx_i \geqq 0, \qquad j = 1, 2, \cdots\cdots, k$$

$$dx_i \geqq 0, \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, l$$

をも満足する。

$g(x)$ 及び $f(x)$ がいずれも x に関して concave である場合に（次節参照），Constraint Qualification に代る仮定が Slater, M. [16] 及び Karlin, S. [11] によって考えられている。これら二つの仮定は同値である。(2)

Slater の仮定，$f(x^*) > 0$ となるあるベクトル $x^* \geqq 0$ が存在する。

Karlin の仮定，任意の $u = (u_1, u_2, \cdots\cdots, u_m) \geqq 0$ に対し，$u' f(x^{**}) > 0$ となるあるベクトル $x^{**} \geqq 0$ が存在する。

さて，つぎに，Constraint Qualification を仮定して，ノンリニア・プログラミングの理論で最も基本的な Kuhn-Tucker の定理を述べよう。ただし，

$$\phi(x, u) = g(x) + u' f(x). \quad x \geqq 0, \ u \geqq 0$$

とする。（以下，$\phi(x, u)$ はつねに右式で定義される。）

定理3　x^0 が問題Aの最適解であるためには，x^0 及びある $u^0 \geqq 0$ に対して（1），（2）が成立することが必要であり，x^0 及びある $u^0 \geqq 0$ が（1）（2）及び（3）を満たすことが x^0 が最適解であるための十分条件である。

証明　必要性，最適解が制約条件を全て不等号で満たすときは，

$$\frac{\partial g^0}{\partial x_i} = 0, \qquad i = 1, 2, \cdots\cdots, n$$

であるから，$u^0 = 0$ とするとよい。ただし，$\frac{\partial g^0}{\partial x_i}$ は $x = x^0$ での $g(x)$ の x_i に関する偏微係数をあらわす。

つぎに，制約条件のあるものが等号で満たされる場合を考える。Constraint Qualification の仮定より，

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial f_j{}^0}{\partial x_i}\,dx_i\geqq 0,\qquad j=1,\cdots\cdots,k$$

$$dx_i\geqq 0,\qquad i=1,\cdots\cdots,l$$

に対して，

$$-\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial g^0}{\partial x_i}\,dx_i\geqq 0$$

でなければならない。したがって，周知の Farkas の定理より，

$$-\frac{\partial g^0}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{k}u_j{}^0\,\frac{\partial f_j{}^0}{\partial x_i}+z_i{}^0,\qquad i=1,\cdots\cdots,n$$

$$u_j{}^0\geqq 0,\qquad j=1,\cdots\cdots,k$$

$$z_i{}^0\geqq 0,\qquad i=1,\cdots\cdots,l$$

$$z_i{}^0=0,\qquad i=l+1,\cdots\cdots,n$$

となり，$u_j{}^0=0,\quad j=k+1,\cdots\cdots,m$ とすると，

$$-\frac{\partial g^0}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{m}u_j{}^0\,\frac{\partial f_j{}^0}{\partial x_i}+z_i{}^0.\qquad i=1,\cdots\cdots,n$$

これより，

$$\phi x_i{}^0=\frac{\partial g^0}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}u_j{}^0\,\frac{\partial f_j{}^0}{\partial x_i}=-z_i{}^0\leqq 0.\qquad i=1,\cdots\cdots,n$$

さらに，$x_i{}^0=0,\ i=1,\cdots\cdots,l,\ z_i{}^0=0,\ i=l+1,\cdots\cdots,n$ を考慮すると，

$$\phi_x{}^{0\prime}x^0=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial g^0}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{m}u_j{}^0\,\frac{\partial f_j{}^0}{\partial x_i}\right)x_i{}^0=-\sum_{i=1}^{n}x_i{}^0z_i{}^0=0$$

