ブール代數に擬項を導入することとその應用

山田 欽一

全稱命題はブール代數（可補分配束）の等式で表わされる。そのため全稱命題の問題の多くがこの代數の計算で機械的に處理できる。特稱命題の混った問題はそうはゆかない。本稿は特稱命題を等式として扱うことができるようにならないかどうかを問題にする。このために導入したのが擬項という考えである。これを使って一つのかなり廣汎な問題が處理できた。

一　はじめに

筆者は本誌第二一巻第一・二號で「可補分配束論の初等的應用」（一）と題して、代數系としてのこの束の中での計算技術と方程式理論がどのように應用できるかを解說し、その實例を示した。その「初等的應用」とは、數學の他の分野や、他の學問分野の立論への應用ではなくて、もっと日常的な話題への應用という意味であった。

一つは與えられた一組の條件と同義でしかもなるべく簡單な一組の條件を定める問題であってこれを條件整理とよんでおいた。これには可補分配束での計算技術、特に等式の變形技術が大きく役立つ。他の一つは關係抽出とよんだもので、いくつかのものの間に成立つ一組の關係を與えて、指定したいくつかのものだけの間に成立つ關係を抽き出す問題である。これはある意味で、間接推理の問題を一般化したものであって、可補分配束での方程式の可解條件が應用される。殘る一つの問題は與えられたいくつかのものと指定した關係に立つようにいくつ

かのものを組立てることであって、これを集團構成とよんだ。これには可補分配束での方程式の根の公式が活用できる。

可補分配束論がこのように使えるのは、一つには元來命題算的に解釋しなくてはいけないものであるこの理論を述語算的にも解釋しなおすことができるということによるし、また一つにはこの理論に集合算的解釋を付けることができることにもよるのである。

すなわち條件整理の問題では與えられた一組の條件一つ一つを述語算的に解釋した可補分配束論での等式として表わすことが手始めになっている。關係抽出の問題ではこの手法がもっと混み入つた仕方で驅使される。集團構成の問題では、ものの集まりを可補分配束の元とみるので、集合算的解釋に立つが、これにつづく手順では論理的解釋が入いり、最後にもう一度集合算的解釋に戻る。

二　定義、定理とその解釋

前稿の所説で基礎となった定義、それから誘導された定理とその解釋とをここに一括しておく。

可補分配束とは、次の諸條件をみたす二種の演算$\cup$と$\cap$とが定義されている集合Bのことである。Bの元はラテン小文字で表わす。

$C_\cap$　$a\cap b=b\cap a$　はBの確定元である。

$C_\cup$　$a\cup b=b\cup a$　はBの確定元である。

$A_\cap$　$(a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c)$

$A_\cup$　$(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c)$

$D_\cap$　$a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c)$

$D_\cup$　$a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$

$B_\cap$　$a\cap(a\cup b)=a$

$B_\cup$　$a\cup(a\cap b)=a$

$E_\cap$　すべてのaに對して　$a\cap u=a$　となるuがある。

$E_\cup$　すべてのaに對して　$a\cup z=a$　となるzがある。

N　どのaについても　$a\cap a'=z$, $a\cup a'=u$　の兩立するa'がある。

この定義から、uとzがそれぞれ唯一つであること、またどのaについてもa'が唯一つに定まることが證明できる。uを1、zを0とかき、a'をaの補元という。

また次の諸定理が證明できる。

1.　$a\cap a=a$　　$a\cup a=a$

2. $a\cap 0=0$ 　　$a\cup 1=1$
3. $a=(a\cap b)\cup(a\cap b')$ 　　$a=(a\cup b)\cap(a\cup b')$
4. $a\cap(a'\cup b)=a\cap b$ 　　$a\cup(a'\cap b)=a\cup b$
5. $(a\cap b)'=a'\cup b'$ 　　$(a\cup b)'=a'\cap b'$
6. $a''=a$
7. $a=a\cap b$ は $a\cap b'=0$, $a'\cup b=1$, $a\cup b=b$ と同義である。
8. $a\cap b=0$ は $a=a\cap b'$, $a'\cup b'=1$, $a\cup b'=b'$ と同義である。
9. $a=b$ は $(a\cap b')\cup(a'\cap b)=0$ と同義である。
10. $a=0,\ b=0,\cdots\cdots,\ c=0$ と $a\cup b\cup\cdots\cdots\cup c=0$ と同義である。

B の元と不定元 x に $\cup$ と $\cap$ とを有限回施してできる式を x の函數とよび $f(x)$ とかく。

11. $f(x)=(f(1)\cap x)\cup(f(0)\cap x')$
12. $f(x)=0$ となる x があるための條件は、$f(1)\cap f(0)=0$ である。
13. $f(x)=0$ で $f(1)\cap f(0)=0$ ならば

$$x=f(0)\cup(f'(1)\cap u)$$

u は任意元である。

11. 12. 13. は次のように擴張できる。

14. $f(x,\ y)=(f(1,\ 1)\cap x\cap y)\cup(f(1,\ 0)\cap x\cap y')$
$\cup(f(0,\ 1)\cap x'\cap y)\cup(f(0,\ 0)\cap x'\cap y')$
15. $f(x,\ y)=0$ となる x と y があるための條件は $f(1,\ 1)\cap f(1,\ 0)\cap f(0,\ 1)\cap f(0,\ 0)=0$ である。
16. $f(x,\ y)=0$ で $f(1,\ 1)\cap f(1,\ 0)\cap f(0,1)\cap f(0,0)=0$ ならば

$$x=(f(0,\ 0)\cap f(0,\ 1))\cup((f'(1,0)\cup f'(1,\ 1))\cap u)$$
$$y=(f(0,\ 0)\cap f(1,\ 0))\cup((f'(0,\ 1)\cup f'(1,\ 1))\cap v)$$

u と v は任意元である。

この三つの定理は n 元方程式の場合に擴張できる。[二]

