書評

Lajos Takács, Introduction to the Theory of Queues

Oxford University Press, New York, 1962, x, 268 p. 21 cm.

磯野修

一

待合せ理論というのは、電話交換の問題から出発し、最近特に著しい発展を示している統計学の一分野である。たとえば自動式でない長距離電話を局に申込む場合を考える。ある時間内の通話申込みは、多数の電話加入者から at random に生じてくる。回線に空きがあれば直ちに通話できるが、空きがなければ、現在通話中の電話と、自分よりも先に申込んで未だ通話できずに待っている人たちの電話がすむ迄待たなければならない。この場合待たされる時間は、何人が通話を待っているか、また各々の通話にどれ位の時間を要するかによって変ってくる。電話加入者の側から見れば、申込んでから実際に通話できるまでの待時間が長いのは困る。電話局にとっては、常に多数の人が通話できずに待っているならば設備を拡張しなければならないが、あまりに回線を多くしすぎると回線の空き時間がふえて不経済である。仮に通話の申込みが極めて規則的に一定の時間間隔をおいて発生し、通話に要する時間もまた一定であるならば、問題は簡単に確定論的に解くことができる。しかし申込みは at random に生じ、各々の通話の長さも長短まちまちであるから、通話申込みの発生と通話時間との二つについて適当な前提条件を設けて確率論的数学モデルを構成し、それによって分析を進めなければならない。これは理論経済学でいうモデル・ビルディングに該当する分析手続きである。そして問題の前提条件から明らかなように、ある時点での待機人数が何人であるというような確定的な答が得られるのではなく、ある時点で何人待っている確率はどれ位であるかという確率論的な答がなされる。待時間について言えば、ある時点で申込んだとき何分以上待つ確率はいくらであるかという答が得られる。そして右の確率値は観察時点と共に変化し、時間の函数となるのが一般である。しかし問題の前提条件が或る条件を満す場合には、十分長い時間の経過後は、それらの確率値は一定値に収束して、いわば統計的均衡状態が実現される。そこでは待機人数の分布函数も、待時間の分布函数も一定状態に落着いて時間の影響を受けない。再び理論経済学の例で言うならば、経済成長モデルが時間の経過と共に一定の均衡成長率に収束するというようなものである。

電話交換の例だけを見ると、待合せ理論は極めて特殊なケースにしか利用できないように思われるであろう。しかし、その分析に用いた抽象的な数学モデルは、それと類似の前提条件が

満たされる場合には常に応用可能である。事実、電話交換に関して作られたモデルの前提条件を適当に修正し、そこで用いられた数学的分析手段を活用することによって、待合せ理論は、飛行場での航空機発着・道路上の自動車交通・在庫管理・機械修理・窓口やガソリンスタンド・食堂での顧客サービス等々に応用され、それ故にこそ急速な発展がもたらされている。ただ右の諸例からも明らかなように、理論展開の道程がいずれも具体的な問題と結びついているだけに、個々の論文が極めて広い範囲にわたる各種雑誌に発表されていて、それらを展望することは容易ではない。また実際問題に即して理論モデルをこしらえるために、いろいろと前提条件が変わるたびに結果が異なってきて、見通しのよい統一的取扱いを重んずる理論家からは疎んぜられる傾向にある。事実、各種のケースを列挙した、

Philip M. Morse,
Queues, Inventories and Maintenance, The Analysis of Operational Systems with Variable Demand and Supply. Wiley, New York, c. 1958, ix, 202 p. 23 cm,

宮脇一男・長岡崇雄・毛利悦造共著、
待合せ理論とその応用、日刊工業新聞社、東京、一九六一年、二五八頁、二一糎、

の二著は、各所に発表された結果をまとめて示している点で百科辞典的な利点はあるが、これを通読するとなると、かなりの抵抗を感ぜざるを得ない。それに比較すると Methuen's Monographs on Statistical Subjects の一冊として刊行された、

