不完全積率とその應用

鍋谷清治

一

筆者は統計理論上のいろいろな問題から、多變量正規分布における絶對積率の公式の必要を感じて、以前に〔三〕では平均値0の2變量の場合について、〔四〕では同じく平均値0の3變量の場合について12次までの絶對積率の公式を擧げておいた。應用上は4變量の場合までがしばしば必要とされるが、4變量の場合には3變量までの場合に比べて計算上本質的に困難な點があり、そのためこれまで多くの文獻では絶對積率が必要とされた個の場合について級數展開の方法でその近似値が計算されてきた。しかしその難點も最近になって解決されたので、〔八〕にその結果を與えておいた。このうち〔四〕、〔八〕では一般の多變量の分布で特性函數を利用して絶對積率を求める一般公式によって計算が行われており、その一般公式の證明は〔四〕で與えられている。

他方 Kamat〔五〕は直接の積分により、3變量までの間で〔三〕、〔四〕と同じ絶對積率の式を6次までの範圍で擧げている。Kamat の方法は一般の r 變量の分布で分布函數を $F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r)$ とするとき、積分

$$(1.1)\quad \int_0^\infty \cdots\cdots \int_0^\infty x_1^{n_1} \cdots x_r^{n_r} dF(x_1, \ldots\ldots, x_r)$$

の値を不完全積率 $[n_1, \ldots\ldots, n_r]$ と名づけ、他の象限における函數 $|x_1^{n_1} \cdots\cdots x_r^{n_r}|$ の積分の値を同様にして求めて、これらをすべて加え合わせることによって絶對積率

$$(1.2)\quad E(|x_1^{n_1} \cdots\cdots x_r^{n_r}|) = \int_{-\infty}^{\infty} \cdots\cdots \int |x_1^{n_1} \cdots\cdots x_r^{n_r}| \, dF(x_1, \ldots\ldots, x_r)$$

を計算するというやり方である。

〔五〕は〔四〕の約一年後に發表されたのであるが、その中で筆者が〔四〕で用いた方法にも觸れられ、筆者の方法では不完全積率が計算できないことが一つの缺點とされた。他の缺點としてはいくつかの絶對積率の計算に當って Kamat の方法より筆者の方法の方が面倒になるということであったが、筆者はこの點よりもいずれの方法がより多くの有用な結果を與えるかということの方が大事と考える。これについては〔八〕で十分答えられている。本稿二では筆者が〔四〕、〔八〕でとった方法を擴張すれば不完全積率も計算できることを示そう。

また Moran〔二〕は通常の積率相關係數と順位相關係數との關係を論じている。すなわち積率相關係數 ρ の2變量正規母集團からとられた大きさ n の標本 $(x_1, y_1), \cdots, (x_n, y_n)$ において、x_1、……、x_n 並びに、y_1、……、y_n をそれぞれ大きさの順序に從って順位に直し、その二つの順位の間で順位相關係數を計算した場合に、その標本分布がどうなるかを考えている。この際、平均値がいずれも0で一般の4變量正規分布に從う確率變數 x_1、x_2、x_3、x_4 が、いずれも正の値をとる確率 $P(x_1>0, x_2>0, x_3>0, x_4>0)$ が必要になってくる。この値は Kamat の記號によれば $[0, 0, 0, 0]$ であるが、Moran はこれを求めるのに特性函數の反轉公式を利用し、級數展開の形で結果を與えている。しかしその收束の状態は David〔六〕も指摘しているように非常に惡い。

ついで David〔六〕は平均値0の一般の2變量正規分布において Sheppard の與えた確率 $P(x_1>0, x_2>0)$、平均値0の一般の3變量正規分布における確率 $P(x_1>0, x_2>0, x_3>0)$ を與えており、4變量の場合には本質的な計算上の困難が伴なうといっていて、計算は行っていない。しかし、4變量の場合に同樣な確率の一般式が得られれば5變量の場合の式も得られるであろうということを示唆している。

また Mc Fadden〔七〕は4變量の場合に x_1、x_2、x_3、x_4 相互間の相關係數が全部同一の値 ρ のときの確率 $P(x_1>0, x_2>0, x_3>0, x_4>0)$ を漸近展開を利用して求めているが、正確な式は與えず、また一般の相關係數の場合については、そのような式が切望されるといっているだけで、計算方法は何ら述べていない。

本稿三では平均値0の一般の多變量正規分布におい

て、各成分變數が全部正になる確率を正確な形で與えることにする。このうち2變量並びに3變量の場合は David〔六〕に與えられている結果と一致し、4變量以上の場合については新しい結果である。4變量の場合については計算上の主な難點は〔八〕の中での計算結果を利用することによって克服される。5變量の場合には4變量の場合に比べて本質的に難しい點はなく、6變量以上になると數値計算を含む漸化式が適用されることになる。

二

本節では一般の r 變量 x_1、x_2、……、x_r の同時分布の分布函數を $F(x_1, x_2, \ldots\ldots, x_r)$ とするとき、不完全積率 (1.1) を求めるために筆者〔四〕の方法の擴張と考えられる一つの方法をまず第一に示すことにする。

そのために函數

$$\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}1 & x>0 \text{ のとき}\\ 0 & x=0 \text{ のとき}\\ -1 & x<0 \text{ のとき}\end{cases}$$

を導入すれば、

$$1+\mathrm{sgn}(x)=\begin{cases}2 & x>0 \text{ のとき}\\ 1 & x=0 \text{ のとき}\\ 0 & x<0 \text{ のとき}\end{cases}$$

となるので

$$(2.\ 1)\quad \{1+\mathrm{sgn}(x_1)\}\cdots\cdots\{1+\mathrm{sgn}(x_r)\}=\begin{cases}2^r & x_1、\cdots\cdots、x_r \text{ が全部正のとき}\\ 2^s & x_1、\cdots\cdots、x_r \text{ のうち } s \text{ 個 } (0\leqq s<r) \text{ が正で他は0のとき}\\ 0 & x_1、\cdots\cdots、x_r \text{ のうち少なくも一つが負のとき}\end{cases}$$

が得られる。

正規分布のように絶對連續な分布では (2.1) の第二の場合の成立つ確率は0であるから、(1.1) は (2.1) を利用することによって

$$(2.\ 2)\quad \int_0^\infty\cdots\cdots\int_0^\infty x_1^{n_1}\cdots\cdots x_r^{n_r}dF(x_1,\cdots\cdots,x_r)$$
$$=\frac{1}{2^r}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1^{n_1}\cdots\cdots x_r^{n_r}\{1+\mathrm{sgn}(x_1)\}\cdots$$
$$\cdots\{1+\mathrm{sgn}(x_r)\}dF(x_1,\cdots\cdots,x_r)$$

と書直すことができる。

(2.1) の左邊は

(2.3) $$\{1+\mathrm{sgn}(x_1)\}\cdots\cdots\{1+\mathrm{sgn}(x_r)\}$$
$$=1+\sum_{1\leqq j\leqq r}\mathrm{sgn}(x_j)+\sum_{1\leqq j<k\leqq r}\mathrm{sgn}(x_j)\mathrm{sgn}(x_k)$$
$$+\cdots\cdots+\mathrm{sgn}(x_1)\cdots\cdots\mathrm{sgn}(x_r)$$

