ロナルド・エイルマー・フィッシャー

鍋谷清治

一　經歴

ロナルド・エイルマー・フィッシャー（Ronald Aylmer Fisher）は近代数理統計學いわゆる推測統計學の創始者としてあまりにも有名であるが、まず最初にその經歴についてみることにしよう。

フィッシャーは一八九〇年二月一七日にロンドン郊外で七人兄弟の末子として生れた。父は非常に活動的な事業家で美術について廣い知識をもっており、母は練達な辯護士の娘であった。

フィッシャーも栴檀は二葉より芳しの言葉のように幼少のときからその才能を示していた。學齢前から母は彼に天文學に關する書物を讀み聞かせていたとか、早くから球面三角法を勉强したりしていた位である。しかも彼はよい先生につくことが出來たのであるが、殘念なことに視力が非常に弱かった。そのためフィッシャーは晩になると人工の光で勉强することを禁じられ、先生はフィッシャーに耳だけによる教授を行っていた。フィッシャーの論文の中には高次元の幾何學を利用したものが多いが、そのための直觀は當時から頭の中だけで考えることを訓練されていた賜であるといわれている。このように視力が弱かったことは彼の學問上の生活にマイナスにばかりなってはいなかったが、さらにそのために軍隊に採用されなかった點も彼にとっては有益であった。

フィッシャーは大學に行く頃には家庭の經濟的な理由のため奬學金を受けざるを得ない狀態になった。彼は一九〇九年にケンブリッジ大學に入學し、一九一二年には數學の優等生としての試驗を通過し、この年に度數曲線

のあてはめに關する論文を發表した。さらに一年間物理學の學生として統計力學、量子論、誤差論を勉强した。この時代にフィッシャーは遺傳に關するメンデルの理論が進化論の數學的な基礎になっていることを感じて一九三〇年の著書〔2〕の骨組が構成されていた。またフィッシャーは數學における大陸式の嚴密な證明はそれが必要な場合にのみ行えばよいのであって、いかなる場合にもそのような方式で證明しようとする傾向が英國本來の物理數學的な傾向に代ろうとすることに不滿を感じていた。數學の論理は嚴密性そのものでなければならないということはよくいわれている。しかし直觀的な論理は時には誤りを犯すことがあっても、嚴密性のみにこだわって新しい事實を發見するのがなおざりにされてはならないと主張している。

フィッシャーはケンブリッジを去った後一九一三年から一九一五年の間は證券取引所の統計の仕事に從事しており、一九一五年から一九一九年の間は高等學校の教師として數學と物理學を教えていた。

統計學に關してはフィッシャーはユールの講義に出席しており、大學卒業後は一九一四年に始めてK・ピアソンに會う機會をえた。しばらく後にフィッシャーは二變量の正規母集團から抽出された標本の相關係數の分布に關する論文を一九一五年に發表しているが、これがフィッシャーの手になる精密標本分布の最初の論文である。フィッシャーは精密標本分布の最初の論文は一九〇八年のゴセットの論文であるとしているが、この論文ではフィッシャーが取扱った問題の一部分の問題に關する解答が推測として與えられている。このゴセットの論文がフィッシャーに大きな刺戟を與えたことは事實である。

フィッシャーが統計學に關する劃期的な成果を續々と發表し始めたのは、一九一九年にロザムステッドの農事試驗場に職をえてからである。ここで彼は理論的な面では一九二一年に彼の統計理論の骨格を發表している。また應用方面で革命的な實驗計畫の理論が發表されたのもこの時期である。

その後一九三三年にはロンドン大學の優生學の教授となり、一九四三年にはケンブリッジ大學の遺傳學の教授となって、最近に至るまで著書、論文を發表している。

二　著　書

フィッシャーには後記のように七つの著書がある。

〔1〕はフィッシャーがロザムステッドの農事試驗場に任命されてから六年後に出版されたものであって、新しい統計學の基礎になる重要な考えはほとんどすべて取入れられている。この書物はK・ピアソンらの曲線のあてはめに關する統計的方法が研究者の實際に要求する事項に對して全く不適當であることを悟ったために、主として自然科學の研究者に新しい統計的方法を授ける目的で書かれており、數學的證明は一切省かれている。そのためこの書物が難解であるというもっぱらの評判であったが、フィッシャーはその序文においてつぎのようにいっている。一般論における定理を實際に應用することは、數學的な證明によって定理を確立することとは別の技術である。應用に際しては定理の意味をよく理解することが大切である。また、どの方法を用いるかはそのデータの性質によってきまるのであって數學的に無知のために誤った方法を用いてはならない、としている。要するに數學を正確に理解しさえすれば、數學の專門家でなくても數學者の發見した定理を正しく利用することができるというのがフィッシャーの考えである。