D. R. Cox and Welter L. Smith,
Queues, Methuen, London and Wiley, New York, c. 1961, xii, 180 p. 19 cm.

は、待合せ理論全般を展望し、基本的な場合について考え方や使用される数学的手法を述べ、著者の得た新しい結果も紹介されているという点で、極めて勝れた入門書であるが、入門書という性格上複雑なケースの取扱いはできないし、用いられている命題の証明も省略されている所がある。殊に最近の理論的興味の中心は、十分長い時間経過の後に到達される終局的な統計的均衡状態の分析よりも、それに至るまでの中間期間の任意時点における系の状態の解明におかれ、それを用いての実際的研究としては、たとえばラッシュ・アワー開始後および終了後の分析が意図されている。しかし Cox and Smith の本で経過分析として紹介しているのは、単一サーヴァー・ポアソン入力・指数サービス時間という最も簡単なケースただ一つに過ぎない。その意味でも右の書物よりも、いま一歩進んだ解説書が望まれるところであるが、そうした要望に答えるものが、ここに紹介しようとする Takács の本である。

二

本書の特色は、任意時点 t における系の分析に力点をおき、終局的な統計的均衡状態は――もし、それが存在するならば――t を限りなく大きくしたときに生ずるケースとして導き出している点にある。もっとも待合せ理論のすべてのケースについ

て経過分析の問題が解かれているわけではないから、こうした取扱いが許される範囲もおのずから限定されてくる。どのようなケースが分析の対象になっているかを述べるには、待合せ理論の用語について若干の解説をしておく必要がある。

電話交換の例ならば回線の数、窓口サービスならば窓口の数を、サーヴァー server の数という。電話の通話または窓口での受付がサービスの提供ということになる。最も簡単なケースは言うまでもなくサーヴァーの数1の場合である。実際にはサーヴァーの数は常に有限であるが、十分に多数のサーヴァーを用意しておいて、申込みと同時にいつでも少しも待たせずにサービスを提供できるならば、サーヴァーの数を無限大として分析を進めることができる。

次に電話の申込み又は窓口への顧客の到着を入力 input と呼ぶ。入力の起る時点すなわち顧客の到着時点を順次に $\tau_1, \tau_2, \ldots\ldots, \tau_n, \ldots\ldots$ で示し、顧客はすべて到着順にサービスを受けると考える。$\tau_{n+1}-\tau_n$ は、n 番目の客が来てから次の客が来るまでの時間間隔であって、これを到着間隔と言い θ_n で示す。また n 番目の客のサービスに要する時間を χ_n とする。さきに述べたように、分析を始めるためには入力とサービス時間とについて適当な前提を設けなければならない。通常、θ_n も χ_n も n に無関係な一定の分布函数に従い、θ と χ とは互に独立とする。実際上は場合によっては待機人数が増すとサーヴァーが能率をあげる傾向[1]があるから、この前提は近似的にしか成立しないこともある。

$$P(\theta_n \leqq x)=F(x), \qquad P(\chi_n \leqq x)=H(x)$$

という二つの分布函数と、サーヴァーの数とが決まれば系の性格は規定される。ただ細かいことを言えば、初期時点から第一番目の客の到着までの時間間隔 τ_1 の分布は $F(x)$ と同じとは限らない。両者が相違すれば τ_1 の分布函数を別個に想定して、これだけを特別扱いしなければならないことが起る。そこで問題によっては、初期時点の直前に一つの到着があったものと考えて、τ_1 の分布も $F(x)$ と同じと仮定した方が取扱いに便利である。このような入力をパルム入力という。

さきに待合せ理論の最も基本的なケースは、単一サーヴァー・ポアソン入力・指数サービス時間であると言ったが、入力がポアソン型というのは、一定時間内に到着する顧客数がポアソン分布に従うことを意味し、このとき到着間隔は指数分布 $F(x)=1-e^{-\lambda x}, (\lambda>0)$ となる。また指数サービス時間というのは、サービス所要時間が指数分布 $H(x)=1-e^{-\mu x}, (\mu>0)$ であることを意味する。ポアソン分布と指数分布との間にはポアソン入力について右に述べたような密接な関係があり、指数分布の Laplace-Stiltjes 変換（以下LS変換と略記する）は、たとえばポアソン入力のとき

$$\int_0^\infty e^{-sx}\,dF(x)=\frac{\lambda}{s+\lambda}, \quad (R(s)>0)$$

と極めて簡単な形になる。ポアソン入力・指数サービス時間が基本的ケースと見做される理由としては、右のような数学的操作の容易さということのほかに、入力やサービス時間がこの前

提を満す場合が実際上かなり多いこと、入力については、理論的に、互に独立な微小入力の合成は或る条件のもとでポアソン型になるという極限定理の存在することが挙げられる。この定理は、正規分布の理論的基礎づけとして中心極限定理があるのと同じような意味を持っている。(2)