と書直せる。(2.3) の右邊は添數1、2、……、rの任意の部分集合j_1、……、j_pに對する

$$\mathrm{sgn}(x_{j_1})\cdots\cdots\mathrm{sgn}(x_{j_p})$$

の形の2^r個の項の和になっている。

よってこれらすべての項に對して

(2.4) $$E[x_1^{n_1}\cdots\cdots x_r^{n_r}\mathrm{sgn}(x_{j_1})\cdots\cdots\mathrm{sgn}(x_{j_p})]$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int x_1^{n_1}\cdots\cdots x_r^{n_r}\mathrm{sgn}(x_{j_1})\cdots$$
$$\cdots\mathrm{sgn}(x_{j_p})\ dF(x_1,\cdots\cdots,x_r)$$

が求まれば、(2.2)、(2.3) によってその和を2^rで割ることによって不完全積率 (1.1) が計算できることになる。

そこで (2.4) の計算のために〔四〕における定理を擴張した結果を與えておくことにする。

いま、與えられた n_1、……、n_r について、$m_1\leqq n_1,\cdots\cdots,m_r\leqq n_r$ なるすべての m_1、……、m_rの組に對して $E(|x_1^{m_1}\cdots\cdots x_r^{m_r}|)$ は有限と假定する。するとx_1、……、x_rの特性函數

$$\varphi(t_1,\cdots\cdots,t_r)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int e^{i(t_1x_1+\cdots\cdots+t_rx_r)}$$
$$\cdot\,dF(x_1,\cdots\cdots,x_r)$$

は、t_1に關してn_1回、……、t_rに關してn_r回まで偏微分が可能であって、その結果

(2.5) $$\frac{1}{i^n}\frac{\partial^n\varphi(t_1,\cdots\cdots,t_r)}{\partial t_1^{n_1}\cdots\cdots\partial t_r^{n_r}}$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int x_1^{n_1}\cdots\cdots x_r^{n_r}e^{i(t_1x_1+\cdots\cdots+t_rx_r)}$$
$$\cdot\,dF(x_1,\cdots\cdots,x_r)$$

が成立する。ただし $n=n_1+\cdots\cdots+n_r$である。

ここで $\mathrm{sgn}(x)$ に關する積分公式

(2.6) $$\mathrm{sgn}(x)=\frac{2}{\pi}\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ C\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{C}\frac{\sin tx}{t}dt$$

$$=\frac{2}{\pi}\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ C\to\infty}}\int_{\varepsilon}^{C}\frac{e^{itx}-e^{-itx}}{2it}dt$$

$$=\frac{1}{i\pi}\lim_{\substack{\varepsilon\to0\\ C\to\infty}}\left(\int_{\varepsilon}^{C}+\int_{-C}^{-\varepsilon}\right)\frac{e^{itx}}{t}dt$$

を(2.4)に代入して、積分と極限の順序の交換を行なうと

(2.7)
$$\frac{1}{i^p\pi^p}\lim_{\substack{\varepsilon_1,\cdots\cdots,\varepsilon_p\to0\\ C_1,\cdots\cdots,C_p\to\infty}}\left(\int_{\varepsilon_1}^{C_1}+\int_{-C_1}^{-\varepsilon_1}\right)\frac{dt_{j_1}}{t_{j_1}}\cdots\cdots\left(\int_{\varepsilon_p}^{C_p}+\int_{-C_p}^{-\varepsilon_p}\right)\frac{dt_{j_p}}{t_{j_p}}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}x_1^{n_1}\cdots\cdots x_r^{n_r}e^{i(t_{j_1}x_{j_1}+\cdots\cdots+t_{j_p}x_{j_p})}$$

$$\cdot\,dF(x_1,\cdots\cdots,x_r)$$

が得られる。この場合 $E(|x_1^{n_1}\cdots\cdots x_r^{n_r}|)$ が有限という仮定から、(2.6)を(2.4)に代入したときに、まず極限記號とxに關する積分記號との順序の交換は Lebesgue-Stieltjes 積分の有界收束の定理によって許され、またtに關する積分記號とxに關する積分記號との順序の交換は Fubini の定理によって可能になる。

(2.7)のx_1、……、x_rに關する積分記號以後に書いた式は(2.5)において

$$t_{k_1}=\cdots\cdots=t_{k_q}=0$$

とおいたものに等しい。ただし、k_1、……、k_qは添數の全體1、……、rの中でj_1、……、j_p、以外のものを示す。從って$p+q=r$である。そこで

(2.8)　$E[x_1^{n_1}\cdots\cdots x_r^{n_r}\mathrm{sgn}(x_{j_1})\cdots\cdots\mathrm{sgn}(x_{j_p})]$

$$=\frac{1}{i^{p+n}\pi^p}\int\cdots\cdots\int\frac{dt_{j_1}\cdots\cdots dt_{j_p}}{t_{j_1}\cdots\cdots t_{j_p}}$$

$$\cdot\left[\frac{\partial^n\varphi(t_1,\cdots\cdots,t_r)}{\partial t_1^{n_1}\cdots\cdots\partial t_r^{n_r}}\right]_{t_{k_1}=\cdots\cdots=t_{k_q}=0}$$

が成立する。ただし右邊のt_{j_1}、……、t_{j_p}に關する積分は(2.7)と同様な意味での Cauchy の主値を表わす。

筆者〔四〕が求めた絶對積率を特性函數から計算する一般公式は、n_{j_1}、……、n_{j_p}が奇數、n_{k_1}、……、n_{k_q}が偶數の場合の(2.8)に他ならない。

平均値0の多變量正規分布では密度函數$f(x_1,\cdots\cdots,x_r)$は偶函數となっている。すなわち

$$f(x_1,\cdots\cdots,x_r)=f(-x_1,\cdots\cdots,-x_r)$$

が成立する。他方(2.8)の左邊の〔　〕内は、$n+p$が

偶數ならば偶函數、$n+p$ が奇數ならば奇函數となる。よって $n+p$ が奇數のときに

(2.9)　$E[x_1^{n_1}\cdots\cdots x_r^{n_r}\,\mathrm{sgn}(x_{j_1})\cdots\cdots\mathrm{sgn}(x_{j_p})]=0$

は(2.8)によらなくても明らかである。よってこの分布の場合には、$n+p$ が偶數のときの(2.8)を計算しておきさえすれば、絶對積率はその中の一つになっているし、不完全積率もそれらの値から計算することができる。

一例として平均値0の3變量正規分布での $x_1^2\,x_2\,x_3$ の不完全積率の計算を擧げておく。この場合には $n=4$ であるから、p が偶數であるような四つの平均値

(2.10)　$E[x_1^2x_2x_3]$

(2.11)　$E[x_1^2x_2x_3\,\mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)]$

(2.12)　$E[x_1^2x_2x_3\,\mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_3)]$

(2.13)　$E[x_1^2x_2x_3\,\mathrm{sgn}(x_2)\mathrm{sgn}(x_3)]$

を計算すれば、これらを加え合わせて $2^3=8$ で割ることによって $x_1^2x_2x_3$ の不完全積率が求められる。

いま、x_1、x_2、x_3 の標準偏差をそれぞれ σ_1、σ_2、σ_3 とし、相關行列を

$$\begin{Vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{Vmatrix} \qquad \begin{array}{l} \rho_{ii}=1 \\ \rho_{ij}=\rho_{ji} \end{array}$$

で表わすことにする。

(2.10) は通常の積率であって

(2.14)　$E[x_1^2\,x_2\,x_3]=(\rho_{23}+2\rho_{12}\rho_{13})\sigma_1^2\,\sigma_2\,\sigma_3$

となり、また (2.13) は〔四〕で求めた絶對積率であって

(2.15)　$E[x_1^2\,x_2\,x_3\,\mathrm{sgn}(x_2)\mathrm{sgn}(x_3)]$

$$=\frac{2}{\pi}\Big[\sqrt{1-\rho_{23}^2}\,(1+\rho_{12}^2+\rho_{13}^2)+(\rho_{23}+2\rho_{12}\,\rho_{13})\sin^{-1}\rho_{23}\Big]\,\sigma_1^2\,\sigma_2\,\sigma_3$$

