# 書評

## J・G・ケメニィ＝J・L・スネル共著
## 『有限マルコフ連鎖』

John G. Kemeny and J. Laurie Snell, Finite Markov Chains. Prinseton, New Jersey, D. Van Nostrand Co., c. 1960. viii, 210 p.

磯野修

### I

有限マルコフ連鎖についての右の書物を紹介する前に、理論経済学の例を用いてマルコフ連鎖の意味を述べておくのが適当であろう。たゞ、この例は筆者が説明の便宜の為に作ったものであって、右の書物に出ているわけではない。(1)

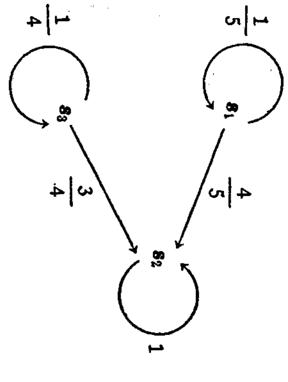
いま、経済の状態を三つに分けて、不況・均衡・好況とし、それぞれを記号 $s_1, s_2, s_3$ で示す。時間が、0, 1, 2,……と離散的に変化して行くとき、経済体系は、これら三つの状態のいずれか一つをとる。各時点において各種の状態の生ずる確率が与えられるとき、経済状態の変化を示す時系列は、一つの確率過程となる。こゝで、ある時点 $t$ における確率分布が、一つ手前の時点 $t-1$ で実現された状態だけに依存する場合に、これをマルコフ過程と呼ぶ。さらに、ある状態から他の状態へ移る確率（推移確率）が、時点の如何にかゝわらず一定のとき、これをマルコフ連鎖という。そして右の例のように、実現可能な状態の個数が有限個であれば、有限マルコフ連鎖（finite Markov chain）という。以下では、有限マルコフ連鎖だけを取り扱うが、状態 $s_i$ から $s_j$ に移る確率を第 $i$ 行第 $j$ 列元素とする行列を作り、これを推移（確率）行列と名づける。

(イ) 上に述べた例で、推移行列の数値を次のように仮定する。

$$\begin{array}{c c} & \begin{array}{ccc} s_1 & s_2 & s_3 \end{array} \\ \begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array} & \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \end{array} \qquad (1)$$

この第一行によれば、現在時点が不況 $s_1$ のとき、次の時点で、なお不況 $s_1$ に止まる確率が $1/5$、均衡 $s_2$ に移る確率が $4/5$ であり、不況 $s_1$ から直ちに好況 $s_3$ へ移ることはない。第二行は、現在時点が均衡状態 $s_2$ であれば、次の時点でもはや他の状態へ移ることはなく、終始 $s_2$ に止まることを示す。第三行も同じように解釈できる。推移行列(1)は、三つの状態を示す文字の間に矢線を引いて、次のような形で表わすこともできる。

この図は、シャノン線図と呼ばれるもので、情報理論の創始

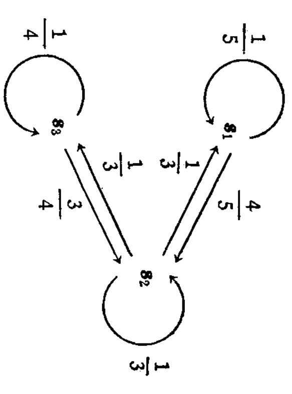



(2)

者 C. E. Shannon に由来するものである。

右に仮定された推移行列(1)のもとでは、経済が どのような初期状態から出発しようとも、終には均衡状態 $s_2$ へ到達して、そこから外へ出ることはない。このように、ある状態に到達したら、そこへ固着して外へ出ることのないとき、これを吸収マルコフ連鎖 (absorbing Markov chain) と言う。そして例えば、不況から出発するとき、ある場合には直ちに次の時点で均衡に到達し、他の場合には長い間不況が続いてから均衡に達するというように、個々の場合に応じて、均衡に到着するまでに要する時間の長さは、短かかったり長かったりする。しかし、この所要時間の平均値や、平均値をめぐって個々の所要時間値が示すバラツキ具合を測ることができる。右の数字例(1)では、不況から均衡に至る平均所要時間は、$5/4$ 期間であり、平均値のまわりのバラツキを測る標準偏差は $\sqrt{5}/4$ 期間である。これに対して、好況から出発した場合には、均衡に至るまでの平均所要時間は $4/3$ 期間、標準偏差は $2/3$ 期間である。