以上に述べたサーヴァーの数・入力およびサービス時間についての諸条件が決まると、第n番目の客がサービスを終って系を出て行く時点――これを出発時点と呼ぶ――をτ'_nとするとき、出発時点の系列または出力過程 τ'_1、τ'_2、……、τ'_n、…… についても、その確率論的性格が分ることになる。

このようにして規定された待合せ理論のモデルで、分析の対象になる主要特性は、待時間・仕事継続時間・行列長の三つである。

待時間 waiting time というのは、第n番目の客が到着してから実際にサービスを受ける迄その人が待たなければならない時間で、これをη_nで示す。このほかに、時点tで客が到着したとするならば、t時点に到着したその人が待たなければならない待時間 virtual waiting time を考えることができ、これを$\eta(t)$ と書く。むろん $\eta_n=\eta(\tau_n-0)$ である。$\eta(t)$ については、t時点以後に客が来ないと仮定した場合に、時点tでサービス中の客および待機中の客を片づけるに要する時間と解釈することもできる。著者はこれを occupation time と呼んでいるが、こゝでは仮に整理時間と訳しておこう。

仕事継続時間 busy period というのは、単一サーヴァーのケースにおいて、手あきのサーヴァーが仕事に着手してから、再び手あきになるまでの時間である。その分布函数 $G(x)$ が研究対象になるのは当然であるが、仕事継続時間中に丁度n人の客にサービスするという条件のもとでの仕事継続時間の分布函数 $G_n(x)$ も研究対象となる。サーヴァーが複数の場合に仕事継続時間に該当する概念は、i人のサーヴァーが働いている状態から他の状態へ移り、再びi人の状態に戻るまでの時間ということになるが、本書では仕事継続時間の分析は単一サーヴァーの場合に限定されている。

行列長 queue size というと、一見するところ待機している人数だけを意味するような印象を与えるが、実際は待機人数のほかに現にサービスを受けている人数をも加えた、系の中に含まれている人数合計のことである。任意時点tにおける行列長を $\xi(t)$ と書くが、このほかに、第n番目の客の到着直前の行列長 $\xi(\tau_n-0)=\xi_n$ や、第n番目の客の出発直後の行列長 $\xi(\tau'_n+0)=\xi'_n$、なども分析対象になる。後二者のうち、問題に応じていずれか一方の方が取扱いやすい。なお $P(\xi(t)=0)$ は、時点tでサーヴァーが手あき状態にある確率で、仕事時間分布函数と共に、系の能率を判定する上で大切な値である。

右に述べた諸特性値には、いずれも時点を示すt又は到着順位を示すnが記されており、中間的経過分析に関する値であることを明示している。常識的に考えると、入力すなわち顧客の到着がサービス能力を越えるならば、時間経過と共に行列長は次第に長くなり、待時間も仕事継続時間も限りなく大きくなる

ように思われる。また顧客の到着率がサービス能力以下ならば、何らか或る定常状態に落着くように感じられる。しかし、そうした直観を理論化するには、顧客の到着率やサービス能力を表わす指標を考えなければならないし、二つの指標が同一値をとる場合の系の状態は終局的にどうなるかという問題になると、単純な常識的判断ではどうにもならなくなる。顧客の到着率の尺度としては、到着間隔の平均値 $\int_0^\infty x dF(x)=\beta$ の逆数が、単位時間内に到着する平均人数を示している。サービス能力の尺度としては、サーヴァーの数 m と、サービス時間平均値 $\int_0^\infty x dH(x)=\alpha$ との比 m/α が、単位時間内のサービス能力を示している。$1/\beta$ と m/α との比、$\frac{\alpha}{m\beta}=\rho$ をトラフィック密度と名づけるが、さきの常識的判断によれば、ρ が1より大きければ終局的には顧客が系から溢れて収拾できなくなるであろうし、ρ が1より小さければ或る定常状態が存在するのではないか、ということになる。果してそうであるか否かは、系の前提条件、$F(x)$, $H(x)$, m に基づき、系の諸特性値の各々について吟味しなければならない。

三

待合せ理論についての解説がかなり長くなったが、以下では本書の内容を順次簡単に紹介して行く。はじめに本書の大体の構成を示すと、第一章（約百三十頁）が専ら単一サーヴァーのケースを扱い、第二章と第三章（合計約三十頁）で複数および無限数サーヴァーを論じ、第四章から第六章まで（合計約四十頁）が応用的諸理論ということになっている。頁数から分るように本書の主眼は単一サーヴァーのケースにおかれ、しかも第一章の前半が主要内容をなしていると考えても差支えない。その理由は以下で各章別の紹介を行うに従って明らかとなるであろう。