となる。

從って (2.11) と (2.12) の値を求めればよいが、(2.12) は (2.11) から、添數2と3のつけかえで得られるので、新たに計算すべきものは (2.11) の値だけとなる。

(2.8) によれば

(2.16)　$E[x_1^2x_2x_3\,\mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)]$

$$=\frac{1}{i^6\pi^2}\iint\frac{dt_1dt_2}{t_1t_2}\left[\frac{\partial^4\varphi(t_1,\ t_2,\ t_3)}{\partial t_1{}^2\partial t_2\partial t_3}\right]_{t_3=0}$$

となり、ここで

$$\varphi(t_1,\ t_2,\ t_3)=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{3}\rho_{jk}\,\sigma_j\,\sigma_k t_j t_k\right]$$

であるから、

$$(2.\ 17)\qquad \left[\frac{\partial^4\varphi(t_1,\ t_2,\ t_3)}{\partial t_1{}^2\partial t_2\partial t_3}\right]_{t_3=0}$$

$$=e^{-\frac{Q}{2}}(\rho_{23}+2\rho_{12}\,\rho_{13}-T_2\,T_3-2\rho_{12}\,T_1\,T_3$$
$$-2\rho_{13}\,T_1\,T_2-\rho_{23}\,T_1{}^2+T_1{}^2\,T_2\,T_3)\ \ \sigma_1{}^2\sigma_2\sigma_3$$

となる。ただし

$$(2.\ 18)\qquad Q=\sigma_1{}^2\,t_1{}^2+2\rho_{12}\,\sigma_1\,\sigma_2 t_1\,t_2+\sigma_2{}^2\,t_2{}^2$$

$$(2.\ 19)\qquad \begin{cases}T_1=\sigma_1 t_1+\rho_{12}\,\sigma_2 t_2\\ T_2=\rho_{12}\,\sigma_1 t_1+\sigma_2 t_2\\ T_3=\rho_{13}\,\sigma_1 t_1+\rho_{23}\,\sigma_2 t_2\end{cases}$$

とおく。(2. 19) を (2. 17) に代入すれば (2. 17) は

$$(2.\ 20)\qquad \left[\frac{\partial^4\varphi(t_1,\ t_2,\ t_3)}{\partial t_1{}^2\partial t_2\partial t_3}\right]_{t_3=0}$$

$$=e^{-\frac{Q}{2}}[\rho_{23}+2\rho_{12}\,\rho_{13}-(\rho_{23}+5\rho_{12}\,\rho_{13})\sigma_1{}^2\,t_1{}^2$$
$$-(3\,\rho_{13}+5\rho_{12}\,\rho_{23}+4\rho_{12}{}^2\,\rho_{13})\sigma_1\,\sigma_2 t_1\,t_2$$
$$-(\rho_{23}+2\,\rho_{12}\,\rho_{13}+3\rho_{12}{}^2\,\rho_{23})\sigma_2{}^2\,t_2{}^2$$
$$+\rho_{12}\,\rho_{13}\,\sigma_1{}^4 t_1{}^4+(\rho_{13}+\rho_{12}\,\rho_{23}+2\,\rho_{12}{}^2\,\rho_{13})$$
$$\sigma_1{}^3\,\sigma_2\,t_1{}^3\,t_2\ +(\rho_{23}+2\rho_{12}\,\rho_{13}+2\,\rho_{12}{}^2\,\rho_{23}$$
$$+\rho_{12}{}^3\,\rho_{13})\sigma_1{}^2\,\sigma_2{}^2\,t_1{}^2\,t_2{}^2\ +(2\rho_{12}\,\rho_{23}+$$
$$\rho_{12}{}^2\,\rho_{13}+\rho_{12}{}^3\,\rho_{23})\sigma_1\,\sigma_2{}^3 t_1\,t_2{}^3\ +\rho_{12}{}^2\,\rho_{23}$$
$$\sigma_2{}^4 t_2{}^4]\sigma_1{}^2\,\sigma_2\,\sigma_3$$

となる。

そこで (2. 16) の右邊を計算するのに

$$I_1=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{1}{t_1\,t_2}dt_1\,dt_2$$

$$I_2=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1{}^2\,t_1{}^2}{t_1\,t_2}dt_1\,dt_2$$

$$I_3=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1\,\sigma_2\,t_1\,t_2}{t_1\,t_2}dt_1\,dt_2$$

$$I_4=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1{}^4\,t_1{}^4}{t_1\,t_2}dt_1\,dt_2$$

$$I_5=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1{}^3\,\sigma_2\,t_1{}^3\,t_2}{t_1\,t_2}dt_1\,dt_2$$

$$I_6=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1{}^2\,\sigma_2{}^2\,t_1{}^2\,t_2{}^2}{t_1\,t_2}dt_1\,dt_2$$

なる六つの積分を計算しておけば、あとは添數１と２の

つけかえと（2.20）の係数とによって計算することができる。

そこでまずI_3を求めることにする。變換

$$\sigma_1 t_1 = v_1,\quad \sigma_2 t_2 = v_2$$

を用いれば

$$I_3=\iint \exp\left\{-\frac{1}{2}(v_1^2+2\rho_{12}v_1v_2+v_2^2)\right\}\cdot dv_1\,dv_2$$

となる。ここで

$$(2.21)\qquad \frac{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}{2\pi}\exp\left\{-\frac{1}{2}(v_1^2+2\rho_{12}v_1v_2+v_2^2)\right\}$$

はv_1とv_2について2變量正規分布の密度函数の形になっている。そこで（2.21）をv_1とv_2の全範圍について積分すれば1になることから，I_3の値は $2\pi/\sqrt{1-\rho_{12}^2}$ となる。よって

$$(2.22)\qquad I_3=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1\sigma_2 t_1t_2}{t_1t_2}dt_1\,dt_2=\frac{2\pi}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}$$

が得られる。

つぎにI_1を求めることにする。（2.18）により，I_1をρ_{12}について偏微分して符號を變えたものがI_3になる。I_3の値は（2.22）に與えられており，またI_1は$\rho_{12}=0$のときには

$$\iint e^{-\frac{\sigma_1^2t_1^2+\sigma_2^2t_2^2}{2}}\frac{1}{t_1t_2}dt_1\,dt_2=\int e^{-\frac{\sigma_1^2t_1^2}{2}}\frac{1}{t_1}dt_1\int e^{-\frac{\sigma_2^2t_2^2}{2}}\frac{1}{t_2}dt_2=0$$

となるので，

$$(2.23)\qquad I_1=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{1}{t_1t_2}dt_1\,dt_2=-\int_0^{\rho_{12}}\frac{2\pi}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}d\rho_{12}=-2\pi\sin^{-1}\rho_{12}$$

となる。

つぎに（2.23）の第2邊と第4邊とをσ_1について偏微分して兩邊に$-\sigma_1$を掛けた式から，（2.22）の第2邊のρ_{12}倍と第3邊のρ_{12}倍とを邊々引くことによって

$$(2.24)\qquad I_2=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^2t_1^2}{t_1t_2}dt_1\,dt_2=-2\pi\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-\rho_{12}^2}}$$