この書物に取入れられている方法はしばらくは學界から無視されていたが、次第に普及するようになり、ユーデンの言葉によれば、これらの方法に關して最初はこの古典を引用されているが、後にはこれらの方法についての一般的知識は當然のこととして引用さえもされなくなるであろうといっている。最近ではフィッシャーの考えの後をつぐ（中には部分的な反對もあるが）學者たちの手になる良書も多數出てきたのでようやく〔1〕の影が薄くなってきたが、推測統計學の創始者が彼が導入したいろいろな手法をどのように解釋しているのかを知るにはもっとも好適の書物である。なお〔1〕は初版以來版を重ねごとに内容も增加して、現在では十二版に達しており、日本語の他、佛・伊・西・獨の諸國語にも飜譯されている。

〔2〕はメンデリズムの基礎に立ってダーウィンらの自然淘汰に關する理論を一層嚴密な根據のもとに説明したものであるが、いまでは絶版となっており、日本にも殆んど來ていないので、筆者もまだ見ていない。

〔3〕はロザムステッドの試驗場におけるいろいろな農事試驗の實驗計畫の問題から生じたものであって、實驗結

果に對して統計解析が適用できるための條件、並びに與えられた條件の下で實驗の效果をもっとも擧げるための方法について主として書かれている。實驗計畫については〔1〕でも分散分析のところで少しく觸れられているが、その後の發展の結果は〔1〕に追加せずにすべて本書にまとめたものである。現在では他の良書も出ているが、本書もまた實驗計畫の根本的な思想を知るにはもっともよいものである。

〔4〕は新しい統計的方法のために必要な數表をイェーツと共に編集したものである。數學における基本的な數表、その他統計學の一般的な目的のために用いられる數表の他に、表題に示すように特に生物學・農學・醫學方面の研究に用いられる數表も若干取入れられている。

〔5〕は遺傳學における問題を取扱ったものであって、ある種の一定の方法で交配を繰返していった場合に、各遺傳因子型の比率や交配の型の比率が世代と共にどう變っていくかを研究したものであって、數學的にはマルコフ過程に關する理論が取扱われている。

〔6〕はフィッシャーが數理統計に關する論文の中から自分が重要と思うものを選び出してその各論文に註をつけたものである。原論文の誤りの中で自分で氣づいたものは〔6〕で修正されている。

〔7〕はフィッシャーが自分の統計學の基礎を一層掘下げて研究した結果であって、ネイマンやE・S・ピアソンとの論爭點に關する自分の意見が中心の內容であり、〔1〕や〔3〕が統計學を利用する研究者のために書かれているのに對して、〔7〕は理論的方面の研究者を對象としている。

三　統計理論

つぎにフィッシャーの統計學についてみることにしよう。

元來自然科學系統の研究者は自分の專門の學問の定義などということをあまり嚴密には考えないのであるが、フィッシャーは統計學を觀測にもとづく資料を對象とする數學であるとみなしている。ここでその資料の取扱いの際に現われる統計學上の問題を、(一)集團の研究、(二)變動の研究、(三)資料の簡約方法に關する研究、の三つに分類している。

さらに集團についてつぎのように述べている。統計學とはもともとは國家に住む人間の集團に關する學問とい

うことから發した名稱であるが、そこで取扱われている方法は、對象とする集團が人間であるとか一つの國家に屬するということとは關係がない。また、さらにこれが物質的なものだけに限られてもいない。例えば、ある觀測を限りなく繰返すものとすればそこで觀測値の假想的な集團ができるが、この集團が誤差論で取扱う集團である。

集團についての研究ということから、必然的に變動ということが問題になってくる。昔の統計學では總數とか平均とかを知ることだけが統計學の目的であったけれども、フィッシャーは變動ということを非常に重視し、特に實驗計畫法などにおいては、目的とする數値の推定値の誤差變動が多少增大しても、その變動の大きさがデータから正しく推定できるように實驗を計畫しなければならないと主張している。