即ち，（1）が成り立つ。また，$f_i(x^0)=0,\ i=1,\cdots\cdots,k\ \ u_j{}^0=0,\ j=k+1,\cdots\cdots,m$ より，

$$\phi_u{}^{0\prime}u^0=f(x^0)'u^0=0$$

となり（2）が満たされる。

十分性，（3），（1）及び（2）より，

$$g(x)+u^{0\prime}f(x)=\phi(x,\ u^0)\leqq\phi(x^0,\ u^0)+\phi_x{}^{0\prime}(x-x^0)$$

$$\leqq\phi(x^0,\ u^0)=g(x^0)+u^{0\prime}f(x^0)=g(x^0).$$

よって，$u^{0\prime}f(x)\geqq 0$ を考慮して，

$$g(x)\leqq g(x^0).$$

III Concave Programming

3・1 Concave Programming

われわれはこれまでは，$g(x)$ 及び $f(x)$ の形を何ら特定せず議論してきたが，本節ではそれらが x に関して concave である場合——即ち，concave programming——を問題にする。ここに，$x=(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ の函数 $h(x)$ が x に関して concave であるとは，定義域内の相異なる任意の二点 x^1,x^2 に対して，

$$h[\theta x^1+(1-\theta)x^2]\geqq\theta h(x^1)+(1-\theta)h(x^2),\qquad 0\leqq\theta\leqq 1$$

が成立する場合をいう。($0<\theta<1$ のとき右の式が不等号で成立する場合は strictly concave.) また，$-h(x)$ が concave (strictly concave) であるとき，$h(x)$ は convex (strictly convex) であるといわれる。

concave programming は問題Aの $g(x)$ 及び $f(x)$ がいずれも x に関して concave である場合である。(これとは対称的に，convex programming は一般的に次のように定式

化される。$g(x)$, $f(x)$ を x に関して convex であるとして，$f(x)\leqq 0$, $x\geqq 0$ のもとで $g(x)$ を最小にせよ。なお，Vajda, S., [20], Dantzig, G. B., [7] を見よ。）

$h(x)$ を任意の concave function とすると，定義より，

$$h(x^1)\leqq h(x^2)+\frac{1}{\theta}\{h[x^2+\theta(x^1-x^2)]-h(x^2)\},\qquad 0<\theta\leqq 1$$

であるから，h_{x^2} を $h(x)$ の $x=x^2$ での偏微係数ベクトルとすると，

$$h(x^1)\leqq h(x^2)+h_{x^2}'(x^1-x^2) \tag{5}$$

が成り立つことに注意する。

さらに，Constraint Qualification を仮定するか，Slater の仮定，または Karlin の仮定を設ける。このとき次の定理が得られる。

定理4　x^0 が concave programming の最適解であるためには（1）及び（2）が成り立つことが必要且つ十分である。(3)

証明，この場合，条件（3）が満たされることのみをいうとよい。

$g(x)$, $f(x)$ の concavity より，

$$g(x)\leqq g(x^0)+g_{x^0}'(x-x^0)$$

$$f_i(x)\leqq f_i(x^0)+f_i^{0\prime}(x-x^0),\quad i=1,\cdots\cdots,m$$

が任意の $x\geqq 0$ についていえるから，$u^0\geqq 0$ について，

$$\begin{aligned}\phi(x,\ u^0)&=g(x)+u^{0\prime}f(x)\\&\leqq g(x^0)+u^{0\prime}f(x^0)+(g_{x^0}'+u^{0\prime}f_{x^0})(x-x^0)\\&=\phi(x^0,\ u^0)+\phi_{x^0}'(x-x^0)\end{aligned}$$

となり（3）が成立する。

ところで，$\phi(x,\ u)$ は u に関して1次であるから，

$$\phi(x^0,\ u)=\phi(x^0,\ u^0)+\phi_{u^0}'(u-u^0)$$

であり鞍点の十分条件の一つである条件（4）はつねに満たされる。よって，定理4は次のようにいいかえられる。

定理4′　x^0 が concave programming の最適解であるためには，適当な $u^0\geqq 0$ が存在して，$(x^0,\ u^0)$ が

$$\phi(x,u)=g(x)+u'f(x),\qquad x\geqq 0,\ u\geqq 0$$

の鞍点となることが必要且つ十分である。(4)

ここで注意すべきことがある。それは $x\geqq 0$ 以外の制約条件のあるものが等式であたえられ，Slater の仮定，または Karlin のそれが満たされぬ場合である。この場合，定理4′はUzawa, H. (Arrow, Hurwicz, and Uzawa [2, pp. 35—37]) によって次のように修正される。

