拡大再生産と固定資本の補塡

――定差方程式における「掛谷の定理」の応用――

山田欽一
山田克巳

＊

この数年、マルクス経済学の分野においては「固定資本の回転の独自性」から生ずる諸困難について活潑な論争が行われている[1]。この問題は再生産表式論との関連において論ぜられて来たとはいえ、決してマルクス的な再生産表式に固有の問題ではないということは注意されなくてはならない。固定資本が使用され、拡大再生産が行われるところではいつでもこの問題が発生するのである。この問題を再生産表式論の抽象の段階でどう解決するかという点はマルクス経済学者の手にゆだねるとして、われわれは、以下数学的側面からこれらの問題のいくつかに光を当ててみよう。

後にみるようにこの問題は、経済学における「定係高階定差方程式」および「掛谷の定理」の応用例として興味のある問題なのである。

（1）この論争の経過ならびに主要文献については、都留重人・高須賀義博「再生産表式と固定資本の補塡」経済研究第十巻四号を参照のこと。なお「掛谷の定理」については例えば小林幹雄編「数学要項」（共立出版）一八頁など参照。

1

まず、林直道氏による「ルフチ・ローマン効果」批判[2]を検討することから始めよう。

「ルフチ・ローマン効果」の理論というのは、減価償却資金の即時再投資をくりかえしてゆけば、その資金回転のメカニズムによって償却資金だけから生産拡張が可能になる、という主張である。これはいわば、なしくずし更新を含む拡張である。これに対し、林氏は次のような算術例をあげて批判する。すなわち、一、〇〇〇ポンドの価値をもつ一、〇〇〇錘の紡錘および梳毛機を最初に投下した工場主が、定額法による減価償却資金を年々追加投資するならば、一耐久期間が経過した後に一、五九三錘に機械を増加させることができる、というエンゲルスの計算を更に継続すると、この拡張過程は機械台数が一、八二〇錘でストップし、増減はみられなくなる[3]、というのである。林氏はこの結果から、減価償却資金の再投資による生産拡張は無限に続きうるものではなく、一定の限界をもっていることを確認するのである。

この林氏の批判を検証するために、林氏の数字例を次のように定式化しよう。まず、K_1ポンドという価値に等しいK_1台の新機械が設置されたとする。耐久年限をm年とし、定額法で償却されるものと考える。その年々の減価償却額を翌年に追加投資するものとすれば、第t年における追加投資は$K_{t-1}\times\frac{1}{m}$に等しい（但し$t\leqq m$）。従って第t年における機械の能力価値K_tは$K_t=K_1\left(1+\frac{1}{m}\right)^{t-1}$である。ところが第$m+1$年からは、その年から$m$年前の機械の価値が廃棄されることになるから、その年以降、第t年の機械の能力価値K_t（但し$t>m$）を求めるためには、一年前の機械台数K_{t-1}に、第$(t-1)$年の減価償却額に等しい追加投資$\frac{1}{m}K_{t-1}$を加えただけでなく、さらにそれから第$(t-1)$年末に廃棄される機械台数$\frac{1}{m}K_{t-m-1}$、すなわち、m年前の追加投資を控除しなければならない。以上の関係を定式化すれば、

$$K_t=K_{t-1}+\delta K_{t-1}-\delta K_{t-m-1} \qquad (1\cdot1)$$

となる[4]（但し、$\delta=\frac{1}{m}$, $t>m$）。すなわち、「ルフチ・ローマン効果」は(1・1)式のような定係高階定差方程式に変換することができるのである。次にこの定差方程式の解を求めてみよう。

(1・1)式の特性方程式は

$$E^{m+1}-(1+\delta)E^m+\delta=0 \qquad (1\cdot2)$$

$\delta=\frac{1}{m}$であるから、

$$\left\{\sum_{j=0}^{m-1}(1-j\delta)E^{m-1-j}\right\}(E-1)^2=0 \qquad (1\cdot3)$$