つぎに統計學の第三の面である資料の簡約ということは、與えられた厖大な資料から、その中に含まれている不必要な情報を取除いて、有用な情報のすべてを比較的少數の數値によって表現しようということを意味する。

そのために、與えられた數値の集まりに對して、同じ條件でえられると考えられる數値全體からなる假想的な無限母集團を考え、手許の資料はこの母集團からの確率標本と解釋する。この母集團の分布をある種の方法で數學的に規定した場合、その數式の中には通常いくつかの母數が入ってくる。この母數の値を正確に知ることができさえすれば、標本が提供するすべての（しかもそれ以上の）情報をうることになる。しかし實際には與えられた資料からは母數の値を正確に知ることはできず、その推定値を知ることができるだけである。そこで與えられた資料に對して適切な母集團分布の數學的形式がわかって、さらに母數に對してできるだけよい推定値が求められれば、そのデータから有效適切な情報をすべて抽出したことになる。またさらに求められた推定値に對してその誤差の分布を知り、或いは與えられたデータが假說に適合するかどうかを檢定するのも必要なことである。このように考えて、フィッシャーは資料の簡約の際の問題を三つの型に分類している。

㈠母集團分布として適當な數學的な型を選ぶこと——母集團の型の規定の問題

㈡母集團分布の未知の母數の推定に適した量を標本か

ら計算する方法を選ぶこと——推定の問題

㈢確率抽出を行ったときの母數の推定値の分布や檢定に用いる量の分布に關する正確な性質を導くこと——分布の問題

以上において、統計學で目標とする知識は標本に關する知識ではなく、母集團分布に關する正確な知識であって、これさえわかればそれ以上にデータの提供する情報は何も殘らないと云い切っている點は、注目に値するであろう。

フィッシャーの統計理論はよく小標本理論といわれる。これは母集團分布の數學的な型がわかれば、その母集團から抽出された小標本に對しても適用できる理論という意味である。しかしここで小標本理論の特徴とすることは、㈢で述べたような統計量の正確な分布を求めることにあるのであって、これがいろいろな結論に達する基礎になっている。この意味で小標本理論の代りに精密標本理論という言葉が使われることもある。これに對して從來の統計理論では統計量の分布の正確な知識というものは重要視せず、大標本であれば確率抽出の際の統計量の分布は正規型に近づくことを考慮に入れて、正規分布を近似的に用いている。このような近似を用いる方法を大標本理論といっている。

小標本理論においては右のように正確な標本分布を求めることが問題とされるために、母集團分布の型がわかっていないとこれが用いられない。フィッシャーは多くの場合、母集團分布は正規分布と假定していろいろな統計量の標本分布を求めている。この假定については批判もあるが、フィッシャーは生物學上の測定値などについてはこの假定はもっともなものとしてあまりこの點には觸れていない。そこで一方では母集團分布の型に無關係な標本理論が望まれるようになり、これが非母數理論として發達してきている。その中でも確率化の檢定などは實驗計畫法に關連してフィッシャー自身が考えたものであるが、そのような檢定の結果は漸近的には母集團分布を正規分布とした場合の結果と一致することが示されている。

それではこのような小標本理論は社會科學の分野ではどのようにして役に立つのであろうか。社會科學では實際に觀測される集團はしばしば厖大な大きさになっている。そこでこのような大きな集團の成員に關する調査結

果を標本と考えた場合、大標本理論のみで足りるのではなかろうかと考えられる。しかしフィッシャーによれば社會科學で取扱う集團においては多くの場合母集團分布の型の規定が困難であって、このような大標本から計算された統計量に對していろいろな分析を行うときに小標本の理論が適用される。このような場合、通常の生物學などの實驗よりもとづく資料であっても、尨大な觀測にもさらに小さな標本として取扱わなければならないこともすらあると述べている。

四 推定論

通常の數理統計學の書物では推定法に點推定と區間推定の二つを區別している。點推定とは推定値の精度を考えずに母數の値をある統計量に等しいとみなすこと、區間推定とは推定値の精度をある程度考えに入れて推定を行うことである。しかしフィッシャーはこのような意味での點推定は自分もK・ピアソンもガウスも考えたことはない。推定を行うからにはその精度は當然考えなければならないことであって、點推定と區間推定の區別などは無用のものであるとしている。