條件整理の問題では7、8、9、10が一般基本的に大切であり1から6までが計算技術的に大切である。すなわち條件一つ一つを7または8で式に書き表わし、9によって右邊が0である形（否形という）になおす。次に10を使って、與えられた一組の條件を一つの式にまとめる。次は1から6までを使ってなるべく簡單な形になおすのである。關係抽出の問題では、與えられた一組の關係を1から10までを使って一つの否形式にまとめる。次に、12、15またはその擴張定理によって不要の文字を消

去して、指定したるものだけの間に成立つ關係を示す否形式が得られる。集團構成の問題では1から10までによって、與えられたいくつかのものと組立てようとするものとの間に成立つように指定した關係を一つの否形式にまとめる。この式は與えられたものを既知元、組立てようとするものを未知元とする方程式に他ならない。これを13、16またはその擴張定理によって解くと、組立てようとするものの構成法が明らかになる。

　これらの所論を應用するためこれらの定義や定理を解釋する。命題算的には可補分配束の元が命題を表わし、補元がその否定、$a \cup b$ が「a または b」、$a \cap b$ が「a そして b」を表わす。述語算的には、7の各式が「a はすべて b である」を表わし、8の各式が「a はすべて b でない」を表わすとみるため、可補分配束の元は命題の項を表わすことになる。可補分配束の元を集合、補元を補集合、$\cup$ を合併集合を作る操作、$\cap$ を共通集合を作る操作とみれば集合算的解釋である。

　前稿の意圖は可補分配束論のこのような解釋によって上記のような問題を機械的に計算で處理するところにあった。それはまた、既知事項の確證という整理的な役割をこえて、未知事項の探索という產出的な役割をもねらっていたのである。たとえば「a はすべて b であり、b がすべて c でないから a がすべて c でない」ことを機械的な計算で再確認するのではなくて、「a がすべて b であり、b がすべて c でないとき、a と c はどんな關係にあるだろうか」という種類の問に機械的な計算で答えようとするのである。

三　問　題

　關係抽出は多くの項を一擧に扱うという點で間接推理の一般化であり、整理的な役割よりも產出的な役割を果すという點で間接推理の强化でもあった。しかし、前稿の所論の應用には一つの避けられない限界があった。それは可補分配束の等式理論だけを基としたので、不等式で表わされるもの——たとえば、述語算の特稱命題——が導入できないという點である。もちろん個別的には處理できる場合が多い。たとえば「ある a は b である。b はすべて c である。だからある a は c である。」という三段論法は次のように處理できる。$a \cap b \neq 0,\ b = b \cap c$ の第二式を第一式に入れて、$a \cap b \cap c \neq 0$。$a \cap c = 0$ とすると、

$a\cap b\cap c=0$ となって矛盾するから $a\cap c\neq 0$ である。しかしこの手法には次のような缺點がある。すなわち、歸謬法によっているという點である。歸謬法は命題算的に裏付けられるものであるから、決して不當とはいわない。しかし、證明しようとする歸結がわかっているときだけに役立つ證明法であって、確證、整理のための推論方式である。探索、發見のためには力の弱い方式であって、「ある a が b であり、b がすべて c であるとき、a と c はどんな關係にあるだろうか」という種類の問には機械的に答えることのできない方式である。

可補分配束論では、不等式を等式になおすことができる。すなわち $a\leqq b$ を $a=a\cap b$ になおすのである。しかし、これは $a=0$ でないときに限って有效な變形であって、$a=0$ のときには上の第二式が $0=0$ という採るにたりない式になってしまう。そこで $A\neq 0$、すなわち $A>0$ という形の式は何か特別の工夫をしない限り、等式になおしても無意味になってしまう。

右邊が0である數個の等式は10によって、これと同義な、そして右邊が0である一つの等式にまとめることができた。しかし一つでも不等式が混っているとそうはいかない。すなわち、$A_1=0,\ A_2=0, \ldots\ldots, A_n=0$ は $A_1\cup A_2\cup\ldots\ldots\cup A_n=0$ と同義になるけれども、$B_1>0, B_2=0, \ldots\ldots, B_n=0$ は $B_1\cup B_2\cup\ldots\ldots\cup B_n>0$ と同義にはならない。

したがって、條件の中に一つでも特稱命題が混っていると、特別な工夫をしない限りこれを一つの式にまとめて、條件整理や關係抽出、集團構成に使ったような手法を使うことができない。

それでは、特稱命題も混った場合について、前稿同様の方法が使えるようにするにはどうすればよいか。またその工夫が出來たとして、前稿の三種の問題がどう處理できるか。これらが本稿の問題である。