定理4″　concave programming において，$f_i(x)$, $i\in I\subset\{1,2,\cdots\cdots,m\}$ が x について一次で，且つそれに対応する制約条件は等式で与えられるものとする。さらに，任意の $i(i=1,\cdots\cdots,n)$ について $x_i^i>0$(x_i^i はベクトル x^i の第 i 成分）となる feasible vector があるものとする。このとき，x^0 が最適解となるための必要十分条件は $x\geqq 0$, $u_{\mathrm{II}}\geqq 0$（すなわち，$u_k\geqq 0$, $k\in\mathrm{II}=\{1,\cdots\cdots,m\}-\mathrm{I}$）に対して，$(x^0,\ u^0)$ が $\phi(x,\ u)$ の鞍点となることである。

3・2　Quadratic Programming

Quadratic programming は最も一般的には，$g(x), f(x)$ がいずれも二次式で与えられる場合の concave programming または convex programming をいう。これらの場合，$g(x)$, $f(x)$ の二次の項はいずれも negative (semi-) definite であるか，または positive (semi-) definite である。最適解については，concave programming または convex programming の定理が適用される。しかし，実際には，このように一般的な形で quadratic programming はとりあげられず，$f(x)$ が一次の場合が問題にされ，且つそれらについて，case by case に能率的な algorithm が考案されている。たとえば，Houthakker, H. [10] のキャパシティ法 capacity method，リニア・プログラミングのシンプレックス法を修正した Wolfe, P. [21] 等である。

なお，Bellman, R., and S. Dreyfus [6, Appendix] は parametric programming の手法を適用して，strictly concave quadratic programming の最適解の必要条件を導出している。(しかし，この場合，Kuhn-Tucker の条件の1つの(2)の一部が見失なわれていることに注意。)

3・3 Stochastic programming

Kataoka, S., [12] にしたがって，次の一見リニアな stochastic programming を考えてみよう。

問題C $P_r(c'x \leqq p)=\alpha$

$$P_r\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqq b_i\right) \geqq \beta_i. \qquad i=1,\cdots\cdots,m$$

$$x \geqq 0$$

のもとで，スカラー p を最大にせよ。

ここで，確率変数 b_i は平均 $\bar{b}_i$，分散 $\sigma_{b_i}^2$ の正規分布をし，確率変数 $c=(c_1,\cdots\cdots,c_n)$ は平均 $\bar{c}=(\bar{c}_1,\cdots\cdots,\bar{c}_n)$，分散—共分散行列 $V=[v_{ij}]$ の n 次元正規分布をするものと仮定する。さらに，

$$G(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^{\infty} e^{-y^2/2}dy$$

$$I(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-y^2/2}dy$$

とする。このとき，$\sqrt{x'Vx}$ はconvex になるから $\alpha \leqq 0.5$ (即ち，$I^{-1}(\alpha) \leqq 0$) と仮定すると，問題Cは次のような concave programming に転換される。

問題C' concave function $g(x)=\bar{c}'x-k\sqrt{x'Vx}$ を条件，

$$f(x)=b^*-Ax \geqq 0,\ x \geqq 0$$

のもとで最大にせよ。ただし，

$$b_i^*=\bar{b}_i-q_i\sigma_{b_i}. \qquad i=1,\cdots\cdots,m$$

$$k=-I^{-1}(\alpha) \geqq 0,\ q_i=-G^{-1}(\beta_i), \qquad i=1,\cdots\cdots,m$$

$$A=[a_{ij}]$$

したがって，最適解については，concave programming の定理が適用される。なお，Kataoka, S., [12] は補助的なリニア・プログラミングを出発点とした二つの計算法（逐次解法と補間法）を与えている。

3・4 Linear Programming

リニア・プログラミングの最大問題（これは concave programming）の特別な場合）及びその双対問題（これは convex programming の特別の場合）は周知の如く，それぞれ次のように定式化される。

問題D　$g(x)=c'x$ を $f(x)=b-Ax\geqq 0$, $x\geqq 0$ のもとで最大にせよ。

問題D′（問題 D の dual). $g(x)=-b'u$ を $f(x)=A'u-c\geqq 0$, $u\geqq 0$ のもとで最大にせよ。

前者については，

$$\phi(x,\ u)=c'x+u'(b-Ax),\ x\geqq 0,\ u\geqq 0$$

であり，後者の場合，

$$\phi(x,\ u)=-b'u-x'(c-A'x),\ x\geqq 0,\ u\geqq 0$$

で前者の場合と符号のみが異なる。したがって，次の定理が簡単に導かれる。

定理5　問題 D 及び問題 D′ の最適解はそれぞれ，$\phi(x,u)=c'x+u'(b-Ax)$, $x\geqq 0, u\geqq 0$ の鞍点 $(x^0,\ u^0)$ の x^0 及び u^0 に等しい。