(ロ) 次に、推移行列の数字を少し変えて、シャノン線図で描くとき次のようになるとする。

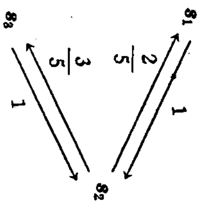



(3)

さきの(1)または(2)と違う点は、均衡 $s_2$ から他の状態へ移る可能性が生じ、均衡に止まる確率と、不況または好況へ転ずる確率とが、いずれも $1/3$ になっていることである。[2] この場合には、もはや吸収マルコフ連鎖ではなくて、正則マルコフ連鎖 (regular Markov chain) と呼ばれるものになる。時間の経過と共に、経済は三つの状態の間を行ったり来たり、あるいは同じ状態に止まったりするが、(イ)の場合のように、ある一つの状態に固着して、そこに閉じこもるということはない。そして不況・均衡・好況の三種類の状態が現われる確率は、時間の経過と共に終には一つの極限分布に到達して、その数値は $15/67$・$36/67$・$16/67$ の割合で与えられるに至る。[3] また、十分長い時間をとれば、これらの状態の実現される相対度数が右の比率と喰

い違う確率は、いかほどでも小さくすることができて、いわゆる大数の法則が成立している。さらに右の比率の逆数$67/15$・$67/36$・$67/16$は、それぞれ不況から不況へ、均衡から均衡へ、好況から好況への平均所要時間を与えている。一層詳しく、不況から均衡へ、不況から好況へ等々の平均所要時間（記号的には、一般に状態$s_i$から状態$s_j$に至る平均所要時間）や、そのまわりのバラッキを測る標準偏差をも計算することができる。

(ハ) 最後に、推移行列を更に少し変更して、次のような場合を考える。




（4）

この場合には、明かに経済は引き続き二つの時点で同じ状態に止まることはない。そして、ある状態$s_i$から出発して、再びこの$s_i$に戻ることがあるとしても、それは偶数期間後においてのみ可能である。例えば、不況$s_1$から出発するとき、再び$s_1$に戻るのは、$s_1 \to s_2 \to s_1$ならば二期間後、$s_1 \to s_2 \to s_3 \to s_2 \to s_1$ならば四期間後である。この点が(ロ)の場合と異なる特色であって、今の場合を循環マルコフ連鎖 (cyclic Markov chain) と名づけ、同一状態の再起期間の最大公約数(右の例では2)を、周期と呼ぶ。経済は三つの状態の間を行ったり来たりするが、これら三種類の状態の生ずる確率は、終には$2/10$・$5/10$・$3/10$によって与えられるに至り、それらの逆数5・2・$10/3$が、それぞれ不況から不況へ、均衡から均衡へ、好況から好況への平均所要時間を示している。正則マルコフ連鎖の場合と同じように、さらに詳しく、一般に状態$s_i$から状態$s_j$への平均所要時間や、そのまわりの標準偏差を計算することもできる。

右には(イ)(ロ)(ハ)三種類の有限マルコフ連鎖の極めて簡単な例を示したが、最後の二つ、すなわち正則マルコフ連鎖と循環マルコフ連鎖を合わせて、エルゴード的マルコフ連鎖 (ergodic Markov chain) と言う。そして有限マルコフ連鎖は、まず吸収的とエルゴード的とに大別され、後者が正則的と循環的とに分れて、全体で三つの場合を扱えばよいことが理論的に証明される。

## 二

この書評では、有限マルコフ連鎖の概念を理解していたゞくために、数学としては余りにも特殊な、理論経済学としては余りにも幼稚な例解から始めることになったが、有限マルコフ連鎖の研究に当って、研究すべき対象が上記の三つに尽きるということは、言うまでもなく数学的には基本的に重要な事柄であって、こゝに紹介しようとする Kemeny and Snell の書物でも、第一章および第二章で　この点が明かにされる。第一章第三節「順序関係」同章第四節「通信関係」および第二章第四節「状態および連鎖の分類」が、これに相当する部分であるが、