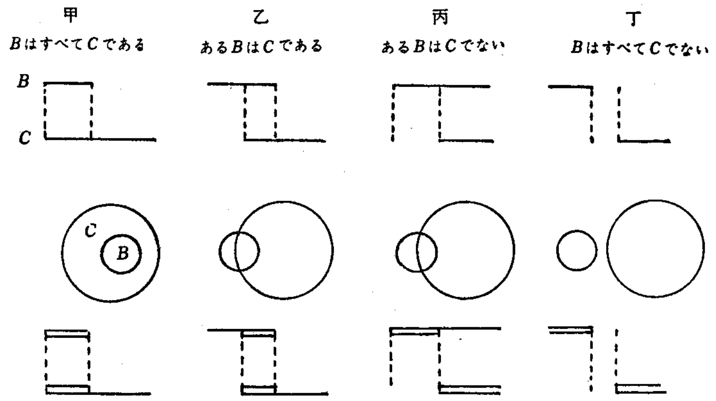
四　特稱命題の表示と處理

そこでいままで特稱命題をどのように表示して來たかをふりかえり、そのように表示した上でどのように特稱命題の入っている問題を處理して來たかを吟味することにする。

Boole の Mathematical Analysis では一定の對象領域1からなにかの目安によって對象を選び出すという操作を文字で表わす。文字の並記はそれぞれの文字が表わ

す選び出しの繼續を表わす。たとえば一定の對象領域からXであるものを選び出すことをxで、Yであるものを選び出すことをyで表わすと、xyはYであるものを選び出し、その中からまたXであるものを選び出すことを表わすのである。文字とその並記をこのように解釋した上で、$xy=yx$ や $xx=x$ などが認めねばならぬ計算規則として採擇される。(三)「XがすべてYである」とは「一定の對象領域からXを選ぶこととYを選んだ中からXを選ぶことが同義である」ことに他ならないという注釋によって、全稱肯定命題「XはすべてYである」は $x=xy$ で表わされるとし、通常の代數計算との類似並行を重んずるブールはこれを $x(1-y)=0$ と書直す。このように選擇記號とみてきた記號を全稱否定命題の導入にあたってはむしろ選擇によって新たに定まった對象領域とみている。「XがすべてYでない」とは「Xであるものの領域とであるものの領域とに共通なものがない」ことに他ならないという注釋によって全稱否定命題「XはすべてYでないは $xy=0$ で表わされるとする。すなわちこの記法の注釋では文字の並記は二つの對象領域からその共通領域を作る操作を意味することになっている。「あるXがYである」ときにはX、Y兩領域に共通なものがあって、これが一つの對象領域Vを構成しているから、Vに應ずる選擇記號に戻って、それをvとかき、この特稱肯定命題は、$xy=v$ で表わされるとする。さらにこの yを $1-y$ にかえた $x(1-y)=v$ は「あるXはYでない」という特稱否定命題を表わすとみる。なお $xy=v$ から $vx=vy$ が得られ、$x(1-y)=v$ から $vxy=0$ が得られることに基いて「v……」を「ある……」と讀んでよいとする。(四)このような記法による命題の表示と方程式の解法とを使って、直接推理と三段論法の理論を整理している。(五) Mathematical Analysis の思想と技術とを一般化した Laws of Thought では量と質でわけた四種の命題の表示として、$x=vy$, $x=v(1-y)$, $vx=vy$, $vx=v(1-y)$ を併用している。(六)

ブールの思想を批判的な態度で承け繼いだ Schröder はその Algebra der Logik でブールによる特稱命題の表示を次のように批評している。ブールが「あるAはBである」という命題を $wA=wB$ で表わしていることを指摘した上で「……このような仕方が不首尾であることは $w=0$ に對してこの式が恒等的に、すなわち、あるA

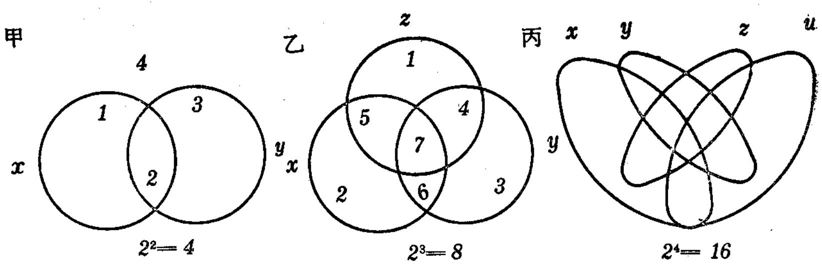


第1圖

がBであろうとなかろうと満たされてしまうことを見れば、ただちに明らかになろう。

$wA=wB$によってはAとBの間の關係は何一つ表わされはしない」と斷じている。さらにまたブールの記法では、特稱命題の表示が一般に不可能であることを論理函數展開の理論によって明らかにした上で、この不備を救うには等しくないことを示す記號が必要となり、またそれさえあれば十分であるといっている。すなわち$AB\neq 0$が特稱肯定命題の表示であり、言葉による表示にくらべて簡潔であるという點ですぐれている他に對稱的な關係を對稱的に再現している點でもすぐれているとする。[七]