なお，ノンリニア・プログラミングの定理を適用しないでも直接右の定理が導かれる。Goldman, A. J., and. A. W. Tucker, [9] を見よ。

また，問題Dはつぎのような strictly concave quadratic programming に equivalent なことが Uzawa, H. (Arrow, Hurwicz, and Uzawa[2, pp. 163—4]) によって明らかにされている。

問題D″　ε を十分小なる正数として，

$$f(x)=b-Ax\geqq 0,\qquad x\geqq 0$$

の条件のもとで，

$$g(x)=c'x-\frac{1}{2}\varepsilon x'x$$

を最大にせよ。

四　Quasi-concave Programming

concave programming より一般的なものに，Arrow, K. J., and A. C. Enthoven. [4] による quasi concave programming がある。これは問題Aの $g(x)$ 及び $f(x)$ がいずれも，x に関して quasi-concave である場合をいう。

ここに，x のある函数 $h(x)$ が quasi-concave であることは，α を任意の実数とするとき，

$$h(x)\geqq\alpha$$

なる x が凸集合をなす場合をいう。即ち，$h(x)$ が quasi-concave であるとき，任意の二点を x^1, x^2 とし，

$$h(x^1)\geqq h(x^2) \text{ とすると } h[\theta x^1+(1-\theta)x^2]\geqq h(x^2),\quad 0\leqq\theta\leqq 1. \qquad (6)$$

が成り立つ。このことはまた，

$$h[\theta x^1+(1-\theta)x^2]\geqq \min[h(x^1),h(x^2)] \qquad (6)'$$

とも書かれる。

さらに，

$$H(\theta)=h[\theta x^1+(1-\theta)x^2]\geqq h(x^2)=H(0)$$

とすると、$H'(0)\geqq 0$ であるから、$H(\theta)$ を θ について微分し $\theta=0$ とすると、

$$h(x^1)\geqq h(x^2) \text{ のとき } h_{x_i}'(x^1-x^2)\geqq 0 \qquad (6)$$

がいえる。これらの関係より、concave function は全て quasi-concave であることが直ちにいえる。しかし、その逆は必らずしもいえない。したがって、quati-concavity は concavity よりも一般的な性質である。

つぎに、$h(x)$ を任意の quasi-concave function とし、φ をその任意の単調非減少変換とすると、

$$h(x^1)\geqq h(x^2) \text{ のとき } \varphi[h(x^1)]\geqq\varphi[h(x^2)]$$

であるから、

$$\varphi\{h[\theta x^1+(1-\theta)x^2]\}\geqq\varphi\{\min[h(x^1),h(x^2)]\}$$

がいえる。ここに、

$$\varphi\{\min[h(x^1),h(x^2)]\}=\min\{\varphi[h(x^1)],\varphi[h(x^2)]\}$$

であるから、$\varphi[h(x)]$ も quasi-concave である。

quasi-concavity については、さらに次の著しい性質がある。ただし、

$$D_r=\begin{vmatrix} 0 & h_{x_1}\cdots\cdots & h_{x_r} \\ h_{x_1} & h_{x_1x_1}\cdots\cdots & h_{x_1x_r} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ h_{x_r} & h_{x_rx_1}\cdots\cdots & h_{x_rx_r} \end{vmatrix}$$

$$h_{x_i}=\frac{\partial h}{\partial x_i}$$

$$h_{x_ix_j}=\frac{\partial^2 h}{\partial x_i\partial x_j}$$

定理6　$h(x)$ が quasi-concave のとき、任意の x 及び $r=1,\cdots\cdots,n$ について、

$$(-1)^r D_r\geqq 0$$

となる。また、$h(x)$ が $x\geqq 0$ について quasi-concave であるためには、任意の x 及び $r=1,\cdots\cdots,n$ について、

$$\operatorname{sgn} D_r=\operatorname{sgn}(-1)^r$$

となることが十分である。

さて、制約条件 $f(x)\geqq 0$, $x\geqq 0$, を満足するあるベクトル x^* の例えば第 i 成分 x_i^* が正となり得るとき、x の第 i 成分 x_i を relevant variable と定義しよう。quasi-concave programming の最適解の十分条件は次の定理で与えられる。