第一章の二つの節の説明は少し簡単に過ぎて分り難い。また、第二章では上に述べたシャノン線図を用いれば、第一章との連絡が上手にできて理解しやすくなると思われるのに、残念なことに本書ではシャノン線図の説明は全くなされていない。

第三章は吸収連鎖、第四章は正則連鎖、第五章は循環連鎖をも含めて一般にエルゴード連鎖を取り扱い、種々の特性値（例えば、例解で述べた平均所要時間や、そのまわりの標準偏差など）の導出、諸特性値間の関係など、有限マルコフ連鎖の諸性質が明かにされる。その際、吸収連鎖については、ある状態に吸収されて　そこに固着する確率が、時間の経過と共に　いかほどでも一に近づくということが、理論展開の出発点となるし、エルゴード連鎖については、たゞ一つの極限分布が存在して、その極限分布の各種の状態に対応する成分は　いずれも正であって零になるものはない、ということから出発して次々と色々な性質が導き出される。比較的単純な構造をもつ有限マルコフ連鎖の中に――あるいは単純な構造であるが故に――これ程さまざまの内部的諸関係が隠されているのであろうかと、読み進みながら常に新しい驚きを感じる。そこには、生理学の講義で人体機能の巧みさを聞いて驚嘆するのにも似たものがある。この感嘆は、さらに進んで第五章の後半から第六章にかけて、いわば頂点に達する。

第五章の後半では、マルコフ連鎖の時間的経過を逆行させたとき、それがマルコフ連鎖としての性質を保っているか否か、その性質を保つための条件は如何という、可逆性（reversibility）の問題が扱われる。これは連鎖の性質上、エルゴード連鎖について論じられているが、可逆のための必要十分条件は、「極限分布の成分を対角線的に並べて作った対角行列と、推移行列との積が対称行列になること」という　きれいな形で示される。この条件が満たされるとき、もとの連鎖と逆行連鎖の諸特性値の間に、どのような関係が成立するかという問題が吟味されていることはいうまでもない。あるエルゴード連鎖が可逆的のとき、もとの連鎖を一つの初期分布（これを確率ベクトル$\pi$で示す）から出発させた場合と、逆行連鎖を同じ確率ベクトル$\pi$から出発させた場合とでは、全く同じ性質の連鎖となる。殊に、出発点として、極限分布を示す確率ベクトル$\alpha$をとることにすれば、両者が同一の様相を示すことは当然であるから、エルゴード連鎖が十分な時間の経過後に、極限状態$\alpha$に達したならば、これを将来に向って展望的に眺めても、あるいは過去を振りかえって回顧的に眺めても同じ性格をもつことになる。そこでは、現在の状態が$s_i$であることを前提とするとき、次の状態が$s_j$になる確率と、一時点前の状態が$s_j$であった確率とが等しくて、多少奇抜な言い方をすれば、「確率論的に見て、過去を知れば未来が分る」状況になっている。

このような問題に続いて、第六章の前半では、吸収連鎖に関する手法をエルゴード連鎖に用い、逆にエルゴード連鎖の方法を吸収連鎖に適用すれば、さらに新しい理論的成果が得られることが示されている。次に同章後半では、有限マルコフ連鎖の結合（lumping）と拡大（expanding）という操作が説明され

る。

結合とは、有限個の状態を適当にまとめて新しい一つの状態とみなし、可能な状態の個数を減少させて新しい確率過程を作ることを言う。このとき新しい確率過程が、なおマルコフ連鎖としての性質を持っているか否かが問題となる。出発点における初期確率ベクトルが いかなるものであろうとも、新しい確率過程がマルコフ連鎖としての性質を持っているとき、もとのマルコフ連鎖を（単に）結合可能（lumpable）と呼び、ある特定の初期分布から出発するときにだけ、新しい確率過程がマルコフ連鎖として現われるならば、これを弱結合可能(weakly lumpable）と呼ぶ。前者については、吸収・正則・循環の型の如何を問わず、結合可能性の必要十分条件が示されており、その形は便宜上あとで紹介することにするが、後者については、正則連鎖についてだけ——しかも一つの十分条件が示されているに止まる。弱であると否とを問わず、結合可能な場合に、結合された新連鎖と、もとの連鎖との関係が解明されているのは当然であるが、後に示すように、結合可能性の条件がレオンチエフ・モデルの総計可能性（aggregation acceptability）の条件と共通したものを持っているのは興味深い。