Leibnitz は圖形によって、推理とくに三段論法を表わそうと試みた。Euler に先立って三段論法のすべての格式を圓で圖示することを工夫したのである。後には圓でなく直線を用いている。すなわち概念の外延を一直線上の多くの線分で表わし、これら線分の重なり具合で四種の命題を表わしたのである。この方法は多くの概念の外延を一つの直線上に記入するため、括弧や分點で區別せねばならず記入が錯綜してしまう。これを避けるため、ライプニッツは各概念の外延を示す線分を分離し重なり具合を點線で明示するように改良した。この圖示は圓表示よりすぐれている。すなわち圓表示では「あるBはCである」と「あるBはCでない」とが同じ圖で表わされるのに對してこの圖式では明確に別になっている。また



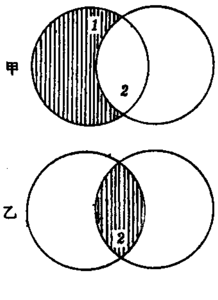
第2圖

肯定命題では點線が兩方の實線にかかり、否定命題では點線が少くも一方の實線の外に出ていて、點線が命題の質を明示しているのもこの圖式の利點である。なお工夫をこらして主題の部分を明示するため二重線を用いている。これはまた二重線がどの程度に及んでいるかによって周延と不周延をも示す結果になっている。ライプニッツはこのような命題表示を二組併記して三段論法を確認したのはもちろん、提示された格式が正しいかどうかを確かめるためにもこの圖式を使っている。(八)

命題の圖示としてはオイラーの圓表示を引用するのが普通であるけれども、ライプニッツの線分表示の方がすぐれているので、ここにはふれないことにする。

ライプニッツ・オイラーの圖式には大きな缺點がある。それは問題一つ一つについて長短様々の線分なり、大小様々の圓なりを用意してそれらを與件を表示する位置に、しかも一般性を損わぬように畫かなくてはならないことである。とくに一般性を損わないという注意は最も大切でまた最も困難な事柄である。線分表示では三概念のときでさえ一般包括的な場合を圖示することが困難である。圓表示では四概念のとき、一般的な重なり具合の圖を畫くことができなくなる。Venn は問題一つ一つについて異った圓表示を用意するという不便を避けるため、對象領域全體を一般的な仕方で分割するような圖式をまず準備した。すなわち n 概念のときには、對象領域全體を 2^n 個に分割するような圖式を前以て作っておくのである。たとえば n が2、3、4の場合についてヹンが Symbolic Logic で工夫した基本圖は第二圖の通りである。次の問題はこのような分割基本圖を使って、四種の命題をどのように表示するかということである。「x が

すべてyである」とは「yでないxがない」ということに他ならないから第二圖甲の1の部分を抹殺する。したがって第三圖甲がこの全稱肯定命題を表わすことになる。「xがすべてyでない」とは「xであってyでもあるものはない」ということに他ならないから、第二圖甲の2の部分を抹殺する。したがって第三圖乙が全稱否定命題を表わすことになる。ライプニッツ・オイラー圖式ならば全く異った圖式を用意した二つの場合について一律にすべての場合を通じて第二圖甲を用意しておけばよいというのがヱン圖式の利點である。特稱命題を表示することの困難さをヱンは次のように説明する。すなわち、全稱命題は端的に抹殺（1や2の部分を消すこと）で表わされる。したがって特稱命題は抹殺しないということで表わされるのであるが、抹殺しないということはどの一部かを殘すということでありながら、どこを殘さねばならぬかということを、明示しないかぎり表示することはできない。ここに特稱命題を圖示することの困難さがある。しいて表示するとすれば、特稱命題によって、抹殺もしないし、白紙のままでもおかないことになる區分へしかるべき記號を記入することになろう。[九] なおヱンは四種の命題の式による表示としては $x\bar{y}=0$, $xy=0$, $xy>0$, $x\bar{y}>0$ を使っているがこれは特稱命題を全稱命題の否定として把握していることに他ならない。[一〇]



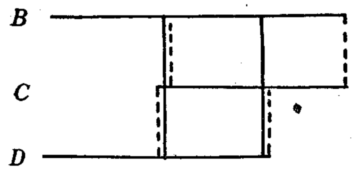
第3圖

論理學の諸問題についてのアリストテレスの所論は變項を使った形式論であるという點と、自明な公理を證明なしで採擇してそこからの有限回の手續で定理を誘導するという公理體系の體裁をとっているという點から見て、すぐれて近代的であるとみなされている。[一一] また現代の記號論理學の立論でも、この手法に則り、現代的記號を活用して推理論を展開するのが慣習になっている。その場合、特稱命題の導入の仕方は學者によって異なる。たとえば、アリストテレス研究で有名なŁukasiewiczは全稱肯定命題と特稱肯定命題とを基本項として採用した上で、二種の否定命題を定義している。[一二] また古典形式論理學について多くの研究を成し遂げたBocheńskiはア

リストテレスが特稱否定命題を全稱肯定命題の否定としたのに倣うとともに特稱肯定命題を全稱否定命題の否定として定義している。(一三)

このように導入し、表示した特稱命題を推理構成の上でどのように、とくにどの程度機械的に活用處理して來ているかをたどって見よう。

まず、ブールは特稱肯定命題 $xy=v$ の形が x、y について對稱的であることから、この命題は單純に換位できるという直接推理の一法則を裏付ける。また、全稱肯定命題 $x(1-y)=0$ を x について解いて $x=vy$ を出し、これを「ある y は x である」と讀み、この命題が限量換位できるという。(一四)また $y(1-x)=0$ と $vx=vy$ とから y を消去して、$vz(1-x)=0$ を出し、これは「y がすべて x、ある z が y ならば、ある z が x である」という間接推理 (Darii) に他ならないとする。(一五)