特性根は

$$1,\ 1,\ \lambda_3,\ \lambda_4,\ \cdots\cdots,\ \lambda_{m+1}$$

で、λ_iは

$$\sum_{j=0}^{m-1}(1-j\delta)E^{m-1-j}=0 \qquad (1\cdot4)$$

の根である。$\delta=\frac{1}{m}$によって、$1>1-\delta>1-2\delta>\cdots\cdots>1-\overline{m-1}\delta>0$となり、「掛谷の定理」により(1・4)で、

$$|\lambda_i|<1 \qquad (1\cdot5)$$

λ_i中、実根をλ_j、虚根をλ_kとかけば、求める解は

$$c_1+c_2t+\sum_j P_{j(t)}\lambda_j{}^t+\sum_k l_k\Pi_{k(t)}S_{k(t)}|\lambda_k|^t \qquad (1\cdot6)$$

となる。(P_j, Π_kは多項式、S_kは正弦函数)。(1・5)によって、$t\to\infty$のとき、解(1・6)式は

$$c_1+c_2t$$

となり無限大に発散する。

このことは、原理的には「ルフチ・ローマン効果」による生産拡張が、「無限に」可能であることを示している。林氏がその数字例によって、一定水準に収斂し以後ふえも減りもしなくなるという結論を得たのは、四捨五入という近似計算が影響した結果であろうと思われる。ところが、林氏ばかりでなく、当のローマン氏も、数字例で計算したため、林氏同様、一定水準に収斂するという結論に終っているようである[5]。われわれの結果は、従って、「ルフチ・ローマン効果」の当の主張者の結論をこえて、減価償却資金の即時再投資をくり返せば、「無限の」生産

拡張が「原理的には」可能であるということを示している。この結論が、林氏の批判するようなブルジョア・イデオロギーの如何に拘らず、数学的に成立するものであることはいうまでもないであろう。

（2）　林直道「景気循環の研究」昭和三四年、三一七頁。

（3）　同上、三一六—七頁。

（4）　この式は都留・高須賀氏の方程式と一致している。（都留・高須賀、前掲論文、三四一頁）

（5）　林直道、前掲書、三二〇頁の引用による。

2

これまでは、新投資は一回限りで、その減価償却額の追加再投資を継続した場合のみを考察したが、次に、この減価償却資金の即時再投資と新投資の継続との合成効果を検討してみよう。この場合には新投資が年々投下されるという点が異なるだけで、追加再投資も資本廃棄も前例と全く同様に行われるから、年々の拡張過程は次表の示すように進行する。但し、m：耐久年限 $\left(\delta=\dfrac{1}{m}\right)$, F_t：新投資、D_t：減価償却額（=追加再投資）、K_t：固定資本現存量（能力価値）とする。

別　表

年度 (t)	新投資 (F_t)	追加再投資 (D_t)	廃棄資本量 (H_t)	固定資本現存量 (K_t)
1	F_1	$D_1=0$	0	$K_1=F_1$
2	F_2	$D_2=\delta K_1$	0	$K_2=K_1+F_2+D_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	F_m	$D_m=\delta K_{m-1}$	0	$K_m=K_{m-1}+F_m+D_m$
$m+1$	F_{m+1}	$D_{m+1}=\delta K_m$	$H_{m+1}=F_1$	$K_{m+1}=K_m+F_{m+1}+D_{m+1}-H_{m+1}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
t	F_t	$D_t=\delta K_{t-1}$	$H_t=F_{t-m}+\delta K_{t-m-1}$	$K_t=K_{t-1}+F_t+D_t-H_t$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

かくて次の一般式を得る。

(2·1)　$K_t-(1+\delta)K_{t-1}+\delta K_{t-m-1}=F_t-F_{t-m}$

$\because\quad K_t=K_{t-1}+F_t+D_t-H_t$

$\qquad\quad =K_{t-1}+F_t+\delta K_{t-1}-(F_{t-m}+\delta K_{t-m-1})$

さてこれまで新投資については特別の仮定を設けなかったが、以下、F_tが一定の比率gで増加する場合（case 1）とF_tが一定の差額dで増加する場合（case 2）とにわけて解を求めることにする。