まず第一章では右に述べたように全章を通じて単一サーヴァーを前提し、第一節では単一サーヴァー・ポアソン入力・指数サービス時間の下で、待機のための収容能力が $N-1$ 人に限定されていて、これを越える到着人員はどこか他へ流れて行き、系に含まれる最大人員が N 人に限られているとき、$P(\xi(t)=k \mid \xi(0)=i)=P_{ik}(t)$（$i$ は非負の整数、k は非負で N を越えない整数）を計算する。t が限りなく大きくなるとき、常に $\lim_{t\to\infty} P_{ik}(t)=P_k^*$ が存在して極限分布を与え、その値は初期状態の如何に影響されない。

次に第二節では右に現われる N を限りなく大きくすることにより、行列長がいかほどでも大きくなり得る場合を取扱う。さきの $P_{ik}(t)$ の式に現われる N を $N\to\infty$ とすれば、任意時点 t における行列長の分布が求まる。時間についての極限状態については、$\rho=\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\mu}{\lambda}<1$ ならば、P_k^* の k に関する和は1で極限分布を与えるが、$\rho\geqq 1$ ならば任意の k に対して P_k^* はすべて0となる。この個所までは待機人員収容能力が有限の場合と無限の場合とを平行的に論じているが、以下ではすべて収容能力無限の場合だけを取扱う。

右に続いて同じく第二節では、顧客到着直前の行列長ξ_nについて、$P(\xi_{m+n}=k\mid\xi_m=i)=p_{ik}{}^{(n)}$ (m, n, i, k は非負の整数）の母函数 $\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}p_{ik}{}^{(n)}z^k w^n$ が計算される。初期状態の如何を問わず $\lim_{n\to\infty}p_{ik}{}^{(n)}$ はさきの $P_k{}^*$ と同じ値をとる。$\lim_{t\to\infty}P(\xi(t)=k)=\lim_{n\to\infty}P(\xi_n=k)$ という、この結果は直観的には当然のようであるが、後に述べるように前提条件によっては、これが成立しない場合もあることは注意を要する。

同じ節で仕事継続時間については、仕事継続時間がx又はそれ以下で、その時間内に丁度n人にサービスを行うという分布函数 $G_n(x)$ のＬＳ変換が求められる。サービス人数を考慮しない、単なる仕事継続時間の分布函数 $G(x)$ が計算されていることは言うまでもない。後者について言えば、$\rho\leqq 1$ のとき $G(\infty)=1$ で通常の意味の分布函数となるが、$\rho>1$ のときは $G(\infty)=\mu/\lambda$ で、仕事継続時間が無限大になる確率は $1-\frac{\mu}{\lambda}>0$ となる。このとき仕事継続時間の平均値は当然無限大であるが、$\rho\leqq 1$ でも、$\rho=1$ ならば平均値は無限大、$\rho<1$ のとき有限値 $1/(\mu-\lambda)$ になる。

待時間については、まず $P(\eta(t)\leqq x)$ なる分布函数が計算され、次に $P(\eta_n\leqq x)$ のＬＳ 変換 $E(e^{-s\eta_n})=\Omega_n(s)$ について、その母函数 $\sum_{n=1}^{\infty}\Omega_n(s)w^n$ を求めている。両者は共に初期状態の函数となる。なお上記の記号Eは数学的期待値を示す。初期状態の如何にかかわらず $\lim_{t\to\infty}P(\eta(t)\leqq x)$ および $\lim_{n\to\infty}P(\eta_n\leqq x)$ なる二つの極限値が存在して両者は相等しく、$\rho<1$ ならば、これらの極限値の和は１で極限分布を与え、$\rho\leqq 1$ ならば、それらの極限値はすべて０になる。

出発時点 $\tau_1', \tau_2', \ldots\ldots, \tau_n', \ldots\ldots$ については、単一サーヴァー・ポアソン入力・指数サービス時間のとき、入力と同じ平均値をもつポアソン過程になることが証明され、次の節で、単一サーヴァーの下で出力過程がポアソン型になるのは、ポアソン入力・指数サービス時間の場合に限ることが示されている。