たゞ、結合可能性を扱った第六章第三節「状態の結合」の初めの部分（一二三—一二四頁）の説明は簡単に過ぎて分り難い。同章第三節での「単なる」結合可能性と、第四節の「弱」結合可能性との関係を、はっきりさせるためにも、もう少し親切な解説が望ましい。殊に、弱結合可能性についての一三五—一三六頁の記述は、極限分布$\alpha$を初期ベクトルに選んだ場合に限定されているが、あるマルコフ連鎖が任意の一つの確率ベクトル$\pi$を初期ベクトルにとったとき弱結合可能であるならば、一三六頁(5)式の$\alpha$は$\pi$と書きなおすことができ、したがって、この書きなおされた式が「初期ベクトル$\pi$に関して」弱結合可能であるための十分条件を与えていることを指摘しておくべきであったろう。それでないと一三六頁前半の弱結合可能性に関する記述が、初期ベクトルとして$\alpha$を選ぶ場合にだけ成立するのか、他の任意の$\pi$を初期ベクトルにとっても成立するのかが、はっきりしない。

次に、拡大というのは、この書評の初めに記した例解で言えば、$s_1s_1$, $s_1s_2$, $s_1s_3$, $s_2s_1$……というように相連続する二つの状態の生起を以って一つの新しい状態と定義し、さらには、$s_1s_1s_1$, $s_1s_1s_2$,……というように相連続する三つの状態をもって一つの新しい状態と定義して、もとのマルコフ連鎖で考えていた状態を細分し、その推移の様相について一層詳しい知識を得ようとするものである。むろん拡大された連鎖を適当に結合すれば、もとの連鎖に立ち戻ることができるから、拡大は結合の逆操作と考えてよい。拡大についての理論は、正則連鎖の場合に限定されているが、拡大された連鎖と、もとの連鎖との関係から、標本観測値によってマルコフ連鎖の特性値を推定するための方法が得られることは、拡大の操作が決して無用の思考遊戯ではないことを教えている。

# 三

最後の第七章では、有限マルコフ連鎖の応用例が紹介されている。確率酔歩（random walks）、テニス競技の確率論的解釈、物理学における Ehrenfest の拡散モデル、遺伝学への応用、心理学の記憶理論（learning theory）への応用に続いて、以下に述べようとする二つ、階級間人口移動理論（mobility theory）への応用と、オープン・レオンチエフ・モデルへの応用が述べられている。前者が正則連鎖の応用であるのに対して、後者は吸収連鎖の応用になっている。たゞ同じくマルコフ連鎖の応用とは言っても、二つの場合では、だいぶ性格が違う。

階級間人口移動理論は、本質的には推移確率行列を用いての企業成長の理論(4)と全く同じである。本書の場合には、人口総数の一定不変が前提されているから、そのまゝの形では単なる例示的応用というに止まっているが、この点については、「潜在的登場者」（potential entrants）という概念を用いて、(5)別の論者により、最終的とは言えないが一応の解決策が示されている。人口移動理論については注記の二つの論文を指摘するに止め、以下ではオープン・レオンチェフ・モデルへの応用を簡単に紹介する。