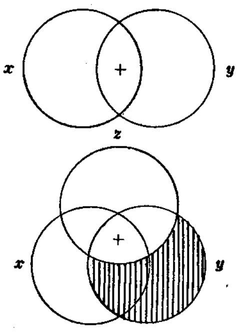


第 4 圖

シュレーダーでも、式の對稱性から特稱肯定命題の單純換位可能性を斷定している點は同じである。しかし、特稱命題を不等式で定義することによって、全稱肯定命題の限量換位では明言していなかった前提が潜入して了っていることを指摘している。他方 Ladd の三段論法論を推して、$(\beta\bar{\gamma}=0)(\alpha\gamma\neq 0)\in(\alpha\beta\neq 0)$ で $\alpha=a, \beta=c, \gamma=b$ とおいたものが「b がすべて c、ある a が b ならばある a が c である」という三段論法に他ならないとしている。(一六)

ライプニッツ・オイラーの圖式では周知のように、所與の命題を一つ一つ、その一般性をくずさぬように（不當な特殊前提を持ち込まぬようにということを含めて）圖示した上で、その全體から所期の結論を讀みとることになる。たとえば特稱肯定命題の單純換位性は第一圖乙から説明し、Darii（C がすべて B、ある D が C であればある D が B である）は第四圖で示すことになる。(一七)

ヱン圖式では命題が一般に用意された基本區分圖の抹殺、殘存で示されるから、所與の條件を抹殺（影をつける）と殘存（十號を記入する）で基本區分圖の上に一括表示していて、そこから結論を讀み抽くことになる。たとえば、特稱肯定命題の單純換位性は第五圖甲の對稱性が示し、「y がすべて z であり、ある x が y であるときあ



第５圖

る x が z であるという Darii は同圖乙が示すことになる。

最後に現代記號論理學での Darii の誘導をみると、たとえば、ボヘニュスキーではロギスティークの方法で[18]、Datisi と特稱肯定命題の單純換位性を豫め確立しておいて、それから誘導している[19]。

五　批　判

このように特稱命題の表示と處理をたどってみるといろいろの利失があるように思える。

シュレーダーやボヘニュスキーの方式は特稱命題を全稱命題の否定として導入している點でアリストテレスの考えを承け繼ぐものであると共にすぐれて形式的な導入である[20]。ただそれを直接推理論また間接推理論の中で扱う段になると、「否定」で導入したために、シュレーダーの代數學では等式理論で一貫することが困難となり、

$(\beta\gamma=0)(\alpha\beta=0)\Subset(\alpha\gamma=0)$ のいわば歸謬的變形であるという結果になっている。ボヘニュスキーの立論はロギスティーク法によっているために、採擇した公理または既設の定理への代入と推理則とを巧みに使って、特稱命題の入った推理形式を誘導するという道行になる。兩方式とも結論がわかっているときには、まことに奇麗で確かな方式ではあるが、まだわからない結論を捜し出すには、たいへん無力な方式である。すなわち、シュレーダーの場合には歸謬法的である故に結論がわかっていなくては一歩もふみ出せないし、ボヘニュスキーの場合には分離則[21]によるので、結論がわかっているということはもちろん、結論よりも強い立言で、しかもその成立のわかっているものが見付かるということが必要になるのである。「結論を知らずにいて、そこへ計算で機械的に到達させてくれるような方式であってほしい」という意味でこのような行き方は避けたい。

ブールの立論は計算だけで純形式的に事を運んでいる點がすぐれている。しかしブールのいう不定項 v の意味が首尾一貫していない。すなわち、特稱肯定命題を xy

$=v$ で表わしたときには v はあくまで xy の別名にすぎなかった。ところが、全稱肯定命題の限量換位を裏付ける、ときに入ってくる論理方程式の根の公式中の不定係數とこの v を同一視してこの係數自身を「ある……」と讀んでいる。ところが論理方程式の根の公式に入ってくる不定係數は數學でいう任意定數であって、その解釋は全く任意である。したがって極端な解釋として0としてもよいのである。ところが、特稱命題の表示に使う v は0であってはいけない。それは $xy=v$ は v が0でないときにだけ特稱（肯定）命題を表わし、v が0になると全稱（否定）命題になってしまうからである。なおブールの不定係數にはもう一つの不都合がある。すべての Y が X であることを $y=vx$、すべての Z が Y でないことを $0=zy$ とかき、この二つから $vzx=0$ を出し、これを「ある X は Z でない」と讀め、「ある Z は X でない」と讀んではならないといっている(三二)。vzx は $(vz)x$ と讀んでも $(vx)z$ と讀んでもよいようであってほしい。形式でおしとおす科學の中で上のような讀み方についての約束が必要だということとは不都合な話である。