以上に紹介した第一章二節が最も簡単な基本的ケースであって、あとはこれを次第に一般化して行くことになる。すなわち第一章第三節では、単一サーヴァー・ポアソン入力でサービス時間分布が一般型 $H(x)$ の場合、第四節は、これと同じ前提のもとで、サービスが集団的に行われる場合を扱う。これらの二節では第二節の行列長ξ_nに替えてξ'_nを論じているが、その際取扱いを簡単にするため、初期時点の直前 $t=-0$ で出発があったものと仮定する。第四章の集団サービスを本書では batch service と呼んでいるが、この型のサービスは group service または bulk service とも呼ばれ、Bailey, Downton[3] によって待合せ理論に取り入れられた問題である。ただし、これら両者では、サービスの生起する時点間の間隔が分布函数 $H(x)$ に従い、サービスの発生する時点での待機人数のうちb人（bは正の整数）までに対して同時にサービスを提供し得る場合（たとえばb人を収容できるバスが若干の遅速を伴いながら運行されている場合）を取扱い、待機人数がb人以下でも、それらの人々に対してサービスが為されると前提している。これに対して本書では、顧客の人数がb人に達するのを待って初めてこれ

を一群とするサービスを行い、そのサービス所要時間が分布函数 $H(x)$ に従うと前提する。さらに Bailey 等は、極限分布が存在する場合の極限状態の諸特性だけを研究しているが、本書ではそれに至る中間の任意時点に関する分析に力点がおかれている。第一章第一節から第三節までの議論の拡張として集団サービスを論ずるならば、Bailey 等の前提よりも本書の前提の方が適切であり、グループの大きさ b を1とすれば第四節の所論はすべて第三節と一致し、第三節でサービス時間分布 $H(x)$ を指数分布とすれば第二節の結果が出る。この意味では第二節・第三節を省略して直ちに第四節から始めても数学的には一向差支えないわけであるが、前提条件がより一般的となれば分析方法や推論は当然複雑になる。たとえば第二節では $P_{ik}(t)$, $P(\eta(t) \leqq x)$ などを直接に計算することができるが、第三節・第四節では前者のラプラス変換と後者の LS 変換を扱うようになる。

集団サービスの場合についても既述の各特性値について研究されているが、そこでは特性値の定義を若干変更する必要が生ずる。たとえば行列長 $\xi(t)$ は従来のままでよいが、ξ_n' の方は、τ_n' を第 n 番目の集団に対するサービス完了時点とし、ξ_n' はその時点直後の行列長とする。集団サービスの場合には一回のサービスで b 人を消化できるから、トラフイック密度の分母に b が現われて $\rho=\lambda\alpha/b$ となる。

$$\lim_{t\to\infty} P(\xi(t)=k)=P_k^*, \qquad \lim_{n\to\infty} P(\xi_n'=k)=P_k$$

なる二つの極限値は初期状態の如何を問わず存在するが、$\rho<1$ のとき両者は別々の極限分布を与えて

$$P_k^*=\begin{cases}\dfrac{1}{b}(P_0+P_1+\cdots\cdots+P_k), & k<b\\[2mm] \dfrac{1}{b}(P_{k-b+1}+\cdots\cdots+P_k), & k\geqq b\end{cases}$$

という関係が成立し、$\rho\geqq1$ ならば二種の極限値は任意の k に対していずれも0になる。

仕事継続時間分布のうち $G_n(x)$ は、仕事継続時間中に n 個の集団に対してサービスするというときの仕事継続時間分布となる。他方 $G(x)$ の定義は今まで通りでよい。後者について $\rho\leqq1$ のとき $G(\infty)=1$ であるが、$\rho>1$ ならば $G(\infty)>1$ となり、最後のケースでの $G(\infty)$ の値を正確に与える公式も導出される。

集団サービスの場合、待機人員が $b-1$ 人またはそれ以下ならばサービスは行われないから、$b\geqq2$ のとき $\eta(t)$ は整理時間としての意味を持ってはいるが、もはや待時間としての意味は持たない。また η_n は、第 n 番目のサービス集団に含まれる b 人のうち最後に到着した人の待時間を示すことになる。初期状態の如何にかかわらず $\lim_{t\to\infty} P(\eta(t)\leqq x)$, $\lim_{n\to\infty}(\eta_n\leqq x)$ という二種類の極限値が存在し、$\rho<1$ のとき、$b\geqq2$ ならばそれぞれ別々の極限分布を与える。$\rho<1$ で $b=1$ ならば二つの極限値が一致することは第二節の場合と同じ。なお $\rho\geqq1$ ならば、b の値の如何を問わず両種の極限値はいずれも0になる。