が得られる。

（2.24）の第2邊と第3邊とをρ_{12}で偏微分して符號を

變えれば

$$(2.\ 25)\qquad I_5=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^3\,\sigma_2\,t_1^3\,t_2}{t_1\,t_2}dt_1\,dt_2$$

$$=2\pi\frac{1}{(1-\rho_{12}^2)^{3/2}}$$

となる。また (2.24) の第2邊と第3邊を σ_1 について偏微分して $-\sigma_1$ を掛け、これに (2.24) の2倍を加えて (2.25) の ρ_{12} 倍を引けば

$$(2.\ 26)\qquad I_4=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^4\,t_1^4}{t_1\,t_2}dt_1\,dt_2$$

$$=2\pi\frac{-3\rho_{12}+2\rho_{12}^3}{(1-\rho_{12}^2)^{3/2}}$$

となる。最後に (2.22) の第2邊と第3邊を ρ_{12} について偏微分して符號を變えれば、

$$(2.\ 27)\qquad I_6=\iint e^{-\frac{Q}{2}}\frac{\sigma_1^2\,\sigma_2^2\,t_1^2\,t_2^2}{t_1\,t_2}dt_1\,dt_2$$

$$=2\pi\frac{-\rho_{12}}{(1-\rho_{12}^2)^{3/2}}$$

が得られる。

(2. 22) より (2. 27) までの結果、並びにこれらの式で添數のつけかえを行ったものを利用すれば、(2.16)、(2. 20) より

$$(2.\ 28)\qquad E[x_1^2\,x_2\,x_3\,\mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)]$$

$$=\frac{2}{\pi}\Big[\sqrt{1-\rho_{12}^2}\,(2\,\rho_{13}+\rho_{12}\,\rho_{23})\;+(\rho_{23}+2\,\rho_{12}\,\rho_{13})\sin^{-1}\rho_{12}\Big]\sigma_1^2\,\sigma_2\,\sigma_3$$

が得られる。ここで添數2と3をつけかえれば

$$(2.\ 29)\qquad E[x_1^2\,x_2\,x_3\,\mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_3)]$$

$$=\frac{2}{\pi}\Big[\sqrt{1-\rho_{13}^2}\,(2\,\rho_{12}+\rho_{13}\,\rho_{23})\;+(\rho_{23}+2\,\rho_{12}\,\rho_{13})\sin^{-1}\rho_{13}\Big]\sigma_1^2\,\sigma_2\,\sigma_3$$

となる。

(2. 14)'(2. 15)'(2. 28)'(2. 29) を加えて8で割れば $x_1^2\,x_2\,x_3$ の不完全積率が求められ、その結果

$$(2.\ 30)\qquad \iiint_0^\infty x_1^2\,x_2\,x_3\;dF(x_1,\ x_2,\ x_3)$$

$$=\frac{1}{4\pi}\Big[\sqrt{1-\rho_{12}^2}\,(2\,\rho_{13}+\rho_{12}\,\rho_{23})$$

$$+\sqrt{1-\rho_{13}^2}\,(2\,\rho_{12}+\rho_{13}\,\rho_{23})+\sqrt{1-\rho_{23}^2}$$

$$\cdot(1+\rho_{12}{}^2+\rho_{13}{}^2)+(\rho_{23}+2\rho_{12}\rho_{13})$$

$$\cdot\left(\frac{\pi}{2}+\sin^{-1}\rho_{12}+\sin^{-1}\rho_{13}+\sin^{-1}\rho_{23}\right)\Big\}\Big]$$

$$\cdot\,\sigma_1{}^2\sigma_2\sigma_3$$

となる。

他の象限における $|x_1{}^2\,x_2\,x_3|$ の積分の値は、三つの相關係數 ρ_{12}、ρ_{13}、ρ_{23} につぎの符號をつけて、(2.30) の右邊を書直すことによって與えられる。

象限 x_1	x_2	x_3	符號 ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{23}
+	+	+	+	+	+
+	+	−	+	−	−
+	−	+	−	+	−
+	−	−	−	−	+
−	+	+	−	−	+
−	+	−	−	+	−
−	−	+	+	−	−
−	−	−	+	+	+

こうして得られた八つの値を全部加えれば、ふたたび (2. 15) の絶對積率が得られる。

Kamat〔五〕は絶對積率を計算するのに、始めに直接の積分によって不完全積率を求め、これに對して右のような操作を行って絶對積率を計算している。しかしここに取上げた例からもわかるように、不完全積率よりも絶對積率の方が簡單な式で表わされる。筆者の取扱った (2. 4) の形の sgn 記號のついた式の平均値でさえ、個々の式は不完全積率の式よりも簡單であって、不完全積率の値は、これらのより簡單な式の不自然な組合わせの形になっている。しかも Kamat〔五〕が取扱っている例で直接に必要とされているのはむしろ (2.4) の形の平均値であるから、つぎに4次までの範圍で (2.4) の形の平均値をすべて擧げておくことにする。ただし $p+n$ が奇數のものについては平均値は0になるので省略しておく。

$$E[x_1\,\mathrm{sgn}(x_1)]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\sigma_1$$

$$E[x_1{}^2]=\sigma_1{}^2$$

$$E[x_1\,x_2]=\rho_{12}\,\sigma_1\,\sigma_2$$

$$E[x_1x_2\,\mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)]$$

$$=\frac{2}{\pi}\left[\sqrt{1-\rho_{12}{}^2}+\rho_{12}\sin^{-1}\rho_{12}\right]\sigma_1\,\sigma_2$$

$$E[x_1{}^3\,\mathrm{sgn}(x_1)]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2\,\sigma_1{}^3$$

$$E[x_1{}^2x_2\,\mathrm{sgn}(x_1)]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,2\,\rho_{12}\,\sigma_1{}^2\,\sigma_2$$

$$E[x_1^2\, x_2\, \mathrm{sgn}(x_2)]=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1+\rho_{12}^2)\sigma_1^2\,\sigma_2$$

$$E[x_1\, x_2\, x_3 \mathrm{sgn}(x_1)]$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}(\rho_{23}+\rho_{12}\,\rho_{13})\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$$

(2. 31)　$E[x_1\, x_2\, x_3 \mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)\mathrm{sgn}(x_3)]$

$$=\left(\frac{2}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}[\sqrt{R_{44}}+(\rho_{12}+\rho_{13}\,\rho_{23})$$

$$\cdot \sin^{-1}\rho_{12\cdot3}+(\rho_{13}+\rho_{12}\,\rho_{23})\sin^{-1}\rho_{13\cdot2}$$

$$+(\rho_{23}+\rho_{12}\,\rho_{13})\sin^{-1}\rho_{23\cdot1}]\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$$

$$E[x_1^4]=3\,\sigma_1^4$$

$$E[x_1^3\, x_2]=3\,\rho_{12}\,\sigma_1^3\,\sigma_2$$

$$E[x_1^3\, x_2\, \mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)]$$

$$=\frac{2}{\pi}[\sqrt{1-\rho_{12}^2}\,(2+\rho_{12}^2)+3\rho_{12}$$

$$\cdot \sin^{-1}\rho_{12}]\sigma_1^3\,\sigma_2$$

$$E[x_1^2\, x_2^2]=(1+2\rho_{12}^2)\sigma_1^2\,\sigma_2^2$$

$$E[x_1^2\, x_2^2\, \mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)]$$

$$=\frac{2}{\pi}[3\,\rho_{12}\sqrt{1-\rho_{12}^2}+(1+2\rho_{12}^2)$$

$$\cdot \sin^{-1}\rho_{12}]\sigma_1^2\,\sigma_2^2$$

$$E[x_1^2\, x_2\, x_3]=(\rho_{23}+2\rho_{12}\,\rho_{13})\sigma_1^2\,\sigma_2\,\sigma_3$$

$$E[x_1^2\, x_2\, x_3\, \mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)]$$

$$=\frac{2}{\pi}[\sqrt{1-\rho_{12}^2}\,(2\,\rho_{13}+\rho_{12}\,\rho_{23})+(\rho_{23}$$

