《研究ノート》

課税と複占価格

——応用数学の話題として——

山田欽一

一 問題

遊戯の理論などからする考察ならばとにかく、複占の均衡条件、その安定条件また比較静学的考察などというものは、もう陳腐な話題であろう。だが筆者はいまだに複占の問題をこの上もなく好い例題として、応用数学の講義で一項目として愛用している。それは微分学のほとんどすべての技術が複占の問題を解明するのに使われているので、微分学の経済学への応用の具体例として、たいへん能率的だからである。

クールノ複占では一元函数の極値理論、スタッケルベルグ複占では条件付極値の理論、協定複占では二元函数の極値理論を応用するし、複占理論で大切な役割を担っている反作用曲線についての説明や、租税の影響の解説には陰函数の理論が必要である。

この小篇では余り見掛けない「租税と複占」の問題をクールノ複占での価格を中心として、やや一般的な形で扱ってみたい。

二 クールノ複占の価格と課税

複占者の生産量を、x_1、x_2、生産費を $C_1(x_1)$、$C_2(x_2)$、需要函数を

$$p=f(x) \qquad x=x_1+x_2$$

とする。

税率 t、売上高 r について税引収入額を

$$I=I(r,\ t)$$

とし、I については

$$\frac{\partial I}{\partial r}>0 \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial r\partial t}<0 \qquad (1)$$

とする。

各複占者の利益は

$$\begin{cases} P_1(x_1,\ x_2)=I(x_1f(x_1+x_2),\ t)-C_1(x_1) \\ P_2(x_1,\ x_2)=I(x_2f(x_1+x_2),\ t)-C_2(x_2) \end{cases}$$

であって、それぞれの反作用曲線は

$$\begin{cases} (x_1f'+f)\dfrac{\partial I}{\partial r_1}-C_1'=0 \\ (x_2f'+f)\dfrac{\partial I}{\partial r_2}-C_2'=0 \end{cases} \qquad (2)$$

であり、これから x_1、x_2 が t の函数として定まる。ここで

$$r_1=x_1f(x_1+x_2), \qquad r_2=x_2f(x_1+x_2)$$

である。

(2)の左辺をそれぞれ$A^{(1)}$、$A^{(2)}$と書いて、均衡の安定条件を併記すれば

$$\begin{cases} A^{(1)}=0 & \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1}<0 \\ A^{(2)}=0 & \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_2}<0 \end{cases} \tag{3}$$

となる。

ここで、反作用曲線の傾きが（−1，0）にあるという仮定を導入すれば、$(3)_1$によって

$$\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dx_2}+\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2}=0$$

であるから、$(3)_2$を使って

$$\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1}<\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2}<0 \tag{4}$$

を得る。全く同じようにして、$(3)_3$、$(3)_4$から

$$\frac{\partial A^{(2)}}{\partial x_2}<\frac{\partial A^{(2)}}{\partial x_1}<0 \tag{5}$$

を得る。

(2)をtで微分して、

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt}=-(x_1f'+f)\dfrac{\partial^2 I}{\partial r_1\partial t} \\ \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt}=-(x_2f'+f)\dfrac{\partial^2 I}{\partial r_2\partial t} \end{cases}$$

右辺を(2)によって書きなおすと

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt}=-C_1'\dfrac{\partial^2 I}{\partial r_1\partial t}\Big/\dfrac{\partial I}{\partial r_1} \\ \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_1}\dfrac{dx_1}{dt}+\dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_2}\dfrac{dx_2}{dt}=-C_2'\dfrac{\partial^2 I}{\partial r_2\partial t}\Big/\dfrac{\partial I}{\partial r_2} \end{cases}$$