以上に述べた第三節・第四節がサービス時間について第二節を拡張したものであるのに対して、第五節・第六節は入力について第二節を拡張し、単一サーヴァー・パルム入力・指数サービス時間の場合を論ずる。そのうち第六節は集団到着のケースであって、入力について一度の到着がc人（cは正の整数）ずつの集団から成り、サービスは一人ずつ到着集団順に、ただし同一集団内ではat randomに行われる。第六節で$c=1$とおけば、その結果はすべて第五節の場合に帰着する。集団到着というのは、たとえば貨物船が船団を組んで入港し一隻ずつ荷揚げを行う場合に該当し、上述の集団サービスに対応する概念である。集団到着のとき極限状態の存在する場合に、極限分布の性質についてはConollyによって分析がなされている(4)。そこでも指摘されているように、集団到着の理論は多段サービスの理論（入力は一人ずつ到来するが、サービスが一人について多段階を経過する場合）と多くの共通点を持ち、多段サービスの場合に対して直接に適当可能な部分が多い。本書では集団到着のケースについても経過分析に重点をおいているが、集団サービスの場合と同じように、特性値について若干定義を変更する必要がある。すなわち集団到着の場合のξ_nは、n番目の集団の到着直前の行列長（この長さは個々人を単位として測る）とするのがこれである。第五節・第六節で用いられる分析手段は既に第四節までに出尽くした関係もあって、両節の記述はそれまでの叙述に比較すると簡単になっている。これで第一章は終りとなるが、次の第二章以下になると所論の簡約化は更に著しい。

第二章ではサーヴァーの数mが複数有限の場合を扱っている。たゞ、この章の内容は、パルム入力・指数サービス時間の場合について行列長分布の極限値 $\lim_{t\to\infty} P(\xi(t)=k)$ と $\lim_{n\to\infty}(\xi_n=k)$ を研究し両者の間係を述べているほかは、$\lim_{n\to\infty} P(\eta_n \leqq x)$ を研究しているだけで中間経過分析は何ら為されていないし、仕事継続時間に該当する概念の考察もないから、前章と比較するとき甚だ内容に乏しい。これはおそらく待合せ理論の現状をそのまま反映しているのであろう。

第三章ではサーヴァーの人数が無限大になって待時間が常に零の場合を扱う。ポアソン入力・サービス時間分布任意の場合よりも、入力がパルム型で指数サービス時間の場合の方が詳しく論じられている。これは第四章で扱われている電話回線の問題と密接な関係がある。

第四章では待合せ理論発祥の課題すなわち電話回線の理論を述べているが、通話申込み（これを呼という）が回線満員のときに到来すれば、その申込みは待機することなく、そのまま失われてしまうという前提をおいている。呼損のある系と呼ばれるのがこれであるが、電話交換の理論としてはこの他に一で述べたような長距離電話の待合せ問題もある。後者は待つことのある系と名づけられており、註（2）に挙げたヒンチンの本では二つの系が対等の重さで論じられている。本書第四章では呼損のある系だけを扱い、回線の本数（サーヴァーの数）をm、入力をパルム型、通話時間を指数分布と前提する。時点tで通

話中の回線の線 $\zeta(t)$，第 n 番目の呼の到着直前に通話中の回線の数を ζ_n とするとき、非負の整数 i・k について $P(\zeta(t)=k|\zeta(0)=i)$ および $P(\zeta_n=k|\zeta(0)=i)$ を研究し、$t\to\infty, n\to\infty$ のとき初期状態の如何にかかわらずこれら二者の極限値が存在し、前者の極限値を P_k^*、後者の極限値を P_k とするとき、両者の間には

$$P_k^*=\frac{P_{k-1}}{k\mu\beta}, \qquad k=1, 2, \ldots\ldots, m,$$

$$P_0^*=1-\frac{1}{\mu\beta}\sum_{k=1}^{m}\frac{P_{k-1}}{k}$$

なる関係が成立することを示す。ただしβは呼の到着間隔平均値、μは平均通話時間である。第三章・第四章では同一の分析手段が用いられ、第四章に現われる回線の本数mを無限大にしたものが第三章の記述と全く一致するから、かなりの重複感を免れない。