$$+2\,\rho_{12}\,\rho_{13})\sin^{-1}\rho_{12}]\sigma_1^2\,\sigma_2\,\sigma_3$$

$$E[x_1^2\, x_2\, x_3\, \mathrm{sgn}(x_2)\mathrm{sgn}(x_3)]$$

$$=\frac{2}{\pi}[\sqrt{1-\rho_{23}^2}\,(1+\rho_{12}^2+\rho_{13}^2)+(\rho_{23}$$

$$+2\,\rho_{12}\,\rho_{13})\sin^{-1}\,\rho_{23}]\sigma_1^2\,\sigma_2\,\sigma_3$$

$$E[x_1\, x_2\, x_3\, x_4]=(\rho_{12}\,\rho_{34}+\rho_{13}\,\rho_{24}+\rho_{14}\,\rho_{23})$$

$$\cdot\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4$$

$$E[x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, \mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)]$$

$$=\frac{2}{\pi}[\sqrt{1-\rho_{12}^2}\,(\rho_{34}+\rho_{13}\,\rho_{14}+\rho_{23}\,\rho_{24})$$

$$+(\rho_{12}\,\rho_{34}+\rho_{13}\,\rho_{24}+\rho_{14}\,\rho_{23})\sin^{-1}\rho_{12}]$$

$$\cdot\,\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3\,\sigma_4$$

$$E[x_1\, x_2\, x_3\, x_4\, \mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)\mathrm{sgn}(x_3)$$

$$\mathrm{sgn}(x_4)]$$

は〔八〕の（2. 63）の通り

右の公式において sgn 記號の全く入らないものの平均値は通常の積率であり、指數が奇數の變數についてだけ sgn 記號のついたものの平均値は〔三〕、〔四〕、〔八〕に與えられている絶對積率である。なお (2.31) における R_{44} は〔八〕の記號による行列式

$$R_{44}=\begin{vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \end{vmatrix}$$

を示す。

右に擧げた平均値では sgn 記號のついている變數はいずれも正の指數をもっているが、しからざる場合の平均値ももちろん (2.4) の應用によって計算できる。例えば4變數 x_1、x_2、x_3、x_4 の同時分布で不完全積率

$$\iiiint_0^\infty x_1 x_2 \, dF(x_1, x_2, x_3, x_4)$$

を求めるために必要な

$$E[x_1 x_2 \operatorname{sgn}(x_1)\operatorname{sgn}(x_3)]$$
$$E[x_1 x_2 \operatorname{sgn}(x_3)\operatorname{sgn}(x_4)]$$
$$E[x_1 x_2 \operatorname{sgn}(x_1)\operatorname{sgn}(x_2)\operatorname{sgn}(x_3)\operatorname{sgn}(x_4)]$$

などの計算の場合である。この形の式も二三計算してあるが、複雜になるのでここでは一切擧げないでおくことにする。

三

本節では平均値0の一般の多變量正規分布で各成分變數がすべて正となる確率、すなわち第1象限の點の得られる確率を問題にすることにする。

この確率は各成分變數の標準偏差の値には關係せず、そこで考えている變數相互間の相關係數だけによってきまることは明らかである。そこで r 個の變數 x_1、x_2、……、x_r の標準偏差はいずれも1とし、相關行列を

$$\begin{Vmatrix} 1 & \rho_{12} & \rho_{13} \cdots & \rho_{1r} \\ \rho_{21} & 1 & \rho_{23} \cdots & \rho_{2r} \\ \rho_{31} & \rho_{32} & 1 \cdots & \rho_{3r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \rho_{r1} & \rho_{r2} & \rho_{r3} \cdots & 1 \end{Vmatrix} \tag{3.1}$$

とする。すると求める確率はこれらの $r(r-1)/2$ 個の相關係數の函數となるので、Moran〔二〕の記號に準じてこれを

$$(3.\ 2)\qquad \int_0^\infty\cdots\cdots\int dF(x_1,\ x_2,\cdots\cdots,x_r)$$

$$=T_r\left(\begin{matrix}\rho_{12} & \rho_{13}\cdots\cdots\rho_{1r}\\ & \rho_{23}\cdots\cdots\rho_{2r}\\ & \cdots\cdots\cdots\\ & \rho_{r-1,r}\end{matrix}\right)$$

なる記號で示すことにする。

（3. 2）は本稿二で取扱った不完全積率（1. 1）で $n_1=\cdots\cdots=n_r=0$ とおいた特別の場合になっている。

そこで二によれば（3. 2）を求めるには、添數の集合1、2、……、r の任意の部分集合を j_1、……、j_p とし、その補集合を k_1、……、k_q とするとき、（2.8）に從って 2^r 個のすべての場合について

$$(3.\ 3)\qquad E[\mathrm{sgn}(x_{j_1})\cdots\mathrm{sgn}(x_{j_p})]$$

$$=\frac{1}{(i\pi)^p}\int\cdots\cdots\int\frac{dt_{j_1}\cdots\cdots dt_{j_p}}{t_{j_1}\cdots\cdots t_{j_p}}$$

$$\cdot[\varphi(t_1,\cdots\cdots,t_r)]_{t_{k_1}=\cdots\cdots=t_{k_q}=0}$$

を計算し、その全體の合計を 2^r で割ればよい。

ここで $\varphi(t_1,\cdots\cdots,t_r)$ は x_1、……、x_r の特性函數

$$\varphi(t_1,\cdots\cdots,t_r)=\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r}\rho_{jk}\,t_j\,t_k\right].$$

であって、ここで $t_{k_1}=\cdots\cdots=t_{k_q}=0$ とおいたものは、x_{j_1}、……、x_{j_p} の特性函數

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k,l=1}^{p}\rho_{j_k}\,\rho_{j_l}\,t_{j_k}\,t_{j_l}\right]$$

となる。（3. 3）は x_{j_1}、……、x_{j_p} の相關行列

$$\left\|\begin{matrix}1 & \rho_{j_1j_2}\cdots\cdots\rho_{j_1j_p}\\ \rho_{j_2j_1} & 1\quad\cdots\cdots\rho_{j_2j_p}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ \rho_{j_pj_1} & \rho_{j_pj_2}\cdots\cdots\quad 1\end{matrix}\right\|$$

によってその値がきまるので、これを（3. 2）と同様に

$$(3.\ 4)\qquad E[\mathrm{sgn}(x_{j_1})\cdots\cdots\mathrm{sgn}(x_{j_p})]$$

$$=S_p\left(\begin{matrix}\rho_{j_1j_2} & \rho_{j_1j_3}\cdots\cdots\rho_{j_1j_p}\\ & \rho_{j_2j_3}\cdots\cdots\rho_{j_2j_p}\\ & \cdots\cdots\cdots\\ & \rho_{j_{p-1}j_p}\end{matrix}\right)$$

で示すことにする。

（3. 4）は（2. 8）において n が0の場合であるから、p が奇數ならば、相關行列はどうであっても S_p の値は0

になる。よってS_pの計算はpが偶數の場合だけを考えればよいことになる。そこで右に述べたことから等式

(3. 5)　$$T_r=\frac{1}{2^r}\left[S_0+\sum_{\binom{r}{2}}S_2+\sum_{\binom{r}{4}}S_4+\cdots\cdots\right]$$

が得られる。ただし一般に

$$\sum_{\binom{r}{p}}S_p$$

は、r個の添數1、……、rからとられたp個の添數のあらゆる組合わせについてS_pの値を計算し、それをすべて（個數は$\binom{r}{p}$）加え合わせることを意味する。