〔case 1〕　$F_t=F_1(1+g)^{t-1}=K_1(1+g)^{t-1}$ であるから、

(2·2)　$K_t-(1+\delta)K_{t-1}+\delta K_{t-m-1}=K_1(1+g)^{t-m-1}\times(1+g)^m-1\}$

となる。

〔case 2〕　$F_t=F_1+(t-1)d=K_1+(t-1)d$ であるから、

(2·3)　$K_t-(1+\delta)K_{t-1}+\delta K_{t-m-1}=md$

これら（2·2）式および（2·3）式の補助方程式の一般解はすでに（1·6）式として求められているから、ここでは特別解を求めればよい。

〔case 1〕　$K_t=K_1(1+g)^tH_t$ とおいて (2·2) 式は

$$(1+g)^{m+1}H_t-(1+\delta)(1+g)^mH_{t-1}+\delta H_{t-m-1}$$
$$=(1+g)^m-1$$

右辺が t を含まないから、

$$H_t=\{(1+g)^m-1\}/\{(g-\delta)(1+g)^m+\delta\}$$

(2·4)　$\therefore K_t=K_1\{(1+g)^m-1\}(1+g)^t/\{(g-\delta)(1+g)^m+\delta\}$

かくて (2·2) 式の解は (2·4) と (1·6) とから求められるが、いま $t\to\infty$ とすればその解は

(2·5)　$$\frac{K_1\{(1+g)^m-1\}(1+g)^t}{(g-\delta)(1+g)^m+\delta}+c_1+c_2t$$

となる。

〔case 2〕 (1·3) 式によって (2·3) 式は

$$(E-1)^2K_t=\frac{1}{\sum_{j=0}^{m-1}(1-j\delta)E^{m-1-j}}md=\frac{2md}{m+1}$$

(2·6)　$$K_t=\frac{2md}{m+1}\iint(\Delta t)^2=\frac{mdt(t-1)}{m+1}$$

かくて (2·6) と (1·6) とから (2·3) 式の解を求めることができる。いま、その解において $t\to\infty$ とすれば、その解は

(2·7)　$$\frac{mdt(t-1)}{m+1}+c_1+c_2t$$

となる。

以上で、年々新投資が継続される場合の「ルフチ・ローマン効果」の数学的検討は終った。この結果を準備として次に拡大再生産と固定資本の補塡の問題に移ろう。

3

単純再生産の場合には、固定資本の年齢構成は一定の比率を保つと考えられ、従って、ある年度において生産物への最終的価値移転を行って現物補塡されなければならない部分(R)と総固定資本のうちその年度に減価償却される部分(D)とは等しい筈である。ところが、拡大再生産においては、これらの減価償却部分(D)が更新部分(R)を必然的に超過するという場合が発生する。豊倉氏の例[6]にならって、いま、減価償却および更新部分を含む固定資本への粗投資(G_t)が年々gという率で増加しつつ継続されていると仮定しよう。この固定資本の耐久年限をm年とすれば、第t年における総固定資本設備の能力価値K_tは

(3·1)　$$K_t=\sum_{s=1}^{m}G_{t-s}=G_{t-m}\cdot\frac{(1+g)^m-1}{g}$$

で表わされる。減価償却が定額法で行われるとすれば、第t年における減価償却額(D_t)は

(3·2)　$$D_t=\frac{1}{m}K_t=G_{t-m}\cdot\frac{(1+g)^m-1}{mg}$$

に等しい。他方第 $(t-1)$ 年中に生産物へ最終的に価値移転して、第t年には現物補塡されなければならない、いわゆる更新投資(R_t)は G_{t-m} に等しい。従って、