圖示による方法としてはヱン圖式が最上であると考えるので、それを吟味して見る。この圖式が項の多い場合複雜になること、用意した基本區分圖以上の項を有つ問題については事前處理をした上でなければそこへはめ込むわけにはゆかないこと、どちらも圖形や器具の性質上、避けることのできない缺點である。だがこの點をおいてもヱン圖式には大きな利點がある。それは、前提を一つ一つ表示してゆくと自然に（前以て歸結を知っていなくても）歸結を讀みとるべき圖式表示に到達するという點である。しかし、全く完全というわけではない。この圖式について行屆いた注釋をしている Quine(三三) の例を借りるならば「ある G は H でない。G はすべて F である。だからある F は H でない。」という推論形式をこの圖式で確かめるには、まず第二前提を記入して、次に第一前提を記入しなくてはいけないという例がある。このような不都合は記入しておいた存在記號が抹殺記號によって不明になってしまうことから起こる。注意すれば避けられる不都合ではある。しかし「注意すれば」では困るのである。「注意しなくても機械的に」進めてゆけるようであってほしいのである。なお一つ付言しておきたいのは、この圖式が全稱肯定命題の限量換位を無條件で

是認することの不當を端的に示している點である。それは全稱命題の表示（第三圖の甲）に存在記號がなく、存在記號のない圖式から特稱命題を讀みとることができないからである。

六　試案

これらの吟味を總合すると次の諸點が明らかになる。特稱命題は、ブールのように集合算的解釋へ戻るよりも、單純に全稱命題の否定として導入する方が形式的であってすっきりする。また否定であることの表示としてはシュレーダーの≠は不適當である。それは、この表示ではせっかく整備してある等式の計算理論が活用できないし、歸謬法的推理法則によらねばならず、そのため立論が發見生産的ではなくなるからである。

ヱンの圖示法は特稱命題が全稱命題の否定であることをよく傳えている。第二圖甲の1を抹殺するか、1に存在記號を記入するかによって、全稱肯定命題となるか、特稱否定命題となるかがきまり、2の抹殺で全稱否定命題が表示され、2に存在記號を記入すると特稱肯定命題が表示されるからである。ヱンが「あるXはYである」という特稱肯定命題を $xy>0$ と記していることは前に述べた。そこで、全稱（否定）命題が特稱（肯定）命題とたがいに否定關係にあることを一括して、$xy=u$ を採り、$u=0$ であれば「XはすべてYでない」を表わし、$u>0$ であれば「あるXはYである」を表わすと見ることができる。

特稱肯定命題を $xy>0$ でなく、$xy=u, u>0$ とかくことは一見不要な迂回に見えるが、この迂回は不等式をできるかぎり等式の理論と技術で處理するためのものである。$xy>0$ に適用できない方法が、この迂回によって使えるようになることは後に示す通りである。では全稱命題は $xy=0$, $x\bar{y}=0$ などで完全に表わされているのだろうか。第三圖の甲は $x\bar{y}=0$ を完全無缺に表わしている。他方全稱肯定命題の限量換位が無條件では認めるわけにゆかないことをこの圖と第五圖の甲によって説明した。したがって、この換位を認めようとすれば、第三圖の甲は全稱肯定命題の表示として不完全となる。したがってまた、$x\bar{y}=0$ もこの命題の表示として不完全であることになる。上の換位を認めるには第三圖の甲のどこかに存在記號がなくてはならぬが、それは第五圖の甲から、2

の區分であることがわかり、それはまた、式でかくと、$x>0$ に他ならない。そしてまたそれで十分でもある。それは $x\bar{y}=0$, が $x=xy$ と同義であって、$x\bar{y}=0$, $x>0$ から $xy>0$ が導びかれるからである。

こうして、とりあえず次の表示を採擇することにする。

「XはすべてYである」を　$x\bar{y}=0$, $x>0$
「XはすべてYでない」を　$xy=0$, $x>0$
「あるXはYである」を　$xy=u$, $u>0$
「あるXはYでない」を　$x\bar{y}=u$, $u>0$

と書く。

このような命題表示を採用した上で特稱命題の混った問題がどのように處理できるか。それが次の課題である。

ここに導入したuは見掛上の新項であって實はすでに登場しているいくつかの項の函數である。したがって、たとえば條件整理の問題の最終段階にきて、uを元來の項に書き戻すときになると、$xy=u$ や $x\bar{y}=u$ はどちらも $0=0$ という恆等式になって了って、條件に教え込まなかったのと同じになって了う。また集團構成の問題ではuは見掛上の未知項であって實は眞の未知項の函數であるため、どの段階でuについて解いても、元來の未知項の構成法を教えることにはならない。

ただし、この見掛上の新項は關係抽出の問題では大變有效である。

七　原理と應用

次に關係抽出の問題に上の命題表示を使うことの原理を説明し、二、三の例を加えることとしよう。記法は可補分配束の記法へ戻る。

a、b、……、c、mの間に成立ついくつかの關係を與えて、a、b、……、cだけの間に成立つ關係を抽き出す問題を考えてみる。

與えられた關係のうち、全稱命題型のものを

$$F_1(a, b,\cdots, c; m)=0\cdots\cdots F_k(a, b,\cdots, c; m)=0$$

とし、特稱命題型のものを

$$G_1(a, b,\cdots, c; m)>0,\cdots\cdots, G_l(a, b,\cdots, c; m)>0$$

とする。

第二の組は擬項（見掛上の項）を使って、

$$G_1=u_1,\ u_1>0,\cdots\cdots, G_l=u_l,\ u_l>0$$

と書くことができるので、與えられた關係は第二の組に一の9を使った上で、一の10を使うと、一括されて、

$$\bigvee_i F_i \vee \bigvee_j ((G_j' \wedge u_j)\vee(G_j\wedge u_j'))=0 \quad u_j>0$$

