一橋論叢　第三十八卷　第三號

一次不等式系の解に關する幾何學的考察

鍋谷清治

一

一次不等式系に關する議論は、リニヤー・プログラミングの問題に關連して、最近改めて注目されるようになってきた。リニヤー・プログラミングの問題は、周知のように、標準形に直せば、つぎのように述べることができる。

n個の變數x_1、……、x_nに關する制限條件

$$(1.1)\quad \begin{cases} a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n \geqq b_1 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m1}x_1+\cdots\cdots+a_{mn}x_n \geqq b_m \end{cases}$$

$$(1.2)\quad x_1 \geqq 0,\ \cdots\cdots,\ x_n \geqq 0$$

の下で、一次式

$$(1.3)\quad c_1x_1+\cdots\cdots+c_nx_n$$

の値を最小にすること。ただしここでaやbやcは與えられた定數である。

この問題に對する一つの（最も基本的な）幾何學的解釋は、x_1、……、x_nを座標とするn次元空間において、(1.1), (1.2)を滿足する點全體の集合Sを考え、Sの中で一次式(1.3)の値を最小にする點を求めるということである。そこで一次不等式系に關して、このSが空であるかどうか、Sが空でないとすればこれがどのような形

狀をなしているかという二つの問題が、リニヤー・プログラミングにとっては重要な問題となる。

第一の問題に關しては、Fan (3) の論文においていろいろと興味ある場合の解答が與えられている。

第二の問題に關してこれまで採られてきた方法は、x_1、……、x_n にさらに x_{n+1} を追加して、(1.1)、(1.2) から $n+1$ 變數の齊次不等式系

$$a_{11}x_1+\cdots\cdots+a_{1n}x_n-b_1x_{n+1}\geqq 0$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$a_{m1}x_1+\cdots\cdots+a_{mn}x_n-b_mx_{n+1}\geqq 0$$

$$x_1\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ x_n\geqq 0,\ x_{n+1}\geqq 0$$

を導びき、この齊次不等式系の解の集合から、$x_{n+1}=1$ とおいて、始めに與えられた非齊次不等式系の解の集合を求めるという方法である。この方法は代數學的には證明が簡單という點で優れたものであるが、幾何學的にはつぎのような面白くない點を含んでいる。すなわち、n 次元空間の中の圖形の形狀を知るのに、その圖形を $n+1$ 次元空間の中にはめこんで、$n+1$ 次元空間の中の錐體と超平面との交わりとしてこれを取扱っている點である。この小論では、このような手段を用いないで、n 次元空間の中ですべて片付くような方法で、この種の問題を取扱ってみたいと考えている。

二

ここでは n 次元空間の凸集合に關して、基本的な事實を擧げておく。

n 個の實數の順序づけられた排列 $(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ を n 次元空間の點という。n 次元空間の點に對しては、つぎの三つの算法を定義する。

c を實數、P を n 次元空間の點 $(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ とするとき、c と P の積を

$$cP=(cx_1,\ \cdots\cdots,\ cx_n)$$

と定義する。

二つの點 $P=(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$, $Q=(y_1,\ \cdots\cdots,\ y_n)$ が與えられたとき、PとQの和を

$$P+Q=(x_1+y_1,\ \cdots\cdots,\ x_n+y_n)$$

PとQの內積を

$$(P,\ Q)=x_1y_1+\cdots\cdots+x_ny_n$$

と定義する。

内積の記號を使えば、不等式系（1.1）はつぎのように書くことができる。いま、（1.1）の左邊の係數を用いて

$$(2.1)\quad \begin{cases} A_1=(a_{11},\ \cdots\cdots,\ a_{1n}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ A_m=(a_{m1},\ \cdots\cdots,\ a_{mn}) \end{cases}$$