(3·3)　$$\frac{R_t}{D_t}=\frac{mg}{(1+g)^m-1}<1$$

となり、D_t が R_t を超過することは明らかである。

問題はこの（D_t-R_t）をどのように解釈するかということであるが、周知のようにこれについては、「過剰説」と「追加投資説」とが対立している。「資本論」が資本主義社会の「内的構造」をその「理想的平均的」状態において示そうとしたものであるとすれば、表式分析においても、むしろ、「追加投資説」の立場をとるべきであろう。

興味深いことに、この同じ問題についてすでに一九五三年の論文(7)でE・D・ドーマーが検討を加えている。その論文で彼はいわゆる「追加投資説」の立場をとり、資本係数を次のように規定する。

$$(3\cdot4)\qquad v=\frac{G-R}{\varDelta P}$$

ここで、G: 粗投資、R: 更新額、$\varDelta P$: 粗国民生産物で表わされた能力の増加である。(8) 純投資を I、減価償却額を D とすれば（3・4）式の分子は

$$(3\cdot5)\qquad G-R=I+(D-R)$$

と書き改めることができるが、このことはドーマーが生産能力の増加を考える場合、($D-R$) を追加投資とみなしていたことを示すものである。いま β を粗貯蓄性向とすれば、$G=\beta\cdot P$ である。これと（3・4）とから、

$$(3\cdot6)\qquad \frac{\varDelta P}{P}=\frac{G-R}{v\cdot P}=\frac{\beta}{v}\left(\frac{G-R}{G}\right)=\frac{\beta}{v}\left(1-\frac{R}{G}\right)$$

をうるが、G の増加率を g、資本の耐久年限を m とすれば、$R/G=1/(1+g)^m$ であるから上式は

$$(3\cdot7)\qquad \frac{\varDelta P}{P}=\frac{\beta}{v}\left(1-\frac{1}{(1+g)^m}\right)$$

この式の左辺は時間 t と無関係であるから（3・7）式は G が一定の増加率 g で増加する限り粗国民生産物も一定の比率で増加するということを示している。ドーマーのようにこの $\varDelta P/P$ を g に等しいとおけば、このモデルは豊倉氏の拡大再生産モデル(9)と全く同一となる。何となれば、剰余価値からの蓄積分(I)、減価償却額（D=部分 2）および更新額（R=部分 1）がいずれも一定の比率 g で増加するという仮定の下で（3・7）式は導出されたが、豊倉氏のモデルはまさに同じ仮定に立っているからである。

しかし、われわれの関心はドーマー・モデルと豊倉モデルの同一性の指摘にあるのではない。われわれの意図は、このドーマー・豊倉モデルが実は第二節で展開した新投資の継続とその「ルフチ・ローマン効果」の問題に変形することができるという点にある。以下節をかえてそのことを示そう。

（6） 豊倉三子雄「産業循環論」昭和三五年、七六頁。

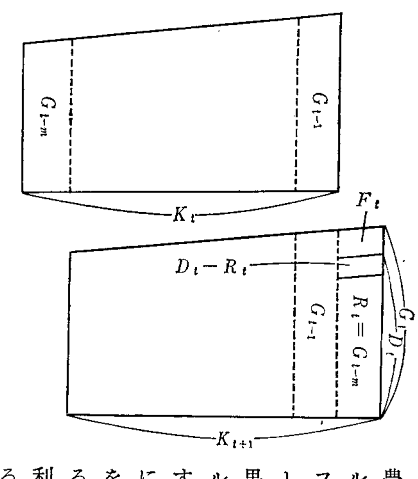
（7） E. D. Domar, "Depreciation, Replacement, and Growth," Economic Journal, Vol. 63, Mar. 1953, reprinted in his 'Essays in the Theory of Economic Growth,' 1957.

（8） E. D. Domar, ditto. p. 169.