となる。この式に一の12を使ってmを消去すれば

$$\{\bigvee_i F_i(1)\vee\bigvee_j((G_j'(1)\wedge u_j)\vee(G_j(1)\wedge u_j'))\}\wedge\{\bigvee_i F_i(0)\vee \bigvee_j((G_j'(0)\wedge u_j)\vee(G_j(0)\wedge u_j'))\}=0$$

ただし1と0はそれぞれmに1と0を代入したことを示す。この式はu_jの入っている項と入っていない項とに分けて整頓すると

$$((\bigvee_i F_i(1))\wedge(\bigvee_i F_i(0))\vee H(a, b,\cdots,c, u_j)=0$$

となり、

$$(\bigvee_i F_i(1))\wedge(\bigvee_i F_i(0))=0, \quad H(a, b,\cdots\cdots,c, u_j)=0$$

の二組に分かれる。

この第一式はa、b……、cだけを含むから、求めた抽出關係の一部をなす。右邊0の等式であるから、全稱命題型の抽出關係になる。

第二式はまだu_jを含んでいるので所求の形にはなっていない。このu_jを消すため方程式の解法を使う。第二式をu_jについて解くと

$$u_j=K_j(a, b,\cdots,c)\vee(L_j(a, b,\cdots,c)\wedge v_j)$$

ただしv_jは任意定項である。

ここで $u_j>0$ を使うと

$K_j(a, b,\cdots,c)>0$ または $L_j(a, b,\cdots,c)>0$ という抽出關係が各jについて得られる。これは右邊0の不等式であるから、特稱命題型の抽出關係である。

こうして求める抽出關係は

「U_1、U_2、……そしてU_sであって、P_{11} または P_{12}、…………またはP_{1t}であって、P_{21}またはP_{22}、……またはP_{2u}であって……P_{l1} または P_{l2}……またはP_{lv}」

という形になる。ここでUはすべて全稱命題であり、Pはすべて特稱命題である。

このような計算で一つの著しい事柄が明らかになった。總括的な最終抽出關係を構成する多くの命題中、全稱命題型のものは、與えられた關係中、全稱命題型のものだけから由來していることと、總括的な最終抽出關係を構成する特稱命題へは全稱命題型の所與關係が入り込むことがそれである。それはUがFだけから定まるのに對して、FはGと共にPの中へ入り込んで來ているから

である。

この方法の簡單な一例として、記號論理學でアリストテレス流の三段論法を公理化するとき、公理として採擇する三段論法の一つを關係抽出の方法で誘導しておこう。

ウカシェヴィッツは公理として、CKAbcIbaIac すなわち Datisi を使っている。關係抽出の問題になおすと「bがすべてcであり、あるbがaであるとき、aとcとはどんな關係にあるか」となる。

まず「bがすべてcである」は $b\frown c'=0$ $b>0$ となり、「あるbがaである」は擬項uを使って、$((b\frown a)'\frown u)\smile(b\frown a\frown u')=0$, $u>0$ となる。この二つの等式を一つにまとめて、

$(b\frown c')\smile((b\frown a')\frown u)\smile(b\frown a\frown u')=0$

bを消去して

$(c'\smile(a'\frown u)\smile(a\frown u'))\frown u=0$

整頓して

$(c'\smile a')\frown u=0$

uの入っていない部分と入っている部分にわけて（少しわざとらしいが原理を追う）

$0=0\qquad (c'\smile a')\frown u=0$

第一式は全稱命題型の關係は抽出されないことを示す。第二式をuについてとくと

$u=a\frown c\frown v$

$u>0$ によって $a\frown c>0$ が抽出された關係であり「あるaはcである」に他ならない。

次に少し混み入った例として、「aがすべてmでなく、mがすべてbであり、bがすべてmまたはcであって、あるcがbそしてmであるか、aでもmでもないかであるとき、a、b、cだけの間の關係を抽出してみよう。

前提の中で全稱命題の分を式になおして、

$a\frown m=0\qquad m\frown b'=0\qquad b\frown c'\frown m'=0$

特稱命題を式になおして

$c\frown((b\frown m)\smile(a'\frown m'))=u,\ u>0$

これを一括して

$(a\frown m)\smile(m\frown b')\smile(b\frown c'\frown m')\ ((c'\smile((b'\smile m')\frown(a\smile m)))\frown u)$
$\smile((c\frown((b\frown m)\smile(a'\frown m')))\frown u')=0$

mを消去して、

$((a\smile b')\smile((c'\smile b')\frown u)\smile((c\frown b)\frown u'))\frown((b\frown c')\smile((c'\smile a)$
$\frown u)\smile((c\frown a')\frown u'))=0$

uの入っているところと入っていないところに分けて

$a\wedge b\wedge c'=0$, $((a\vee c')\wedge u)\vee((a'\wedge c)\wedge u')=0$

第二式をuについて解くと、

$u=a'\wedge c$

したがって、全稱型命題の抽出關係は、

$a\wedge b\wedge c'=0$、特稱型命題の抽出關係は $a'\wedge c>0$。

すなわち、求める抽出關係は、「aそしてbであるものはすべてcであり、あるcはaでない」となる。

擬項を二つ使う例として、前の例の所與關係中、特稱命題のところだけを變形した次の關係抽出問題を解いておこう。

aがすべてmでなく、mがすべてbであり、bがすべてmまたはcである。あるcがbそしてmであり、またあるcがaでもmでもない。このとき、a、b、cだけの間の關係を抽出してみよう。