とおき、$P=(x_1,\ \cdots\cdots,\ x_n)$ とすれば

$$(2.2)\quad (A_1,\ P)\geqq b_1,\ \cdots\cdots,\ (A_m,\ P)\geqq b_m$$

n 次元空間の二點をP、Qとするとき、$cP+(1-c)Q$（ただし $0\leqq c\leqq 1$）の形に書表わされる點全體の集合を、二點P、Qを結ぶ線分という。n 次元空間の點集合において、Sに屬するどの二點を結ぶ線分も、すべてSに屬するとき、Sを凸集合という。

〔定理二・一〕　有限個の點の集まりP_1、……、P_kに對して

$$(2.3)\quad c_1P_1+\cdots\cdots+c_kP_k$$
$$c_1\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ c_k\geqq 0,\quad c_1+\cdots\cdots+c_k=1$$

の形で表わされる點全體の集合は凸集合になる。

〔證明〕　二點P、P′がともに（2.3）の形になっているとする。すなわち

$$P=c_1P_1+\cdots\cdots+c_kP_k$$
$$c_1\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ c_k\geqq 0,\quad c_1+\cdots\cdots+c_k=1$$
$$P'=c_1'P_1+\cdots\cdots+c_k'P_k$$
$$c_1'\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ c_k'\geqq 0,\quad c_1'+\cdots\cdots+c_k'=1$$

この二點を結ぶ線分の上の任意の點は $0\leqq c\leqq 1$ なる c によって、

$$\begin{aligned} cP+(1-c)P' &= c(c_1P_1+\cdots\cdots+c_kP_k) \\ &\quad +(1-c)(c_1'P_1+\cdots\cdots+c_k'P_k) \\ &= \{cc_1+(1-c)c_1'\}P_1+\cdots\cdots \\ &\quad +\{cc_k+(1-c)c_k'\}P_k \end{aligned}$$

と表わされ、しかも

$$cc_1+(1-c)c_1'\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ cc_k+(1-c)c_k'\geqq 0$$
$$\begin{aligned} &\{cc_1+(1-c)c_1'\}+\cdots\cdots+\{cc_k+(1-c)c_k'\} \\ &=c(c_1+\cdots\cdots+c_k)+(1-c)(c_1'+\cdots\cdots+c_k') \\ &=c+(1-c) \\ &=1 \end{aligned}$$

であるから、$cP+(1-c)P'$ もやはり（2.3）の形になっていることがわかる。（終）

定理二・一の結果えられた點集合を、點集合 $\{P_1, \ldots, P_k\}$ の凸包という。これは P_1、……、P_k を含む凸集合の中で最小な點集合である。

〔**定理二・二**〕 一次不等式系 (2.2) の解全體の作る點集合は凸集合である。

〔**證明**〕 二點P、P′がともに一次不等式系 (2.2) を滿足するとすれば、

$$(A_1, P) \geqq b_1, \ \ldots\ldots, \ (A_m, P) \geqq b_m$$

$$(A_1, P') \geqq b_1, \ \ldots\ldots, \ (A_m, P') \geqq b_m$$

となる。P、P′を結ぶ線分の上に點 $cP+(1-c)P'$ (ただし $0 \leqq c \leqq 1$) をとれば、

$$\begin{aligned} &(A_i, cP+(1-c)P') \\ &= c(A_i, P)+(1-c)(A_i, P') \\ &\geqq cb_i+(1-c)b_i \\ &= b_i \qquad (i=1, \ldots\ldots, m) \end{aligned}$$

であるから、この點も一次不等式系 (2.2) の解になっている。 (終)

一次不等式系の解全體の集合は、もしも有界ならば、有限個の點から成る點集合の凸包と一致することが證明されている。この定理について Alexandroff-Hoph (1) の書物の附錄に連續性を利用した證明が與えられているが、一方 Weyl (10) は連續性を用いない純代數學的な證明を Commentarii Mathematici Helvetici 誌上に發表して、その英譯 (11) が Kuhn-Tucker の編集になるゲームの理論の論文集(I)に掲載されている。しかしその結果は後に Motzkin (7), Tucker (8), Goldman (4) らによって得られた結果の一部になっている。