（9） 豊倉三子雄、前掲書、八三頁以下。なお、野矢テツオ

氏の均衡拡大再生産モデルはこの豊倉氏のモデルと全く同一モデルである（野矢テツオ「固定資本の回転と拡張再生産の均衡条件」経済評論、昭和三六年五月号）。

4



前述の豊倉モデルを「ルフチ・ローマン効果」モデルに変換するためには上図を利用するのが便利である。

第t年の現存総固定資本量は第$(t-1)$年から耐久年限に等しいm年前までの粗投資の合計 $\sum_{s=1}^{m} G_{t-s}$ に等しい。生産の結果t年末には固定資本の一部 G_{t-m} はその価値を最終的に生産物に移転し現物補塡を必要とするに至るであろう。他方、総固定資本の$1/m$に等しい価値が減価償却額として生産物から回収される。いま、剰余価値から新たに新投資が追加投資されるとすると、第$(t+1)$年の始めに行われる粗投資G_tは、t年末に廃棄された固定資本の更新部分 $R_t(=G_{t-m})$、追加新投資F_tおよび追加投資としての D_t-R_t 部分の合計に等しい。

(4·1)　$G_t=F_t+R_t+(D_t-R_t)$

かくて、第$(t+1)$年における総固定資本量は

(4·2)　$K_{t+1}=K_t-G_{t-m}+G_t$

ところで(4·1)式は整理すれば $G_t=F_t+D_t$ となり、$D_t=\delta K_t$ であるから、(4·2)式は

$$K_{t+1}=K_t-(F_{t-m}+D_{t-m})+(F_t+D_t)$$
$$=K_t-F_{t-m}-\delta K_{t-m}+F_t+\delta K_t$$
$$\therefore K_{t+1}=(1+\delta)K_t-\delta K_{t-m}+F_t-F_{t-m}$$

この式を変形すれば、

$$K_{t+1}-(1+\delta)K_t+\delta K_{t-m}=F_t-F_{t-m}$$

となって(2·1)式と全く同形である。(10) しかも、豊倉モデルではG_t、D_t、F_tがすべてgという率で増加する場合が想定されているから、われわれのモデルの〔case 1〕に当る。両者の相違は、豊倉モデルは粗投資G_tを(4·1)式の形で考えているのに対し、われわれのモデルはそれを $G_t=F_t+D_t$ と考えている。すなわち、D_t部分を更新投資と追加投資部分とに分けるか、それを合算して減価償却資金の即時再投資とみるかの点にある。

ところで、われわれの定差方程式の解は、

(4·3)　$$K_t=\frac{K_1\{(1+g)^m-1\}}{(g-\delta)(1+g)^m+\delta}(1+g)^t+c_1+c_2t$$
$$+\sum_j P_{j(t)}\lambda_j^t+\sum_k l_k \Pi_{k(t)} S_{k(t)}\,|\lambda_k|^t$$

であるのに対し、豊倉氏の解は

$$(4\cdot4)\qquad K_t=A(1+g)^t \qquad\qquad A：任意常数$$

となるが[11]、この豊倉氏の解は、われわれの解の特解の一つと解することができると思われる。すなわち、(4·3) 式で表わされる一般解に

$$K_0=A,\ K_1=A(1+g),\cdots\cdots,\ K_m=A(1+g)^m$$

という $(m+1)$ 箇の初期条件を与えれば (4·3) 式の右辺第二項以下のパラメータはすべてゼロとなり求める特解は

$$(4\cdot5)\qquad K_t=\frac{K_1\{(1+g)^m-1\}}{(g-\delta)(1+g)^m+\delta}(1+g)^t$$

となり豊倉モデルに帰着する。

このことは「追加投資説」に立っても、常に均衡的拡大再生産が可能であるとは限らないことを示している。しかし、仮に (4·5) 式のような結果を得たとしても、それによって「固定資本の回転の独自性」から生ずる問題がすべて解決されたわけではない。そこには更めて、固定資本の「能力価値」と「貨幣価値」との乖離の問題が発生する。すなわち、第 t 年までの蓄積貨幣資本総額 K_t^* は、年々の剰余価値からの新投資 F_t^* の累積額に他ならないから

$$(4\cdot6)\qquad K_t^*=\sum_t F_t^*=F_1^*\cdot\frac{(1+g)^t-1}{g}$$

(但し, $F_1^*=K_1$)