定理7　x^0 が quasi-concave programming の最適解であるためには、x^0, u^0 が（1），（2）を満たし、さらに、

(イ) 少なくとも一つの x_i^0 について $g_{x_i}^0<0$

(ロ) ある relevant variable について、$g_{x_i}^0>0$

(ハ) $g_x^0\neq 0$、且つ $g(x)$ は x^0 の近傍で二階微分可能

(ニ) $g(x)$ は concave

のいずれかがいえることが十分である。

証明、(イ)のみ証明。まず、任意の feasible vector x^1 をとると

$$g_x^{0\prime}(x^1-x^0)\leqq 0 \qquad (7)$$

となることに注意する。[5] つぎに、

$$e=(\underbrace{0,\cdots\cdots,\ 0,\ 1}_{i},\ 0,\cdots\cdots,0)$$

$$x^2=x^0+e$$

$$x^1(\theta)=(1-\theta)x^1+\theta x^2$$

$$x^0(\theta)=(1-\theta)x^0+\theta x^2$$

とすると、

$$g_x^{0\prime}(x^2-x^0)=g_x^{0\prime}e=g_{x_i}{}^0<0,\ x^2\geqq 0$$

$$g_x^{0\prime}[x^0(\theta)-x^0]=\theta g_x^{0\prime}(x^2-x^0)<0,\quad \theta>0$$

$$g_x^{0\prime}[x^1(\theta)-x^0(\theta)]=(1-\theta)g_x^{0\prime}(x^1-x^0)\leqq 0,\quad \theta\leqq 1$$

$$g_x^{0\prime}[x^1(\theta)-x^0]<0,\quad 0<\theta\leqq 1$$

であるから、$g(x)$ の quasi-concavity を考慮すると、$g[x^1(\theta)]<g(x^0)$ となり、

$$\lim_{\theta\to 0} g[x^1(\theta)]=g(x^1)\leqq g(x^0)$$

五　その他の諸問題――結びにかえて――

以上、われわれはノンリニア・プログラミングの理論的展望を行なったが、当然とりあぐべきもので紙数の制約上省略せざるを得なかったものがある。その第一は、目的函数が vector valued function の場合（Kuhn, H. W. and A. W. Tucker [14]. Karlin, S. [11]）である。つぎは、その vector valued function の最小成分を最大にする問題（Kuhn, H. W. and A. W. Tucrer [14]）である。Hurwicz. L.（Arrow, et al. [2, Chap. 4]）の線型位相空間への理論的拡張も注目さるべきである。

鞍点の求め方にはグラディエント法 gradient method がある。これについての研究を集大成したのが、Arrow, et al. [2] である。

ノンリニア・プログラミングの理論の経済的適用については、Chenery, H. and H. Uzawa (Arrow, et al. [2, Chap. 15]) の後進国開発問題への適用 Uzawa, H. [18] 及び Reiter, S. [15] の国際貿易論における要素価格均等化命題への適用等が注目さるべきである。Dynamic Programming も重要である。これについては「ポントリャーギンの最大値原理」を包括的にとりあつかった Pontryagin. L. S. et al. [22] は最も注目さるべきである。

（1）（　）は列ベクトル、ダッシュは転置をあらわす。ベクトルの不等関係の表示は通常の用法にしたがう。

（2） cf. Karlin, S. [11. p. 239. Problem 12]. Arrow, et al. [2, pp. 109—110].