三

まず Goldman (4) にならって一次不等式系

(3.1) $(A_1, P) \geqq b_1, \ \ldots\ldots, \ (A_m, P) \geqq b_m$

の解の集合における面について説明しておく。リニヤ・プログラミングの問題では、一次不等式系 (3.1) の解を

(3.2) $x_1 \geqq 0, \ \ldots\ldots, \ x_n \geqq 0$

なる範圍で考えるのであるが、以下の議論では (3.2) は暗々裡には假定しない。條件 (3.2) を考慮するときは、これらの式がそれぞれ (3.1) の中の一つの式になってい

るものと見做すことにする。

さて、一次不等式系(3.1)の解Pは、(3.1)のm個の不等式のうちいくつかの式には等號＝を成立せしめ、殘りの式には純粹の不等號＞を成立せしめる。そこで1からmまでの添數の作る集合の任意の部分集合Hに對して、條件

(3.3)　$h \epsilon \mathrm{H}$ なるhに對しては $(\mathrm{A}_h,\ \mathrm{P}) > b_h$

(3.4)　$h \bar{\epsilon} \mathrm{H}$ なるhに對しては $(\mathrm{A}_h,\ \mathrm{P}) = b_h$

を滿足する點全體の集合が考えられる。この點集合を$\mathrm{S_H}$とおく。$\mathrm{S_H}$は(3.1)の解全體の集合Sの部分集合であって、これをSの面という。$\mathrm{S_H}$はあるHに對しては空になるかも知れない。異なるHのとり方は2^m個あって、これらのHに對する面$\mathrm{S_H}$は互に共通點をもたず、しかもその和集合はS全體となる。

$\mathrm{S_H}$はもしも空でなければ、その次元d_Hはつぎのように定義する。Hに屬さない（從って(3.1)で等號を成立せしめる）A_hの中で一次獨立なベクトルの最大數をr_Hとするとき、

(3.5)　$d_\mathrm{H} = n - r_\mathrm{H}$

二つの面$\mathrm{S_G}$、$\mathrm{S_H}$がともに空でなくて、GがHの眞部分集合になっているとき、$\mathrm{S_G}$を$\mathrm{S_H}$の境界面という。

そこでつぎの補助定理を證明しておく。この補助定理は今後しばしば使われる。

〔補助定理三〕　$\mathrm{S_G}$を$\mathrm{S_H}$の境界面とすれば

(3.6)　$d_\mathrm{G} < d_\mathrm{H}$

〔證明〕　Hに屬さない添數hについては、$\mathrm{S_G}$に屬する點Pに對しても、また$\mathrm{S_H}$に屬する點P′に對しても、等式

(3.7)　$(\mathrm{A}_h,\ \mathrm{P}) = b_h$　　$h \bar{\epsilon} \mathrm{H}$

(3.8)　$(\mathrm{A}_h,\ \mathrm{P}') = b_h$　　$h \bar{\epsilon} \mathrm{H}$

が成立する。Hに屬し、Gに屬さない添數h'に對しては、$\mathrm{S_G}$に屬する點Pについては

(3.9)　$(\mathrm{A}_{h'},\ \mathrm{P}) = b_{h'}$　　$h' \epsilon \mathrm{H} - \mathrm{G}$

$\mathrm{S_H}$に屬する點P′については

(3.10)　$(\mathrm{A}_{h'},\ \mathrm{P}') > b_{h'}$　　$h' \epsilon \mathrm{H} - \mathrm{G}$

が成立する。假定によって$\mathrm{S_G}$も$\mathrm{S_H}$も空でない。

いま、このようなあるh'について、$\mathrm{A}_{h'}$が、Hに屬さないhについてのA_hの一次結合

$$\mathrm{A}_{h'} = \sum_{h \bar{\epsilon} \mathrm{H}} c_h \mathrm{A}_h$$

になったとすれば、S_Gに屬するPに對しては(3.7)によって

$$(A_{h'},\ P)=\left(\sum_{h\in H}c_hA_h,\ P\right)=\sum_{h\in H}c_h(A_h,\ P)=\sum_{h\in H}c_hb_h$$