どのような推定値が望ましいかという問題は標本分布の問題の應用であって、その推定値の標本分布によって決定される。

フィッシャーは望ましい推定値の基本條件としてまず第一に一致性を擧げている。一致統計量とは〔1〕によれば標本が大きくなるに從って母數の正しい値にいくらでも近づくような統計量を指している。しかも多くの簡單な場合において、標本誤差の分布は標本の大きさが大きくなるに從って正規分布に近づく。その標本誤差の分散は通常標本の大きさに逆比例して減少していく。一定の大きさの標本に基づいて母數の値を推定するのに、大標本においてもっとも小さな分散をもつ統計量が重要であって、これを有效統計量といっている。

〔7〕においては大標本ということをいわずにつぎのような形で一致性を定義している。觀測度數の函數であって、その觀測度數に期待値を代入したときに正確な値をとるような統計量を一致統計量といっている。小標本で一致性をもつ統計量は前の定義でも一致性をもつことは明らかである。また有效性についても、大標本について右のように分散にもとづいて定義するだけでは不完全で

あって、小標本においては母數の推定に關して標本が提供する情報をすべて含んだ統計量を用いなければならない。このような統計量を充足統計量といっている。

また〔1〕によれば、大標本から計算された推定値の效率がつぎのように定義されている。千個の觀測値からなる大標本から有效統計量Aと分散がその二倍になっている他の一致統計量Bとを求めたとする。Bを用いるなら、大きさ千の標本から求められる統計量Aと同じ精度の推定値をうるためには、大きさ二千の標本が必要である。そこでBは觀測値に含まれている情報の50％しか役立てていないので、Bの效率は50％という。これは大標本において推定値の分散をもとにして定義された效率である。この效率の定義も〔7〕によれば不完全で第一段階としてのみ採用できる定義であって、小標本においてその定義を完成するためには、そこで問題とする推定値が、與えられた觀測値の提供する情報の何％を利用しているかによって效率をきめなければいけないとしている。ただしここでいう情報とは後で述べる尤度函數から正確に計算されたものである。この點も精密標本分布の考えを徹底させてきたものであって、小標本における標本分布を考えるときには、それが正規分布とかなり違うことを考慮しなければならないので、標本分布の分散によって推定値の精度を比較するのは不適當との考えに從っている。チェビシェフの不等式による記述は標本分布の確率に關する不等式の記述しか與えないことから、フィッシャーには興味ないようである。

ある母數の充足統計量が與えられると、その充足統計量の函數も一般に充足統計量となる。そこで種々ある充足統計量の中でどれを撰ぶべきかということが問題になってくるが、フィッシャーはこの點には全く觸れていない。ただ充足統計量が存在する場合には最尤法を用いれば充足統計量がえられるということをいっている。フィッシャーはベイズの定理において事前確率が知られていない場合の歸納的推論の價値を高く評價しており、これが信賴確率になっているのであるが、信賴確率を計算するためには、充足統計量を用いなければならない。しかもそこで種々ある充足統計量のうちでどれを用うべきかということは一般に信賴確率に影響を及ぼさないので、フィッシャーはその問題を重視していないと考えられる。

フィッシャーは不偏推定値の價値を高く評價してはいない。一致性や有效性については統計量tが母數θの一致（有效）統計量であれば、tの函數$f(t)$は$f(\theta)$の一致（有效）統計量になっているが、そのような關係は不偏性については成立しない。それゆえ、不偏性は要求すべきことではないとしている。しかし不偏性の意義を全く認めていないわけではない。分散分析に際して自由度による除法を提唱して、一定の系統的な計算方式に基づく檢定方法を確立したこと、多數の小標本に基づく分散の推定値を合成して、單一の分散の推定値を導びく際に、不偏推定値の利用を勸めていること、などは不偏性ということを形式的に要求する以上にその意義を十分認識しているものと思われる。

つぎに推定の技術的な面について少しく述べておくことにしよう。フィッシャーは與えられた母集團からどのような標本が生じ易いかということを表現するには通常のように確率という言葉を用いているが、與えられた標本に對して種々の母集團の中でどれを選ぶべきかということを表わすには、確率でなく尤度を用うべきであって、尤度は確率論の法則に從うものではないといっている。いま、母數をθとし、θが與えられたときに觀測値x_1、……、x_nが得られる確率（または確率密度）を$L(x_1, \ldots\ldots, x_n; \theta)$とする。觀測値$x_1$、……、$x_n$が與えられたとき、母數$\theta$の値としてどのような値が尤もらしいかを決定するものは、そのx_1、……、x_nの値についていろいろなθの値に對する$L(x_1, \ldots\ldots, x_n; \theta)$の大小である。このLの値を、$\theta$をいろいろに動かしたときのLの最大値で割ったものをθの函數と考えたとき尤度という。この考えからすると尤度を最大値1にするようなθの値が一番尤もらしい値であって、與えられた觀測値x_1、……、x_nに對してそのようなθの値を求めるという操作を最尤法といっている。