（3） Convex Programming の最適解の必要十分条件は $\phi(x,\ u)=-g(x)-u'f(x),\ x\geqq 0,\ u\geqq 0$ として、条件（1），（2）より得られる。

（4） $\phi(x,\ u)$ が x に関し strictly concave で u に関し convex である場合には、鞍点 $(x^0,\ u^0)$ の x^0 は一義的に定まる。この点は、グラディエント法により鞍点への収束を問題にするとき重要な意味をもつ。

（5） concave pragramming において x^0 が最適解である

ための必要十分条件は x^0 が $f(x)\geqq 0$, $x\geqq 0$ のもとで $g_x{}^{0\prime}x$ を最大にすることである（即ち，$gx^{0\prime}(x-x^0)\leqq 0$）ことがいえる。Karlin, S. [11. p. 237, Problem 2] 参照。(7) の証明については Arrow, K. J. and A. C. Enthoven [4, p. 784] を見よ。

参考文献

〔1〕 Arrow, K. J. and. L. Hurwicz, "Reduction of Constrained Maxima to Saddle-Point Problems" in Neyman, J. (ed.), *Proceedings of the Third Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1956. Vol. V. 1—20.

〔2〕 Arrow, K. J., L. Hurwicz, and H. Uzawa, *Studies in Linear and Non-Linear Programming*, Stanford, Stanford University Press, 1958.

〔3〕 Arrow, K. J. and L. Hurwicz, "Decentralization and Computation in Resource Allocation" in R. W. Pfouts (ed.), *Essays in Economics and Econometrics*, A Volume in Honor of H. Hotelling, Chapel-Hill, University of North Carolina Press, 1960, 34—104.

〔4〕 Arrow, K. J. and A. C. Enthoven, "Quasi-Concave Programming," *Econometrica*, 29 (1961), 779—800.

〔5〕 Arrow, K. J., L. Hurwicz, and H. Uzawa, "Constraint Qualifications in Maximization Problems, *Naval Research Logistics Quarterly*, 1962.

〔6〕 Bellman, R. and S. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming*, Princeton, Princeton University Press, 1962.

〔7〕 Dantzig, G. B. "General Convex Objective Forms" in Arrow, K. J., S. Karlin, and P. Suppes (ed.), *Mathematical Methods in the Social Sciences*, Stanford, Stanford University Press, 1960, 151—158.

〔8〕 Fenchel, W., *Convex Cones, Sets and Functions*, Princeton University, 1963, mimeographed.

〔9〕 Goldman, A. J. and A. W. Tucker, "Theory of Linear Programming" in Kuhn, H. W. and A. W. Tucker (ed.), *Linear Inequalities and Related Systems*. Princeton, Princeton University Press, 1956, 53—97.

〔10〕 Houthakker, H. S., "The Capacity Method of Quadratic Programming," *Econometrica*, 28 (1960), 62—87.

〔11〕 Karlin, S., *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*, Vol. 1 (esp. Chap. 7), Reading, Addison-Wesley Publishing Co. Inc., 1959.

〔12〕 Kataoka, S., "A Stochastic Programming Model," *Econometrica*, 31 (1963), 181—196.

〔13〕 Kose, T., "Solutions of Saddle Value Problems by Differential Equations," *Econometrica*, 24 (1956), 59—70.

〔14〕 Kuhn, H. W. and. A. W. Tucker, "Nonlinear Programming," in Neyman, J. (ed.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1951, 481—92.

〔15〕 Reiter, S., "Efficient International Trade and Equalization of Factor Prices," *International Economic Review*, 2 (1961), 29—64.

〔16〕 Slater, M., "Lagrange Multipliers Revisited: A Contribution to Non-Linear Programming," *Cowles Commigsion Discussion Paper*, 1950. (筆者未見)

〔17〕 Tompkins, C. B., "Methods of Steep Descent," in Beckenbach, E. F., (ed.) *Modern Mathematics for the Engineer*, New York, McGraw-Hill, 1956, 448—79.

〔18〕 Uzawa, H., "Prices of the Factors of Production in International Trade," *Econometrica*, 27 (1959), 448—468.

〔19〕 Uzawa, H., "Market Mechanisms and Mathematical Programming," *Econometrica*, 28 (1860), 872—881.

〔20〕 Vajda, S., "*Mathematical Programming* (esp. Chap. 12), Reading; Addison-Wesley Publishing Co., Inc., 1961.

〔21〕 Wolfe, P. "The Simplex Method for Quadratic Programming," *Econometrica*, 27 (1959), 382—398.

〔22〕 Pontryagin, L. S., V. G. Boltyanskii, R. V. Gamkrelidze and E. F. Mishchenko, *The Mathematical Theory of Optimal Processes*, New York, Interscience Publishers, 1961.

(一橋大学大学院学生)