第五章は前章と関係づけながら機械修理の問題を扱い、第六章では放射性物質の粒子測定器に対する応用が述べられている。応用形態は違っても分析の手法は変らない。

四

以上が本書の大要であるが、これでも分るように、第一章第四節の単一サーヴァー・ポアソン入力・サービス時間分布任意で集団サービスの場合を頂点として、そこまでは内容も次第に難しくなり叙述も詳しいが、この節までで分析手段や研究対象が殆んど全部出尽くしてしまうので、それ以後は比較的簡略になっている。そうは言っても説明は全般的に非常に丁寧で、我我数学に素人の者にはありがたいが、数学専攻の方にとっては多分煩わしい位であろう。数式の多い割合にミスプリントは少い方であるが、未だ所々に残っているのは遺憾である。なお集団サービスの場合の整理時間 $\eta(t)$ のLS変換を求めるとき、本書八七頁の式⒆は正しいが、それを導き出す推論過程（同頁五行―十八行）は誤っていると思われる。サービス集団の大きさが1の場合については五二頁―五三頁に示されており、そこでの考え方に倣ってやれば五三頁⒁式に対応して正しい方法で八七頁⒆式が出る。誤の原因は、八七頁の $W_j(t, x)$ が $x=0$ で飛躍するのを忘れて、x に関する偏導函数を用いたところにある。また誤とは言えないけれども、第一章第三節以下で活用される基本的なLemma（四七頁）の中のϕおよびαの定義は、実に二十頁ばかり前の八頁に記されている

$$\phi(s)=\int_0^\infty e^{-sx}dH(x), \qquad \alpha=\int_0^\infty x\,dH(x)$$

であって、Lemmaを述べるに際してその定義が繰返されていないのは、他の部分の懇切な記述と対比するとき特に不思議である。

以上のような微細な点は措いて、本書が終局的な極限分布に至るまでの中間的経過分析に力点をおき、待合せ理論の展望を意図している点は、この書評の初めに記した事情から考えても大きな意味をもつ。殊に単一サーヴァーのケースを扱った第一

章は、総括的な詳しい叙述により、将来の理論展開の基礎として研究者に役立つところが多いであろう。本誌の読者に待合せ理論なるものを紹介する目的を兼ねて、本書を書評欄にとりあげた所以である。（一九六二年十月二八日）

（1） Leslie C. Edie, "Traffic delays at toll booths," *Journal of the Operations Research Society of America*, Vol. 2, 1954, pp. 107—138.

この論文は待合せ理論の実証的研究として有名で、次の論文集に第十五章（四一七頁—四四九頁）として収められている。

C. W. Churchman, R. L. Ackoff and E. L. Arnoff, Introduction to Operations Research, Wiley, New York, c. 1957, x, 645 p.

右の書物には複刻版 Modern Asia Edition, Charles E. Tuttle, Tokyo, 1960. のほか、邦訳もある。

チャーチマン・アコフ・アーノフ著、森口繁一監訳、宮沢光一・松田武彦・大前義次・菅波三郎訳、

オペレーションズ・リサーチ入門　下巻、紀伊国屋書店、東京、一九五八年、邦訳では第十五章は四九八頁——五三八頁。

（2） ア・ヤ・ヒンチン著、森村英典訳、待ち合わせ理論入門、広川書店、東京、一九六〇年、第一部第五章極限定理、五〇頁——六〇頁。

この本の原著は一九五五年に発表され、待合せ理論の古典的著作の一つとされている。英訳もある。

A. Y. Khinchin, Mathematical Methods in the Theory of Queueing, translated by D. M. Andrews and M. H. Quenouille, Griffin, London, 1960, 120 p.

（3） N. T. J. Bailey, "On queueing process with bulk service," *Journal of the Royal Statical Society, Series B*, (以下 *JRSS, B*, と略記), Vol. 16, 1954, pp. 80—87.

F. Downton, "Waiting time in bulk service queues," *JRSS, B*, Vol. 17, 1955, pp. 256—261.

F. Downton, "On limiting distributions arising in bulk service queues," *JRSS, B*, Vol. 18, 1956, pp. 265—274.

（4） B. W. Conolly, "The busy period in relation to the single-server queueing system with general independent arrivals and Erlangian service times," *JRSS, B*, Vol. 22, 1960, p. 89—96.

B. W. Conolly, "Queueing at a single serving point with group arrival," *JRSS, B* Vol. 22, 1960, pp. 285—298.

（一橋大学教授）