最尤法はガウスが正規分布のあてはめに利用して最小自乘法を導いたものであって、これによれば大標本からは〔1〕の意味で有效な統計量が算出され、小標本からは、充足統計量が存在する場合には充足統計量（小標本で有效な統計量）がえられる。これに對してK・ピアソンの確立した積率法によれば、その結果えられる推定値は必ずしも有效なものではない。

五　有意性検定

フィッシャーはゴセットの考えによって多くの實驗結果を解釋する際に精密標本分布を利用した有意性検定を行っている。その多くのものはK・ピアソンの考案したχ^2分布、ゴセットの發見したt分布、並びにフィッシャー自身の發見したz分布（F分布）に基づくものである。χ^2分布は主として適合度の検定のために近似的に利用される分布であって、これについては、期待度數の小さな級についての取扱い、母數を推定して適合度検定を行うときには有效な推定値を用うべきこと、などがフィッシャーによる貢獻である。さらにいくつかの問題についてはフィッシャーが發見した。t分布は、ゴセットが平均の有意性を検定するための分布として推量によって求めたものであるが、フィッシャーはこれの證明を行い、さらに回歸係數に關係した検定をt分布に歸着させたのもフィッシャーの功績である。z分布はχ^2分布、t分布のいずれの擴張にもなっていて、フィッシャーの發展させた分散分析法による検定に用いられる。現在では多數の實驗計畫法が考案されていて、z分布に歸着さるべき検定方式は極めて多い。

これらの検定の多くのものは、標本からえられた値と假説上の母數の値との差が偶然の結果としてしばしば生ずるような程度の問題とするに足らぬ大きさのものであるか、或いは偶然だけからは非常に僅かの確率でしか生じない大きな差違なのか、ということに對する検定になっている。前者の場合にはこの差は有意でない、後者の場合には有意であるという。例えば5％の確率は小さいものと考えれば、假説が正しいとしたときに5％の確率でしか生じない大きな差違が現われたならその結果は有意なもの、すなわち假説が正しいとして偶然だけから生じたものではないと判定する。これに對して標本からえられた値と假説上の母數の値との間に若干の差があっても、その差（或いはそれより大きな差）が5％以上の確率で生ずる場合には、有意性の水準に達しないものとして、その差に何か本質的な意味があるものとは考えない。この場合5％という値は有意性水準とよばれる。いろいろな實驗は假説を棄却する（有意な差を發見する）機會をうるために行われていて、實驗によって假説が證

明されるということはない。この意味でこの假説を歸無假説といっている。この場合歸無假説が正しいとしたときに5％の確率でしか生じないどの事象が發生したならば有意な差が生じたことを認めるかはフィッシャーは研究者が假説のどの面を檢定しようとしているかによってきまるものと考えている。

これに對して後にネイマン・ピアソンの假説檢定の理論が現われた。これによれば、歸無假説が棄却されたときにどのような假説を採用するかを考え、その場合に採用される假説を對立假説という。假説檢定においては二種類の誤りを犯す可能性を考え、その一つは歸無假説が正しいにも拘らずこれを棄却するという誤りでこれを第一種の誤り、他は對立假説が正しいにも拘らず歸無假説を棄却しない誤りでこれを第二種の誤りといっている。ネイマン・ピアソンの理論では第一種の誤りを犯す確率が與えられたときに、第二種の誤りを犯す確率がなるべく小さくなるような檢定を選ぶことを目標にしている。この考えでいろいろな檢定を作るとそれが多くの場合、これまでフィッシャーらが考案した檢定と一致することが證明された。

フィッシャーはそのように對立假説を念頭において檢定方式を定めるなどということは有意性檢定法の發展に貢獻しなかった科學の研究に關して無知な者が考え出したことであって、そのような理論は軍隊などで多數の製品を買入れるときの受容檢査（acceptance inspection）には適用できるが、これを科學上の目的のために用いる有意性檢定（test of significance）と混同すべきではないといって非難している。