$r$個の産業があるとき、各産業に対応して $s_1, s_2, \ldots\ldots, s_r$ という$r$個の状態を考える。第$i$産業で生産物を一ドル生産するには、第$j$産業の生産物が$q_{ij}$ドル必要であるとすると、第$i$産業で一ドル分の生産が行われる度に、第$j$産業へ$q_{ij}$ドルの貨幣が支払われる。$q_i=\sum_{j=1}^{r} q_{ij}>1$ ならば、第$i$産業では一ドルの生産のために一ドル以上の費用をかけることになり、その産業は成り立たないから、一般に $q_i \leqq 1$ としてよい。$\boldsymbol{x}=(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r)$ を各産業の生産価額を示すベクトル、$\boldsymbol{c}=(c_1, c_2, \ldots\ldots, c_r)$ を各生産物に対する最終需要ベクトル、$Q=(q_{ij})$ を生産係数行列とするとき、均衡条件は $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}Q+\boldsymbol{c}$ すなわち $\boldsymbol{x}(I-Q)=\boldsymbol{c}$ となる。もちろん$I$は単位行列である。経済学的に意味のある均衡解の存在条件というのは、任意の非負の$\boldsymbol{c}$に対して、たゞ一つの非負の$\boldsymbol{x}$が存在するための完全条件に外ならないが、これは当然、非負の逆行列 $(I-Q)^{-1}$ の存在条件を意味する。こゝで$r$個の産業のほかに新しい産業部門——これを銀行と呼ぶ——を考えて、これを状態$s_0$と対応させ、

$$P=\begin{array}{c} \\ s_0 \\ s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_r \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} s_0 & s_1 & & s_r \end{array}\\ \left(\begin{array}{c|c} 0 & 0\cdots\cdots 0 \\ \hline 1-q_1 & \\ 1-q_2 & Q \\ \vdots & \\ 1-q_r & \end{array}\right)\end{array}$$

という行列を考えると、$P$を $r+1$ 個の状態 $s_0, s_1, \ldots\ldots, s_r$ の間の推移行列とみなすことができる。$P$が$s_0$を最終状態とする吸収マルコフ連鎖の推移行列になることと、上記の「非負の$(I-Q)^{-1}$の存在」ということは同等になる。これを、経済学的な内容に則して言えば、どの産業に附加的需要が一ドル追加

されようとも、それが各産業の間を廻り廻って、終には　その一ドル紙幣が銀行$\boldsymbol{s}_0$の手に渡り、そこに止まるという条件と、任意の非負の最終需要$\boldsymbol{c}$に対して、一つの非負の均衡解$\boldsymbol{x}$が存在することとが同義になる。もちろん、行和が1を越えない任意の非負行列$Q$に対して、いつでも　この条件が満たされているわけではない。どこかへ追加需要として投入された一ドルのうちの幾分かでも、永久に一部または全部の産業の間を廻り続けて、いつまでたっても銀行の手に帰着しない体系ならば、$\boldsymbol{s}_0$を最終状態とする吸収マルコフ連鎖ではないし、このときには非負の$(I-Q)^{-1}$の存在が言えないから、非負の均衡解$\boldsymbol{x}$の存在も結論できない。しかし一定の産業を除外すれば、残りの産業に関しては任意の正の最終需要ベクトルに対して、常に一つの均衡解の存在することが証明できる。

そこで$r$個の産業のうちから$r'$個を選び出して、その$r'$個に関する$q_{ij}$の行列を$Q'$とするとき、非負の$(I-Q')^{-1}$が存在するようにするには、どのような方針で産業を選び出すべきかということが示される。こゝに選び出された産業体系についての逆行列$(I-Q)^{-1}$を$(n_{ij})$と書くと、この行列の第$i$行第$j$列元素$n_{ij}$は、マルコフ連鎖の理論によれば、状態$\boldsymbol{s}_i$から出発して状態$\boldsymbol{s}_0$に到着するまでの途中において、状態$\boldsymbol{s}_j$が平均何回実現されるかを示している。経済学のタームで言えば、第$i$産業に投入された追加需要一ドルが、平均$n_{ij}$回だけ第$j$産業に舞い戻ってきて、そこで総計$n_{ij}$ドルの需要増加を惹き起す。したがって行列$(n_{ij})$は、第$i$産業へ一ドルの需要が追加されたとき、第$j$産業の受ける乗数効果を全産業体系に関して一括して示していることになる。