つぎにrのいろいろな値について、(3.5)の具體的な形を與えることにする

rが1のとき　この場合には集合（1）の部分集合で偶數個の元から成るものは空集合ϕだけとなるので、S_0だけを求めればよい。

(3. 6)　$$S_0=E[1]=1$$

であるから、(3. 5)によって

$$T_1=\frac{1}{2}.$$

となる。この結果は正規分布曲線の平均に關する對稱性から明らかである。

rが2のとき　集合（1、2）の部分集合で偶數個の元から成るものとしては、空集合ϕと全體の集合（1、2）とがある。空集合については(3.6)が成立ち、（1、2）については

$$S_2[\rho_{12}]=E[\mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)]$$
$$=\frac{1}{(i\pi)^2}\iint\exp\left\{-\frac{1}{2}(t_1^2+2\rho_{12}t_1t_2+t_2^2)\right\}\frac{dt_1\,dt_2}{t_1t_2}$$

となる。右邊の積分は(2. 23)で計算されたI_1に等しい。よって

(3. 7)　$$S_2[\rho_{12}]=\frac{2}{\pi}\sin^{-1}\rho_{12}$$

となる。よって(3. 5)によって

$$T_2[\rho_{12}]=\frac{1}{4}[S_0+S_2[\rho_{12}]]$$
$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}\sin^{-1}\rho_{12}$$

となる。この結果はDavid〔六〕に載っているSheppardの得た結果

$$T_2[\rho_{12}]=\frac{1}{2}\left(1-\frac{\cos^{-1}\rho_{12}}{\pi}\right)$$

と一致する。

rが3のとき　この場合には集合（1、2、3）の部分集合で偶數個の元からなるものとしては、ϕ、（1、2）、（1、3）、（2、3）の四つがある。そこでS_0を1個とS_2を3個求めて、その和を8で割ればT_3が求められる。S_0は（3. 6）に與えられており、S_2の函數形は（3. 7）であるから、

$$T_3\begin{bmatrix}\rho_{12} & \rho_{13}\\ & \rho_{23}\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{8}[S_0+S_2[\rho_{12}]+S_2[\rho_{13}]+S_2[\rho_{23}]]$$

$$=\frac{1}{8}+\frac{1}{4\pi}(\sin^{-1}\rho_{12}+\sin^{-1}\rho_{13}+\sin^{-1}\rho_{23})$$

となる。この結果も David〔六〕の

$$T_3\begin{bmatrix}\rho_{12} & \rho_{13}\\ & \rho_{23}\end{bmatrix}=\frac{1}{4\pi}(2\pi-\cos^{-1}\rho_{12}-\cos^{-1}\rho_{13}-\cos^{-1}\rho_{23})$$

と一致する。

rが4のとき　集合（1、2、3、4）の部分集合で偶數個の元からなるものとしては、ϕ、（1、2）、（1、3）、（1、4）、（2、3）、（2、4）、（3、4）、（1、2、3、4）の8個のものがある。このうち最初の7個のものについてはSの函數形は（3. 6）、（3. 7）に與えられており、最後のものについては、

$$S_4\begin{pmatrix}\rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14}\\ & \rho_{23} & \rho_{24}\\ & & \rho_{34}\end{pmatrix}$$

$$=E[\mathrm{sgn}(x_1)\mathrm{sgn}(x_2)\mathrm{sgn}(x_3)\mathrm{sgn}(x_4)]$$

$$=\frac{1}{\pi^4}\iiiint\exp\left\{-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{4}\rho_{jk}t_j t_k\right\}\cdot\frac{dt_1\,dt_2\,dt_3\,dt_4}{t_1\,t_2\,t_3\,t_4}$$

となるが、この右邊の積分の値は〔八〕の（2. 48）に與えられているI_1に等しい。よって

$$S_4\begin{pmatrix}\rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14}\\ & \rho_{23} & \rho_{24}\\ & & \rho_{34}\end{pmatrix} \tag{3. 8}$$

$$=\frac{4}{\pi^2}\int\left\{\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}(u)\right.$$

$$+\frac{\rho_{13}}{\sqrt{1-u^2\rho_{13}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{24\cdot13}(u)$$
$$\left.+\frac{\rho_{14}}{\sqrt{1-u^2\rho_{14}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{23\cdot14}(u)\right\}du$$

となる。ただし $\rho_{34\cdot12}(u)$, $\rho_{24\cdot13}(u)$, $\rho_{23\cdot14}(u)$ は相關行列が

$$\left\|\begin{matrix} 1 & u\rho_{12} & u\rho_{13} & u\rho_{14} \\ u\rho_{21} & 1 & \rho_{23} & \rho_{24} \\ u\rho_{31} & \rho_{32} & 1 & \rho_{34} \\ u\rho_{41} & \rho_{42} & \rho_{43} & 1 \end{matrix}\right\|$$

で與えられたときの Yule の記號による偏相關係數を示す。例えば

(3. 9)
$$\rho_{34\cdot12}(u)=\{\rho_{34}-\rho_{23}\,\rho_{24}-u^2(\rho_{13}\,\rho_{14}$$
$$+\rho_{12}{}^2\,\rho_{34}-\rho_{12}\,\rho_{13}\,\rho_{24}-\rho_{12}\,\rho_{14}\,\rho_{23})\}$$
$$\times\{1-\rho_{23}{}^2-u^2(\rho_{12}{}^2+\rho_{13}{}^2$$
$$-2\rho_{12}\rho_{13}\,\rho_{23})\}^{-\frac{1}{2}}\times\{1-\rho_{24}{}^2-u^2(\rho_{12}{}^2$$
$$+\rho_{14}{}^2-2\rho_{12}\rho_{14}\rho_{24})\}^{-\frac{1}{2}}$$

である。よってつぎの式が得られる。

(3. 10)
$$T_4\begin{pmatrix}\rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ & \rho_{23} & \rho_{24} \\ & & \rho_{34}\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{16}\Bigl[S_0+S_2[\rho_{12}]+S_2[\rho_{13}]+S_2[\rho_{14}]$$
$$+S_2[\rho_{23}]+S_2[\rho_{24}]+S_2[\rho_{34}]$$
$$+S_4\begin{pmatrix}\rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} \\ & \rho_{23} & \rho_{24} \\ & & \rho_{34}\end{pmatrix}\Bigr]$$
$$=\frac{1}{16}+\frac{1}{8\pi}(\sin^{-1}\rho_{12}+\sin^{-1}\rho_{13}+\sin^{-1}\rho_{14}$$
$$+\sin^{-1}\rho_{23}+\sin^{-1}\rho_{24}+\sin^{-1}\rho_{34})$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}\int_0^1\Bigl\{\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}(u)$$
$$+\frac{\rho_{13}}{\sqrt{1-u^2\rho_{13}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{24\cdot13}(u)$$
$$\left.+\frac{\rho_{14}}{\sqrt{1-u^2\rho_{14}{}^2}}\sin^{-1}\rho_{23\cdot14}(u)\right\}du$$

Moran〔11〕では T_4 を ρ の冪によって級數展開した形

(3. 11)
$$\frac{1}{16}+\frac{1}{8\pi}(\rho_{12}+\rho_{13}+\rho_{14}+\rho_{23}+\rho_{24}+\rho_{34})$$
$$+\frac{1}{4\pi^2}(\rho_{12}\rho_{34}+\rho_{13}\rho_{24}+\rho_{14}\rho_{23})+\cdots\cdots$$