フィッシャーによれば有意性檢定と受容檢査とのもっとも大きな違いは、受容檢査では母集團は客觀的に明確に定義されていて、檢査の結果も確定的なものになるが、有意性檢定では母集團は統計學者の想像の産物であって、檢定の結果も豫備的なものである點にある。

フィッシャーは有意性檢定は科學の研究の初期に用うべきものであって、その結果が科學の研究の終局的な目的になるものではないと考えている。そこで誤った判定をなす相對度數を少なくするとか檢定の費用を下げるとか、或いはワルトのように危險函數の値を小さくするような檢定を選ぶということは受容檢査の上では大切なことであるが、科學の研究の目的のためには意味がない。

受容検査においては第一種の誤りを犯す確率は満足なロットを不合格にする相對度數としての意味をもっているが、有意性検定では有意性水準は同一母集團から何度も抽出を行ったときに歸無假説が正しいにも拘らずこれを棄却する相對度數と解釋してはならない。科學の研究には同一母集團から何度も抽出を行うということはない。この點で逐次検査も科學の研究には無用のものと考えている。同一條件の下で實驗を何度か繰返せば、その全體を一まとめにしてこれを一つの標本として有意性検定を適用すべきであるとしている。それでは有意性水準とはいかなる意味をもつ量であるか。これについてはフィッシャーは假説を受入れまいとする (reluctance) 心理的な感覺の强さを表わすものであって、その感覺の强さは客觀的で合理的なものであるとしている。

それではフィッシャーのいうように、科學の研究においては歸無假説は検定のために暫定的に考える一回限りのものだから、有意性水準を相對度數と結びつけて考えることは不當なことであろうか。これについては少くもつぎのことはいえる。フィッシャーは實驗結果を見てから検定にかけることを考えに入れているようであるが、實驗を行う前に検定方法を定めておくのであれば、有意性水準を5%として行った検定ばかりを考えれば、歸無假説が正しい百回の場合のうち五回の割合でこれを棄却している。このことだけは當然のこととして認めざるをえないであろう。(フィッシャーは有意性水準は絶えず一定にしておくものではないといっているが。)

フィッシャーによれば前述のように有意性検定は暫定的のものであって、この暫定的な結論をうるのに、實驗の結果と歸無假説にもとづく値との違いによって、その差違が有意性の限界に達していれば歸無假説を否定していく。そこで母數を例えば0にした歸無假説が棄却された場合、母數の如何なる値が尤もらしいかということは、母數を他の値に等しいとおいた對立假説に基づいて考えられるのではなく、母數をいろいろに變えて生ずる歸無假説の連續體をもとにして決定しなければならない。すなわち、母數の他の値θについて調べるのに、母數の値がθという對立假説が眞であれば母數の値が0という歸無假説の検定においてどの程度の確率で歸無假説が棄却されるかを考えるのではなく、母數の値がθという歸無假説を作ってそれの検定をしなければならない。

θをいろいろに變化させればそこで歸無假說の連續體が生ずるが、このような連續體の中でどの歸無假說がデータに基づいて棄却され、どの歸無假說が棄却されないかということが大切なのである。このようなわけで對立假說とか第二種の誤りといったものを否定している。

六　信賴確率

フィッシャーの統計理論の中で特異なものに信賴確率なる概念がある。

フィッシャーによれば科學の本質的な進步は、實驗の結果からこれを說明する假說を導びく歸納的推理によって行われ、假說から結論を導びく演繹的推理は全く機械的なものであって、將來は人間の頭腦を煩わさなくてもすむようになろうといっている。ところで歸納的推理は多少なりとも不確實性をもつことになるが、その基礎になる確率論の論理はというと、實驗科學の發展以來長い間渴望されてきたにも拘らず、ようやくベイズによる論文が一七六三年に發表されたのである。

これが有名なベイズの定理であって、この定理によれば、いくつかの原因の生ずる確率（事前確率）とそれぞれの原因からある事象の發生する確率が與えられたとき、その事象の成立したことが觀測された場合、これがどの原因によって生じた確率（事後確率）がいくらということの計算が可能になる。