この連鎖に対して結合の操作を行い、数個の状態をまとめて一つの新しい状態とすることは、数個の産業を総計して(aggregate)一つの新しい産業を考えることに等しい。一例として$\boldsymbol{s}_0, \boldsymbol{s}_1, \cdots\cdots, \boldsymbol{s}_5$の六つの状態を、$\boldsymbol{A}_0=\{\boldsymbol{s}_0\}$, $\boldsymbol{A}_1=\{\boldsymbol{s}_1, \boldsymbol{s}_2\}$, $\boldsymbol{A}_2=\{\boldsymbol{s}_3, \boldsymbol{s}_4, \boldsymbol{s}_5\}$という三つの状態にまとめる場合を考えると、(弱結合ではない通常の)結合可能性の完全条件は、六次の正方行列として示されている推移確率の行列$P$と、

$$V=\begin{array}{c} \\ \boldsymbol{s}_0 \\ \boldsymbol{s}_1 \\ \boldsymbol{s}_2 \\ \boldsymbol{s}_3 \\ \boldsymbol{s}_4 \\ \boldsymbol{s}_5 \end{array}\begin{array}{c} \boldsymbol{A}_0 \quad \boldsymbol{A}_1 \quad \boldsymbol{A}_2 \\ \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \end{array}$$

という行列との積$PV$を作るとき、これが

$$PV=\begin{array}{cc} & \\ \boldsymbol{A}_0 & \boldsymbol{s}_0 \\ \boldsymbol{A}_1 & \begin{array}{c}\boldsymbol{s}_1 \\ \boldsymbol{s}_2\end{array} \\ \boldsymbol{A}_2 & \begin{array}{c}\boldsymbol{s}_3 \\ \boldsymbol{s}_4 \\ \boldsymbol{s}_5\end{array} \end{array}\begin{array}{c} \boldsymbol{A}_0 \quad \boldsymbol{A}_1 \quad \boldsymbol{A}_2 \\ \left(\begin{array}{ccc} a & d & e \\ \hline f & b & g \\ f & b & g \\ \hline h & k & c \\ h & k & c \\ h & k & c \end{array}\right) \end{array}$$

という形になることである。こゝに$a, b, c, \cdots\cdots, h, k$と同じ文字で埋めた個所の元素は、各文字毎にそれぞれ同じ値をとるも

のとする。これを荒憲治郎氏の証明した総計可能性の条件(6)と比較してみると、後者では$a$・$b$・$c$の三文字で示した対角線部分の各文字毎の値の同一性が要求されているだけで、他の部分の値は問題とされていない。それは後者の場合には、最終需要の及ぼす諸結果の総計量だけが問題とされているのに対して、マルコフ連鎖の結合可能性の場合には、これらの結果が時間の経過に伴って次第に発生してくる過程をも考に入れているからである。

以上のように、レオンチエフ・モデルへの応用は、同じくマルコフ連鎖の応用とは言っても、確率論的な問題への適用とは全く趣きを異にしているが、マルコフ連鎖に関する定理を他の確率論以外の分野にまで応用できるという点で、その経済学的意味と共に興味深いものがある。

## 四

本書は、John L. Kelly と Paul R. Halmos を編集者として企画されている大学用数学教科書叢書の中の一冊であり、本書の二人の著者たちが G. L. Thompson と三人で書いた Introduction to Finite Mathematics, Prentice-Hall, 1957 は最近邦訳され、以上の三人に H. Mirkil を加えて四人で書いた Finite Mathematical Structures, Prentice-Hall, 1959 は Asian edition によって大量に輸入されるなど、著者たちの仕事は我国でも最近注目されている。本書については、上記のように二、三説明の簡単すぎる部分もあるが、これらの数個所を除いては、記述は全体を通じて大変分りやすく、常に例解を示して理解を助けることを忘れない。各章の終りにつけられた練習問題も、一見するところ平凡に見えるが、本文で述べた点を読者に徹底させる為の工夫がなされている。