これを解いて

$$\begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt}=\begin{vmatrix} -C_1'\dfrac{\partial^2 I}{\partial r_1\partial t}\Big/\dfrac{\partial I}{\partial r_1} & \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2} \\ -C_2'\dfrac{\partial^2 I}{\partial r_2\partial t}\Big/\dfrac{\partial I}{\partial r_2} & \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_2} \end{vmatrix}\Big/\Delta \\ \dfrac{dx_2}{dt}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} & -C_1'\dfrac{\partial^2 I}{\partial r_1\partial t}\Big/\dfrac{\partial I}{\partial r_1} \\ \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_1} & -C_2'\dfrac{\partial^2 I}{\partial r_2\partial t}\Big/\dfrac{\partial I}{\partial r_2} \end{vmatrix}\Big/\Delta \end{cases} \tag{6}$$

ただし

$$\Delta=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2} \\ \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_1} & \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_2} \end{vmatrix} \tag{7}$$

である。

(6)の二式を加えて

$$\frac{dx}{dt}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2}-\dfrac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} & C_1'\dfrac{\partial^2 I}{\partial r_1\partial t}\Big/\dfrac{\partial I}{\partial r_1} \\ \dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_2}-\dfrac{\partial A^{(2)}}{\partial x_1} & C_2'\dfrac{\partial^2 I}{\partial r_2\partial t}\Big/\dfrac{\partial I}{\partial r_2} \end{vmatrix}\Big/\Delta \tag{8}$$

となり、複占市場で課税の総生産量に及ぼす影響が算定できたことになる。

次に(8)の符号をしらべてみる。(4)と(5)から、(7)によって

$$\Delta>0 \qquad (9)$$

また(4)と(5)から

$$\frac{\partial A^{(2)}}{\partial x_2}-\frac{\partial A^{(2)}}{\partial x_1}<0<\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_2}-\frac{\partial A^{(1)}}{\partial x_1} \qquad (10)$$

他方、費用が生産量の増加函数であることと(1)によって、

$$C_1'\frac{\partial^2 I}{\partial r_1\partial t}\Big/\frac{\partial I}{\partial r_1}<0,\quad C_2'\frac{\partial^2 I}{\partial r_2\partial t}\Big/\frac{\partial I}{\partial r_2}<0 \qquad (11)$$

となる。

(9)、(10)、(11)を(8)に使って

$$\frac{dx}{dt}<0 \qquad (12)$$

を得る。

(12)は当然のことながら、課税が市場総生産量を低下し、価格を上昇させることを示している。

三 註釈

応用数学の一例として、複占の数式による従来の考察を採り上げてみると、いろいろ、飽き足りなく思われる点が多い。

一つは導入した仮定を活用していないことである。たとえば反作用曲線の傾きが(−1,0)にあるという仮定は、安定条件の一つとして導入したものであるが、筆者の計算によれば、独占価格と複占価格の大小もこの仮定**だけ**から誘導できるようである。

また、もう一つの安定条件である、極値安定条件もほとんど活用されていない。これまた、筆者の計算によれば、三種の複占の相互比較もこの仮定**だけ**からできるようである。

前項の所論にも、この二種の安定条件だけを駆使した。

このような点を一つの小例によって公けにするのがこの小篇の一つの目的である。

仮定を活用しないことから来ると思われるもう一つの難点は、いろいろ興味ある結論を誘導するため、別の仮定を追加導入していることである。

とくに生産費については、著しく無理な仮定を導入している。生産費が不要または一定であるという現実と程遠いものをはじめ、両複占者の費用函数が同一であるという仮定などがその例である。

前項の所論では、費用が生産量の増加函数であるということだけを仮定した。

なお課税函数としては、全く抽象的なものを使った。第一項で「一般的な形」といったのはこの意味である。

反作用曲線の傾きについての仮定から来る費用函数についての制約はどうなるか。これは(10)を書き直せば、課税函数、需要函数との関連で表わすことができよう。

(1)によって一種の累進税を仮定してしまったため、(12)という決定的な結論が出たけれども、$(1)_2$を採らず、$(1)_1$だけにしておい

て、

$$\frac{dx}{dt} \geqq 0$$

となる場合を吟味することも面白かろう。

註　このノートは数理経済学研究会一〇月例会での報告であり、第三項には、参加者の発言、質問またそれに対する応答を含んでいる。

（一九六〇―一〇―一八）（一橋大学教授）