《研究ノート》

ある種の變係線型函數方程式について

山田欽一

一　問題

平均生産費をその一例とする、いわゆる平均概念が經濟學の古い數學的考察の中で大きな役割を果したことは周知の通りである。

有用性と稀少性に基く價値を把握して、限界効用の概念を構成し、この概念を驅使して經濟行動の根柢を深く掘り下げたのは心理派の大きな功績であろう。この限界効用を一般化した限界概念は經濟理論の數學的展開で不可缺の道具となっている。

つづいて重要視されるに至った彈力性という概念は相對的増分比の極限値として生れたのであろうけれども

$$\frac{\Delta y}{y} \Big/ \frac{\Delta x}{x}$$

を

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \Big/ \frac{y}{x}$$

と書き直してみると、彈力性を限界概念と平均概念とから構成したものと考えることができる。

また、彈力性の概念は多くの經濟函數の種々の性質を簡明に把握し、あるいは經濟學の重要な命題を簡潔に表現するのに利用されている。

ここに、彈力性がみたすべき關係を指定して、そのような彈力性をもつ函數を求めるという問題を話題にすることの意義があるといえよう。

この問題は上に説明したことによって、「限界値と平均値がみたすべき關係を指定して、そのような限界値と平均値とをもつ函數を求める」という問題の特別な型であると考えることができる。

この小篇では「限界値の増分がいつも平均値の増分より大きい（小さい）函數を決定する」ことを考えてみる。

ここでは「大きい」という場合だけについて記るす。

xの函數をy、xの二つの値x_1、x_2に應ずるyの値をy_1、y_2とし、なお$x_1<x_2$とする。

こうして、上の問題は

$$\frac{\Delta y_2}{\Delta x_2}-\frac{\Delta y_1}{\Delta x_1}>\frac{y_2}{x_2}-\frac{y_1}{x_1} \qquad (1)$$

となるyを求めることになる。

二　連續の場合

(1)をx_2-x_1（>0）で割って

$$\frac{\dfrac{\Delta y_2}{\Delta x_2}-\dfrac{\Delta y_1}{\Delta x_1}}{x_2-x_1}>\frac{\dfrac{y_2}{x_2}-\dfrac{y_1}{x_1}}{x_2-x_1} \tag{2}$$

となる。ここで $x_2\to x_1$ とし、x_1 を x、y_1 を y と書けば(2)は

$$\frac{d^2y}{dx_2}\geqq\frac{d}{dx}\left(\frac{y}{x}\right)$$

となり、變形して、

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=p(x) \tag{3}$$

$$p(x)\geqq 0$$

となる。

(3)は古來有名な Euler の微分方程式であり、その解は

$$y=Y(x)+x(c_1+c_2\log x)$$

である。ここに $Y(x)$ は(3)の特別解、c_1、c_2 は任意定數である。

三　離散の場合

定差法の慣習によって、$\Delta x=1$ とし、なお、x_1 を x、y_1 を y と書けば、(1)は

$$\Delta^2y>\Delta\left(\frac{y}{x}\right) \tag{4}$$

となる。y を $f(x)$ と書いて(4)を變形すれば（便宜のため $x>0$ とする)、

$$x(x+1)f(x+2)-(2x^2+3x)f(x+1)+(x+1)^2f(x)=p(x) \tag{5}$$

$$p(x)>0$$

を得る。

さらに

$$f(x)=xg(x) \tag{6}$$

とおいて、(5)を書きなおすと、

$$(x+2)g(x+2)-(2x+3)g(x+1)+(x+1)g(x)=x^{(-2)}p(x)$$

となる。これは

$$\Delta\{(x+1)(g(x+1)-g(x))\}=x^{(-2)}p(x) \tag{7}$$

に他ならない。(7)から

$$g(x)=\int\frac{\int x^{(-2)}p(x)\Delta x}{x+1}\Delta x+w_1(x)\int\frac{\Delta x}{x+1}+w_2(x)$$

を得る。ここで $w_1(x)$、$w_2(x)$ は周期1の任意周期函數である。

これを(6)に入れて

$$f(x)=x\left(\int\frac{\int x^{(2-)}p(x)\Delta x}{x+1}\Delta x+w_1(x)\int\frac{\Delta x}{x+1}+w_2(x)\right)$$

が(4)の解である。

四　註　釋

ここで $p(x)$ は非負値または正値函數であり、これが既知であれば、y が積分または和の形で表わされることになる。そして、その結果は經營學または經濟學のモデル構成に使うこと

ができよう。これがこの小篇を公けにした一つの理由である。

經營學また經濟學への應用數學で話題になるのは、ほとんど定係線型函數方程式である。有名な Euler の微分方程式(3)や、あまり見掛けない變係線型定差方程式(5)が登場して來ることも面白いと思った。これがこの小篇を公けにしたもう一つの理由である。

註 この問題は一橋大學經濟學部での講義應用數學を聽講する一學生からの質問が切掛となったものである。

この小篇は數理經濟學研究會で報告するためにまとめたものである。

(一九六〇・六・二七)(一橋大學教授)