となり、(4·5)÷(4·6) を求めると

$$(4\cdot7)\qquad \frac{K_t}{K_t^*}=\frac{\{(1+g)^m-1\}g}{(g-\delta)(1+g)^m+\delta}\times\frac{(1+g)^t}{(1+g)^t-1}$$

であるから K_t/K_t^* は $t\to\infty$ に従って、1より大きい常数値に限りなく近づく[12]。このことがもし機械一単位の価値の低下を意味するとすれば、減価償却資金の即時再投資により購入しうる機械の能力はここで仮定した場合より一層大となり、均衡拡大再生産の径路も修正されることになる。

「追加投資説」に立つ論者はこの問題を回避することはできない。

(10) 但し方程式左辺の時点が一年ずつずれているのは両モデルにおける設備の把握時点が年初と年末の相違をもっているためで結果に大差はない。

(11) 豊倉三子雄、前掲書、九五頁。

(12) 何となれば $\dfrac{\{(1+g)^m-1\}g}{(g-\delta)(1+g)^m+\delta}-1$

$$=\frac{g(1+g)^m-g-g(1+g)^m+\delta\{(1+g)^m-1\}}{g(1+g)^m-\delta\{(1+g)^m-1\}}$$

$$=\frac{\delta\{(1+g)^m-1\}-g}{g(1+g)^m-\delta\{(1+g)^m-1\}}$$

$$=\frac{\frac{1}{m}\{{}_mC_1g+{}_mC_2g^2+\cdots+g^m\}-g}{g(1+g)^m-\frac{1}{m}({}_mC_1g+\cdots+g^m)}$$

$$=\frac{\frac{1}{m}({}_mC_2g^2+\cdots+g^m)}{(g+{}_mC_1g^2+\cdots+g^{m+1})-(g+\frac{{}_mC_2}{m}g_2+\cdots+\frac{1}{m}g^m)}$$

$$=\frac{\frac{1}{m}({}_mC_2r^2+\cdots+r^m)}{\sum_{i=1}^{m-1}\left({}_mC_i-\frac{1}{m}{}_mC_{i+1}\right)g^{i+1}+g^{m+1}}>0,\text{ また }\lim_{t\to\infty}\frac{(1+g)^t}{(1+g)^{t-1}}$$

$=1$ である。

5

さて、われわれは「固定資本の回転の独自性」から発生する諸問題のいくつかに数学的解明を行って来た。しかし、ここで得られた数学的結果が直ちに現実の経済にあてはまるなどと即断されてはならない。これらの結果は、それぞれの問題に関して与えられた一連の前提条件の下で導き出されたものにすぎない。従って、前提条件の如何によっては、そもそも「$D-R$ の乖離」の問題そのものが発生しない場合も考え得るであろう。たとえば減価償却が定額法によらず、g に等しい利子率で投資される年金として計算され、それが積立てられて m 年の終りに固定資本の取得原価に等しくなると仮定すれば D と R との乖離はなくなるということが指摘されている。[13] また能力価値が減価償却額と同じ割合で低下すると想定しても D と R との乖離は発生しないであろう。従来、この問題についての論争は、耐久年限内での能力価値の不変性および定額償却法の二前提の下で行われて来たが、これは種々の可能性の中の特別の場合にすぎない。従って、この特別の場合のみを前提として、直ちに「恐慌」との関連を主張したり、その関連を否定したりするのはやや性急であるように思われるのである。

(13) E. D. Domar, op. cit., p. 166.

*

本稿は一九六〇年一二月および六一年一月における久武教授を中心とする「数理経済学研究会」での報告を整理したものである。貴重な示唆を与えられた研究会の方々に感謝いたします。

(山田欽一・一橋大学教授)
(山田克巳・専修大学講師)