所與條件を式になおして

$a\wedge m=0$,　$m\wedge b'=0$,　$b\wedge c'\wedge m'=0$

$c\wedge b\wedge m=u$,　$u>0$; $c\wedge a'\wedge m'=v$,　$v>0$

となる

一括して

$(a\wedge m)\vee(m\wedge b')\vee(c'\wedge m'\wedge b)\vee((c'\vee b'\vee m')\wedge u)\vee((c\wedge b\wedge m)\wedge u')\vee((c'\vee a\vee m)\wedge v)\vee((c\wedge a'\wedge m')\wedge v')=0$

mを消去して、

$((a\vee b')\vee((c'\vee b')\wedge u)\vee((c\wedge b)\wedge u')\vee v)\wedge((b\wedge c')\vee u\vee((c'\vee a)\wedge v)\vee((c\wedge a')\wedge v'))=0$

u、vのないところと入っているところに分けて、

$a\wedge b\wedge c'=0$, $(u\wedge v)\vee((a\wedge b'\vee c')\wedge u\wedge v')\vee((c'\vee a)\wedge u'\wedge v)\vee((a'\wedge c)\wedge u'\wedge v')=0$

第二式を一の16によってuとvについて解くと、

$u=(a'\wedge b\wedge c)\wedge s$

$v=(a'\wedge b'\wedge c)\vee((a'\wedge c)\wedge t)$

したがって求める抽出關係は、

$a\wedge b\wedge c'=0$,　$a'\wedge b\wedge c>0$,　$a'\wedge c>0$

の連立することであり、これは$a\wedge b\wedge c'=0$ $a'\wedge b\wedge c>0$の二つが連立することである。すなわち、「aそしてbであるものがすべてcであり、あるcがbであってaでない」ことが求める抽出關係である。

八　おわりに

ここまで節を追って、前稿の所論を顧りみ、その不備

――とくに特稱命題が機械的に扱えないという――を指摘して、問題を設定し、諸家による特稱命題の處理を批判して、一つの工夫を提案し、その應用を解說して來た。しかし、いままで扱うことのできた問題をごく一部――すなわち、條件整理、集團構成、關係抽出のうち、最後の問題――だけを擴張したにすぎない。

擬變項また擬未知項という工夫は他の二つの問題にはどうも無力のようである。もう一度その無力の根據をつきとめて、また工夫を凝らしてみたい。

引用文獻

A　一橋論叢　第二一巻第一・二號　一九四九年二月

B　大塚數學會誌　第八巻第一號　一九三九年九月

C　Boole, G. The Mathematical Analysis of Logic. London, 1847

D　Boole, G. An Investigation of the Laws of Thought. London, 1854

E　Schröder, E. Vorlesungen über die Algebra der Logik. 3 Bde., Leipzig, 1890—1895.

F　Couturat, L. La Logique de Leibniz d'après des documents inédits. Paris, 1901.

G　Venn, J. Symbolic Logic. London, 1894.

H　Bocheński, I. M. Ancient Formal Logic Amsterdam, 1957.

I　Łukasiewicz, J. Aristotle's Syllogistic from the Standpoint of Modern Formal Logic. 2nd ed. Oxford, 1957.

J　Bocheński-Menne. Grundriss der Logistik. Paderborn, 1954.

K　Quine, W. van O. Methods of Logic. London, 1952.

註　(ラテン大文字は引用文獻の記號)

(一)　A、二四―五六頁。

(二)　Bの拙稿「Boolean Algebra における方程式」で擴張した。

(三)　C (Blackwell 版 1951) First Principles の章　一五―一九頁

(四)　C、Of Expressions and Interpretation の章　二〇―二五頁

(五)　C、Of the Conversion of Proposition の章　二六―三〇頁、とOf Syllogisms の章　三一―四七頁

(六)　D、(Dover 版) 第一五章、二二八頁以下

(七)　第二巻第一冊第一五講、九一―九三頁

(八)　F、第一章　La syllogistique　一―三二頁、

(九)　G、第五章　Diagrammatic Representation　一一〇―一四〇頁

(一〇)　G、第七章 Symbolic Expression of Ordinary Proposition　一八五頁

（一一） H、四六頁

（一二） I、第四章「Aristotle's System in Symbolic Form 特に二五節 Fundamentales of the Syllogistic 八八—九〇頁

（一三） J、第六章 Sonderkalküle 第二七節 Syllogistik 九八—一〇四頁

（一四） C、二六—二八頁

（一五） 三七頁例一

（一六） E、第二巻第一冊 二二八頁二三九頁

（一七） F、二九頁

（一八） 基本記號を無定義で導入し、基本命題を無證明で採擇し、定義構成則と命誘題導則を設け、構成則によって新記號を定義し、誘導則によって新命題を證明して科學を構成してゆく方法

（一九） J、九九、一〇〇頁

（二〇） H、四三頁

（二一） Abtrennungsregel.「p」と「pならばq」とから「q」を確立するロギスティーク法の誘導則

（二二） C、三五頁

（二三） K、七三頁

一九五九・五・二一

（一橋大學教授）