たゞ、本書で証明なしに使った予備定理とか、本書の程度を越える問題について結果だけを記した場合に、参考文献が一切記載されていないのは、教科書とは言いながら甚だ不便である。殊に、序文において、本書で展開した方法は高速度計算機を用いて問題を解く場合に便利であって、著者達たちは IBM 704 のためのプログラミングを工夫したところ非常に効果的であったと記されながら、その具体的内容も文献も指示されていないのは、特に残念である。しかし本書は、そこで展開されている数学的内容から見ても、マルコフ連鎖の応用の広さから見ても、まことに興味深く有益な書物であると断ずることができる。

(1) 有限マルコフ連鎖の理論を景気循環論に応用しようとする試みとして、次の論文がある。
森嶋通夫『数値的景気循環論と位相的景気循環論』同氏著「産業連関と経済変動」大阪大学経済学部社会経済研究室研究叢書第四冊、昭和三十年三月刊、一六一—一八三頁。この文献を教示された荒憲治郎氏に感謝する。

(2) この名称は、必ずしも すべての数学者によって共通に用いられているものではない。W. Feller, An Introduction to Probability Theory and Its Applications,

Vol. I, 2nd ed., New York, Wiley, 1957 では、本文に言う regular, cyclic, ergodic に対して、それぞれ ergodic, periodic, persistent という名称を用いている。Kemeny and Snell の regular が Feller の ergodic であり、前者の ergodic は後者の persistent である。なお Feller は、右書第一版 (1950) で recurrent と名づけたものを、第二版 (1957) では、上のように persistent と改めた。

(3) この極限分布の確率ベクトル$\boldsymbol{\alpha}$は、本文(3)の推移行列を$P$で示すとき、$\boldsymbol{\alpha}P=\boldsymbol{\alpha}$ を満すような$\boldsymbol{\alpha}$、すなわち$P$の固有値1に対応する固有ベクトルを、その成分総和が1になるように正規化することによって求められる。本書では$\boldsymbol{\alpha}=(a_1, a_2, a_3)$ とおき、$\boldsymbol{\alpha}P=\boldsymbol{\alpha}$ から出る三個の一次式 ($P$の行和が1のため、そのうち独立なものは二個になる)と、$a_1+a_2+a_3=1$ とを連立して$\boldsymbol{\alpha}$を求める方法をとっている。

荒憲治郎『輸入制限と国際収支』一橋論叢、第四十四巻第五号、昭和三十五年十一月号、六八一—八〇頁、では、R. Frisch, "Circulation Planning, Part III. Mathematical Appendix." Econometrica, Vol. 2, 1934, p. 421—435. に基づき、単位行列を$I$で示すとき、$I-P$ の余因子行列の任意の行 (いずれも同じ行ベクトルになる) を、成分総和が1になるように正規化して$\boldsymbol{\alpha}$を求める方法が示されている。その証明は Frisch の論文にもあるが、ここでは、いま紹介している本に記された定理を用いて、簡単な別証を与えておく。ベクトル$\boldsymbol{\alpha}$が存在すること (本書七〇頁、定理4・1・4) から、$P$の固有値1の存在が言えて、$|I-P|=0$. したがって、$I-P$ の余因子行列を$T$とするとき、$T(I-P)=0$, これから $T=TP$ を得て、$T$の任意の一つの行ベクトルを正規化すれば$\boldsymbol{\alpha}$になることが分る。同時に、$(I-P)T=0$ から $T=PT$ を得るので、$T$の列ベクトルは同じ常数を縦に並べたものになる。(本書七一頁、定理4・1・7) したがって、$T$の各行は実は全く同じ行ベクトルで、これを正規化すればよい。

(4) 高橋長太郎『企業の成長』経済研究、第十一巻第四号、昭和三十五年十月号、一橋大学経済研究所編、岩波書店、四二九—四三二頁。

(5) Irma G. Adelman, "A Stochastic Analysis of the Size Distribution of Firms." Journal of the American Statistical Association, Vol. 53, 1958, p. 893—904.

(6) K. Ara, "The Aggregation Problem in Input-Output Analysis." Econometrica, Vol. 27, 1959, p. 257—262.

**附記**　この書評は、昭和三十五年度文部省科学研究費(試験研究)による研究への協力研究として書かれたものである。

(一橋大学助教授)