しかしながら自然科學における實驗結果から、歸納的推理によってこれを說明できる假說をうるためにこの定理を應用しようとすれば、多くの場合事前確率の値が未知のことに氣がつくであろう。そこでこのような場合、事前確率が一定という前提の下に事後確率を算出するのがベイズの取上げた例題における解法であった。後になって現われたラプラスによる確率の定義では、二つの事象の間で確からしさに差の根據がないときはその二つの事象の確率は等しいとしているが、このラプラスの定義によればベイズの前提は妥當性をもっている。しかしこのラプラスの考え方はいろいろな問題を含むものであり、ベイズ自身この前提に自信がなかったためか、生前にその論文を發表せず、その論文はベイズの死後に友人のプライスが發表したのである。

フィッシャーはベイズが歸納的推理を確率論の中に取入れたこと、しかもその中に含まれるベイズの前提に關

する缺點を認めていたことの二つの點においてベイズを高く評價している。

それではフィッシャーのいう信頼確率とはいかなるものであろうか。これを説明するに先だって確率という概念について述べておこう。

確率の定義としては初等的な書物において二通りの定義が擧げられている。その一つは先天的（數學的）確率、他は經驗的（統計的）確率である。いまある條件の下に起りうるすべての場合の數がn通りでその各場合が同程度に起りうることが期待されるとき、ある事象の起る場合の數がm通りであるならば、その事象の起る先天的確率はm/nという。この定義はラプラスの與えたものであって、この定義に從って確率の値を定めようとすれば、どのようなときに各場合が同程度に起りうると期待できるかの判定が嚴密には困難となる。ラプラスは前述のように各場合の起り易さが異なるという積極的な理由がなければこれらの場合は同程度に起りうるものとして確率を定義している。先天的確率の定義は初等的でわかり易いものであるが、同程度に起りうるという言葉が不明確なのは缺點であって、ラプラスに從ってこの定義を無制限に適用すれば矛盾も生じてくる。さらに重要なことは、ミーゼスの批判にあるように、この定義では確率といっても本質的には場合の數と場合の數との比を問題にしているに過ぎないのであって、實際問題において事象の起る確からしさに對してこの定義を適用するのは嚴密には不可能である。

つぎにある條件の下にN回觀測を行い、そのうちM回ある事象が發生したとする。Nを限りなく大きくしたときの相對度數M/Nの極限値をもって經驗的確率が定義されている。ミーゼスは無規則性という條件を考えに入れてこの經驗的確率の考えで確率を定義している。この定義に關しては、二つの事象が等しい確率をもつことをいうためには、客觀的な條件が具わっていなければならない。經驗的確率によれば多數回觀測を行った場合の相對度數についてははっきりした主張ができる。賭の損得を論ずる際の期望値も賭を多數回行う場合については、この定義によれば明確な意味をもつ。このような點から多くの統計學書では確率の定義としてこの定義が採用されている。

しかしフィッシャーによれば、確率を問題にするのは

通常そこで當面している一回の試行に關して確からしさの程度を表わすためであって、そのために多數回の試行にもとづく相對度數の極限の數値が利用できるためには別の條件が必要である。いま、將來の試行の系列のある部分集合をとれば、その中でこのような相對度數の極限をとると、その値は全系列から計算した値と異ってくるかも知れない。フィッシャーのいう條件とは、當面の試行を行う前に、その試行がこのようないかなる部分集合に屬することも知れていないということである。そこで確率という概念を實際問題に適用するに當って、その試行が相對度數の極限を計算する基礎になる定まった集團に屬するという知識と、しかもそれが相對度數の極限が異なるようないかなる部分集合にも屬することがわかっていないという無知とが條件とされるわけである。ここで無知ということの條件を持出したのはミーゼスの無規則性に相通ずるとも考えられるが、この條件は實際への適用の條件であって、ミーゼスのようにコレクチフに關する條件ではない。またラプラスの定義で問題とされた無知は二つの事象の間でいずれがより起り易いかという點に關する無知であって、この點もフィッシャーのいう無知とは異なるものである。

右に述べた條件からフィッシャーは演繹的推理においてはそこに與えられた公理のうちから若干個の任意の公理を選び出してそれだけから結論を導びくことができるが、不確實性の伴なう歸納的推理においては、確率の關係した結論を導びくのに、與えられている全部のデータを使用しなければならないとしている。

ここで信頼確率に關する説明に移ろう。いま母數θに對してTを充足統計量とし、$F(T,\theta)$は、母數θをもつ母集團から抽出された標本について、その統計量の値がT以下になる確率とする。$F(T,\theta)$はTに關してはもちろん單調函數であるが、θについても單調とする。この$F(T,\theta)$という函數は與えられたθの値に對してTの確率分布を示すものであるが、いまTの觀測値がえられたときに、θに關する確率分布がやはりこの$F(T,\theta)$によって與えられるものと考える。こうして求められたθに關する確率が信頼確率とよばれるのである。