が與えられているが，これは (3.10) の第3邊で相關係

數に關して2次までの項をとったものになっている。すなわち、$\sin^{-1}\rho_{12}$ は ρ_{12} で置換える等、また（3. 9）により $\rho_{12}/\sqrt{1-u^2\rho_{12}^2}\cdot\sin^{-1}\rho_{34\cdot12}(u)$ は $\rho_{12}\,\rho_{34}$ で置換える等によって、（3. 10）から（3. 11）の形が得られる。David〔六〕は（3.11）の形の展開式で T_4 を計算するには、相關係數がいずれも 0.5 程度の値を示すとき、20組の項（twenty sets of terms）をとらないと適當な精度は得られないといっているが、（3. 10）は何等の近似も含んでいない正確な式であるので、逆正弦函數の表と數値積分とを利用すれば、（3. 10）によつてかなり精度のよい計算結果が得られることになる。

また Mc Fadden〔七〕は $j\neq k$ なるすべての j、k に對して ρ_{jk} が同一の値 ρ をとる場合の T_4 の近似計算の式

$$(3.\ 12)\qquad T_4\begin{pmatrix}\rho & \rho & \rho\\ & \rho & \rho\\ & & \rho\end{pmatrix}=\frac{1}{16}+\frac{3}{4\pi}\sin^{-1}\rho+\frac{1}{4\pi^2}U(\rho)$$

ただし

$$(3.\ 13)\qquad U(\rho)=3\rho^2-4\rho^3+7\rho^4-12\rho^5+\frac{338}{15}\rho^6-44\rho^7+\frac{3162}{35}\rho^8-\cdots\cdots$$

を與えているが、（3. 12）を一般の場合の正確な式（3. 10）と比較すると、$U(\rho)$ の部分が（3. 10）における積分で $\rho_{jk}=\rho$ $(j\neq k)$ とおいた値

$$(3.\ 14)\qquad 3\rho\int_0^1\frac{1}{\sqrt{1-u^2\rho^2}}\sin^{-1}\frac{\rho-u^2\rho^2}{1+\rho-2u^2\rho^2}du$$

に相當することがわかる。實際に積分（3.13）の値を ρ^8 まで展開すると（3. 13）が得られる。

r が5のとき　この場合には集合（1、2、3、4、5）の部分集合で、空集合が1個、2個の元からなるものが10個、4個の元からなるものが5個ある。それぞれの場合について S_0、S_2、S_4 の形は（3. 6）、（3. 7）、（3.8）に與えられている。その結果、（3. 5）を利用すれば、

$$(3.\ 15)\qquad T_5\begin{pmatrix}\rho_{12} & \rho_{13} & \rho_{14} & \rho_{15}\\ & \rho_{23} & \rho_{24} & \rho_{25}\\ & & \rho_{34} & \rho_{35}\\ & & & \rho_{45}\end{pmatrix}=\frac{1}{32}+\frac{1}{16\pi}\sum_{1\leq j<k\leq5}\sin^{-1}\rho_{jk}$$

$$+\frac{1}{32}\sum_{1\leqq j<k<l<m\leqq 5} S_4\begin{pmatrix}\rho_{jk} & \rho_{jl} & \rho_{jm}\\ & \rho_{kl} & \rho_{km}\\ & & \rho_{lm}\end{pmatrix}$$

が得られる。ただし最後の項に現われるS_4の函數形は(3. 8)に與えられているので、(3. 8)の右邊で添數のつけかえを行えば、(3. 15)の計算に必要なS_4はすべて求められる。

rが一般の値のとき　T_rの一般形は(3. 5)に與えられている。(3.5)の右邊のS_0、S_2、S_4まではその函數形がすでに求まったので、偶數のrに對してS_rをS_{r-2}から計算する漸化式をつぎに擧げておくことにする。(3. 8)は實はそのような漸化式でrを4とした場合に他ならないのである。

x_1、x_2、……、x_rを平均値はいずれも0、標準偏差は1で、r變量の正規分布に從がう變數として、相關行列を(3. 1)とする。S_rの定義によれば、(3. 3)より

$$(3.\ 16)\qquad S_r\begin{pmatrix}\rho_{12} & \rho_{13}\cdots\cdots\rho_{1r}\\ & \rho_{23}\cdots\cdots\rho_{2r}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \rho_{r-1,r}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(i\pi)^r}\int\cdots\cdots\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{j,k=1}^{r}\rho_{j,k}t_j t_k\right]\cdot\frac{dt_1\cdots\cdots dt_r}{t_1\cdots\cdots t_r}$$

となる。

ここで相關行列(3. 1)の代りに行列

$$(3.\ 17)\qquad \begin{Vmatrix}1 & u\rho_{12}\cdots\cdots u\rho_{1r}\\ u\rho_{21} & 1\cdots\cdots\ \rho_{2r}\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\\ u\rho_{r1} & \rho_{r2}\cdots\cdots\ 1\end{Vmatrix}$$

を考える。(3.1)が正值であれば、$0\leqq u\leqq 1$とするとき(3. 17)も正值になることが示される。しかも(3. 17)の對角線上は全部1であるから、これを相關行列とみなすことができる。この相關行列に對して(3.16)を計算すると

$$(3.\ 18)\qquad S_r\begin{pmatrix}u\rho_{12} & u\rho_{13}\cdots\cdots u\rho_{1r}\\ & \rho_{23}\cdots\cdots\rho_{2r}\\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ & \rho_{r,r-1}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(i\pi)^r}\int\cdots\cdots\int\exp\left[-\frac{1}{2}t_1{}^2-u\sum_{j=2}^{r}\rho_{1j}\,t_1\,t_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=2}^{r}\rho_{jk}\,t_j\,t_k\right]\cdot\frac{dt_1\cdots\cdots dt_r}{t_1\cdots\cdots t_r}$$

となる。(3.18) を $S_r(u)$ とおけば、求むる (3.16) は $S_r(1)$ で與えられる。(3.18) からわかるように $S_r(0)=0$ であるから、(3.16) は

(3.19)　$$S_r(1)=\int_0^1\frac{\partial S_r}{\partial u}du$$

と表わされる。

そこで (3.18) より $\partial S_r/\partial u$ を計算すると

$$\frac{\partial S_r}{\partial u}=\frac{-1}{(i\pi)^r}\int\cdots\cdots\int\exp\left[-\frac{1}{2}t_1{}^2-u\sum_{j=2}^{r}\rho_{1j}\,t_1\,t_j-\frac{1}{2}\sum_{j,k=2}^{r}\rho_{jk}\,t_j\,t_k\right]\cdot\frac{\sum_{j=2}^{r}\rho_{1j}\,t_1\,t_j}{t_1\cdots\cdots t_r}dt_1\cdots\cdots dt_r$$

が得られるから、$\partial S_r/\partial u$ は

(3.20)　$$\frac{-\rho_{1j}}{(i\pi)^r}\int\cdots\cdots\int\exp\left[-\frac{1}{2}t_1{}^2-u\sum_{k=2}^{r}\rho_{1k}\,t_1\,t_k-\frac{1}{2}\sum_{k,l=2}^{r}\rho_{kl}\,t_k\,t_l\right]\frac{t_1\,t_j}{t_1\cdots\cdots t_r}dt_1\cdots\cdots dt_r$$

で $j=2,\cdots\cdots,r$ とおいた $r-1$ 個の項の和の形になる。

そこでつぎに (3.20) で j が2の場合の値を求めておく。この場合には (3.20) の二行目にある分數式で $t_1\,t_2$ は分母子で消し合って、$t_3\cdots\cdots t_r$ だけが分母に殘る。そこで (3.20) の exp〔　〕の部分をまず t_1 と t_2 について積分することを考える。

この〔　〕内を -2 倍したものは、係數が行列 (3.17) で與えられる t_1、……、t_r の2次形式になっている。(3.17) は正値であるから、行列 (3.17) の行列式を $R(u)$ で表わせば、t_1、……、t_r の函數