このθに關する確率分布は、ベイズの定理と同樣に、觀測値が與えられたときにこれから求められる母數の値に關する確率分布になっていて、この論法に從えばθの

事前確率が知られていなくても、観測の結果からθの値に關する確率分布を求めることができる。しかもこの事前確率が未知のことが信頼確率の論法が適用できるための條件の一つになっている。さらにθの充足統計量が存在すること、θもTも連續的な値をとることが信頼確率を求められるための條件である。この第三の條件は全く技術的な條件であるが、第一、第二の條件はTの値がわれわれの知っているすべての情報をつくしているということを意味する。フィッシャーの提案している確率の概念の適用に關する條件からするとこれは必須のことになる。いまθの事前確率が知られていれば、これを利用してベイズの論法に從ってθの事後確率を求めねばならず、またTが充足統計量でなければθの確率分布の導出に當ってデータの提供する情報の一部分しか利用していないことになる。

右に述べた信頼確率の理論がフィッシャーの統計理論の中でもっとも問題とされている點である。信頼確率は同様の條件の下で多數回観測を行ったときのθに關する相對度數の極限について述べているわけではない。この點から信頼確率（fiducial probability）の理論は多くの學者の攻撃の對象とされている。これに代るものとしてネイマンの信頼區間（confidence interval）が擧げられ、多くの統計學の教科書では信頼區間の説明が與えられている。フィッシャーによれば、θの値は観測されなくてもこれと同等な將來の観測値についての確率が信頼確率の論法で導かれるのであって、これは經驗的に確かめることができる。また一方フィッシャーは信頼區間では、観測された値も観測されなかった値も一緒にして異質的な集團の中で確率を考えていることを非難している。しかしわれわれにとっては、この點では相對度數と直接結びつけたネイマンの理論の方がはるかに理解し易いように思われる。

七　結　語

これまで述べてきたのは主としてデータの簡約方法に關するフィッシャーの統計學上の議論をその問題點を中心にした解説であった。統計學の應用方面におけるフィッシャーの業績としては、實驗計畫法並びに遺傳學への應用を擧げることができる。これらについては參考文獻を見ていただきたい。

フィッシャーの統計學はK・ピアソンらの生物統計學に對して、小標本の理論として登場してきた。その業績は誠に見事なものであって、いまではフィッシャーは統計學の第一人者として誰からも認められている。しかし新しい理論にはいろいろな批判が伴なうのは常である。例えば小標本論自身に關する批判もその一つであるが、さらに根本的には有意性検定に對する考え方や信頼確率に關する論議がもっとも大きな問題點である。しかもここで同一母集團から何度も標本抽出を行うという考えを議論の基礎として認めるか否かがフィッシャーとネイマン・ピアソンの間の基本的な意見の相違點である。フィッシャーはこれらの論議に際して絶對に自分の主張をまげない（部分的な修正は行うにしても）。しかも最近の著書・論文においては言葉激しく論敵を攻撃しており、相手もまたこれに反駁している。このようなことからこれらの論議はフィッシャーが生きている限りは續くものと思われる。しかしフィッシャーの死後にはこれらの點に關する論議は統計學史上の一つの話題に過ぎなくなるのではなかろうか。統計學はこれらの論議を通り越して前進していくものと思われる。

参考文献（フィッシャーの著書のみ）

〔1〕Statistical Methods for Research Workers, 1925, Oliver & Boyd. 遠藤健兒・鍋谷清治共譯 フィッシャー 研究者の爲の統計的方法 一九五二 莊文社
〔2〕Genetical Theory of Natural Selection, 1930, Oxford.
〔3〕The Design of Experiments, 1935, Oliver & Boyd. 遠藤健兒・鍋谷清治共譯 フィッシャー 實驗計畫法 一九五四 莊文社
〔4〕(with F. Yates) Statistical Tables for Biological, Agricultural and Medical Research, 1938, Oliver & Boyd.
〔5〕Theory of Inbreeding, 1949, Oliver & Boyd.
〔6〕Contributions to Mathematical Statistics, 1950, John Wiley & Sons.
〔7〕Statistical Methods and Scientific Inference, 1956, Oliver & Boyd.

（一橋大學講師）