(3.21)　$$\frac{\sqrt{R(u)}}{(2\pi)^{r/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}t_1{}^2-\sum_{k=1}^{r}u\rho_{1k}\,t_1\,t_k-\frac{1}{2}\sum_{k,l=2}^{r}\rho_{kl}\,t_k\,t_l\right]$$

は、分散行列が (3.17) の逆行列で與えられる r 變量正規分布の密度函數と考えられる。いま $R(u)$ における k 行 l 列の元の餘因子を $R_{kl}(u)$ で表わせば、その正規分

布の分散行列は

$$(3.\ 22)\qquad \frac{1}{R(u)}\left\|\begin{matrix} R_{11}(u) & R_{21}(u)\cdots\cdots R_{r1}(u)\\ R_{12}(u) & R_{22}(u)\cdots\cdots R_{r2}(u)\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\ R_{1r}(u) & R_{2r}(u)\cdots\cdots R_{rr}(u)\end{matrix}\right\|$$

となる。

そこで（3. 21）を t_1 と t_2 に關して全範圍で積分すれば、ここで考えた正規分布における t_3、……、t_r の周邊密度函數が得られる。その周邊密度函數では、分散行列は（3. 22）の第3～r 行、第3～r 列

$$(3.\ 23)\qquad \left\|\begin{matrix} R_{33}(u)/R(u)\cdots\cdots R_{r3}(u)/R(u)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ R_{3r}(u)/R(u)\cdots\cdots R_{rr}(u)/R(u)\end{matrix}\right\|$$

で與えられる。

さて（3. 23）の行列式は Jacobi の定理〔1〕によって

$$\frac{1-u^2\rho_{12}{}^2}{R(u)}$$

となり、その行列式における $R_{kl}(u)/R(u)$ の餘因子は

$$(3.\ 24)\qquad \frac{1}{R(u)}\begin{vmatrix} 1 & u\rho_{12} & u\rho_{1l}\\ u\rho_{21} & 1 & \rho_{2l}\\ u\rho_{k1} & \rho_{k2} & \rho_{kl}\end{vmatrix}$$

となる。（3. 24）に現われた行列式を $P_{kl}(u)$ とおくことにすれば、（3. 23）の逆行列の $k-2$ 行、$l-2$ 列の元は $P_{kl}(u)/(1-u^2\rho_{12}{}^2)$ となる。よって右に述べた t_1、……、t_r の密度函數と t_3、……、t_r の密度函數との關係式はつぎのように表わすことができる。

$$\iint_{-\infty}^{\infty}\frac{\sqrt{R(u)}}{(2\pi)^{r/2}}\exp\Big[-\frac{1}{2}t_1{}^2-\sum_{k=2}^{r}u\rho_{1k}t_1t_k$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{k,l=2}^{r}\rho_{kl}\,t_k\,t_l\Big]dt_1\,dt_2$$

$$=\frac{1}{(2\pi)^{(r-2)/2}}\sqrt{\frac{R(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}}$$

$$\cdot\exp\Big[-\frac{1}{2}\sum_{k,l=3}^{r}\frac{P_{kl}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}t_k\,t_l\Big]$$

そこで j が2のときの（3. 20）で t_1 と t_2 に關する積分を行った結果は

$$(3.\ 25)\qquad \frac{2}{\pi}\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\times\frac{1}{(i\pi)^{r-2}}\int\cdots\cdots\int$$

$$\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k,l=3}^{r}\frac{P_{kl}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}t_k t_l\right]$$

$$\cdot\, dt_3\cdots\cdots dt_r$$

となる。ここで $k=3,\cdots\cdots,r$ に對して

$$\sqrt{\frac{P_{kk}(u)}{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\,t_k$$

を改めて t_k とおいて變數變換を行えば、（3.25）はつぎのようになる。

$$(3.\,26)\quad \frac{2}{\pi}\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\times\frac{1}{(i\pi)^{r-2}}$$

$$\cdot\int\cdots\cdots\int\exp\left[-\frac{1}{2}\sum_{k,l=3}^{r}\rho_{kl\cdot12}(u)t_k t_l\right]$$

$$\cdot\, dt_3\cdots\cdots dt_r$$

ただし

$$(3.\,27)\quad \rho_{kl\cdot12}(u)=\frac{P_{kl}(u)}{\sqrt{P_{kk}(u)\,P_{ll}(u)}}$$

であって、これは相關行列が（3.17）で與えられたときの Yule の記號による偏相關係數になっている。

しかるに他方からすると（3.26）の×印以後は、$r-2$ 個の變數 x_3、……、x_r について、相關係數が（3.27）で與えられたときの S_{r-2} に等しい。よって j が2のときの（3.20）は

$$\frac{2}{\pi}\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}S_{r-2}\left\langle\begin{array}{lll}\rho_{34\cdot12}(u)\cdots\cdots & \rho_{3r\cdot12}(u)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & \rho_{r-1,r\cdot12}(u)\end{array}\right\rangle$$

に等しいことになる。

j が他の値のときの（3.20）も同樣にして求められる。$\frac{\partial S_r}{\partial u}$ はこれらの（3.20）の値の和であったから、（3.19）によってつぎの漸化式が得られたことになる。

$$S_r\left\langle\begin{array}{ll}\rho_{12}\ \ \rho_{13}\cdots\cdots & \rho_{1r}\\ \quad\ \ \rho_{23}\cdots\cdots & \rho_{2r}\\ \quad\ \ \cdots\cdots\cdots & \\ & \rho_{r-1,r}\end{array}\right\rangle$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^1\left[\frac{\rho_{12}}{\sqrt{1-u^2\rho_{12}{}^2}}\right.$$

$$\cdot\, S_{r-2}\left\langle\begin{array}{ll}\rho_{34\cdot12}(u)\cdots\cdots & \rho_{3r\cdot12}(u)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ & \rho_{r-1,r\cdot12}(u)\end{array}\right\rangle+\cdots\cdots$$

$$+\frac{\rho_{1r}}{\sqrt{1-u^2\rho_{1r}{}^2}}$$

$$\cdot S_{r-2}\left[\begin{matrix} \rho_{23\cdot 1r}(u)\cdots\cdots\rho_{2,r-1\cdot 1r}(u)\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \rho_{r-2,r-1\cdot 1r}(u)\end{matrix}\right]du$$

S_0、S_2、S_4はすでに求めてあるので、この漸化式を利用すれば、任意の偶數rに對してS_rを計算することができる。

これを利用すれば任意のr（偶數でも奇數でもよい）に對するT_rを（3.5）から計算することができる。

參考文獻

〔一〕 藤原松三郎　行列及び行列式　岩波書店 1934

〔二〕 Moran P. A. P. Rank correlation and product-moment correlation, *Biometrika*, Vol. 35, 1948.

〔三〕 Nabeya S. Absolute moments in 2-dimensional normal distribution, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 3, 1951.

〔四〕 Nabeya S. Absolute moments in 3-dimensional normal distribution, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 4, 1952.

〔五〕 Kamat A. R. Incomplete and absolute moments of the multivariate normal distribution with some applications, *Biometrika*, Vol. 40, 1953.

〔六〕 David F. N. A note on the evaluation of the multivariate normal distribution, *Biometrika*, Vol. 40, 1953.

〔七〕 McFadden J. A. An approximation for the symmetric, quadrivariate normal integral, *Biometrika*, Vol. 43, 1956.

〔八〕 鍋谷清治　4變量正規分布の絕對積率　一橋大學研究年報　人文科學自然科學研究　1959

（一橋大學講師）