となるから、(3.9)によって$b_{h'}=\sum_{h\in H}c_hb_h$でなければならない。この場合には、Hに屬さないすべてのhに對して$(A_h,\ P)=b_h$であれば、必然的に$(A_{h'},\ P)=b_{h'}$となる。しかしS_Hが空でなく、しかもS_Hに屬する點P′については、(3.8)、(3.10)が成立するので、これは矛盾である。從って$A_{h'}$はHに屬さないhに對するA_hの一次結合とはならない。よって$r_G>r_H$となるから、(3.6)が成立する。（終）

rをA_1、……、A_mの中で一次獨立なベクトルの最大數とし、$d=n-r$とおけば、Sの面であってdより小さな次元をもつものは存在しない。そこで空集合をϕとかき、もしもS_ϕが空でなければ、空でない任意のS_HはS_ϕと一致するか（$H=\phi$のとき）、S_ϕがS_Hの境界面になるか（$H\neq\phi$のとき）、いずれかである。

特に次元0の面をSの頂點、次元1の面を稜という。

Sに頂點が存在するのは$d=0$すなわち$r=n$の場合に限られる。$r=n$の場合に一次不等式系(3.1)は非特異、$r<n$の場合には特異という。標準化されたリニャー・プログラミングの問題で考察の對象となる一次不等式系の中には、(3.2)が含まれるので、この場合には一次不等式系は必らず非特異になる。

非特異の一次不等式系(3.1)の解全體の集合Sにおいてすべての頂點を求めるには、つぎのようにすればよい。まず(3.1)から${}_mC_n$個のあらゆる方式でn個の不等式を選びだして、そのn個の不等式の左邊が一次獨立であるかどうかをテストする。もしもこれらが一次獨立でなければ、その組合わせは棄て、一次獨立であれば、それらの不等式を等式に直して、n元一次の連立方程式を解く。その（一意的に定まる）解が殘りの$m-n$個の不等式をすべて滿足するかどうかをテストして、これらをすべて滿足する場合だけを採用し、一つでも滿足しない場合には棄てる。このようにして、非特異の場合にはすべての頂點を求めることができる。

一次不等式系(3.1)が特異$r<n$の場合には、つぎ

のようにして、その解におけるすべての $d=n-r$ 次元の面を求めることができる。まず、(3.1) から ${}_mC_r$ 個のあらゆる方法で r 個の不等式の組を選びだして、その係數の作るベクトル A_{i_1}、……、A_{i_r} が一次獨立の場合に、これらの不等式を等式に變えた連立一次方程式

$$(3.11)\quad (A_{i_1}, P)=b_{i_1},\ \ldots\ldots,\ (A_{i_r}, P)=b_{i_r}$$

を解く。その一般解は、ある特殊解と、(3.11) で右邊を0とおいてできる齊次連立一次方程式の一般解との和の形で與えられる。ここで取出された A_{i_1}、……、A_{i_r} は r 個の一次獨立なベクトルであり、A_1、……、A_m 全體としても、この中では一次獨立なベクトルは r 個までしかとれないから、ここに取出されていない A_i は、A_{i_1}、……、A_{i_r} の一次結合となる。從って (3.11) で右邊を0とおいてできる齊次連立一次方程式の一般解は、(3.1) の全部の不等式から導かれる齊次連立方程式

$$(3.12)\quad (A_1, P)=0,\ \ldots\ldots,\ (A_m, P)=0$$

の一般解と一致する。そこで (3.11) のある特殊解が (3.1) の他のすべての不等式を滿たすことがわかれば、(3.11) の一般解が (3.1) の解全體の集合の d 次元の面になることが知れる。このような方法でSのすべての d 次元の面を求めることができる。

〔例〕 一次不等式系

$$(3.13)\quad \begin{cases} -x_1 \qquad\quad - x_3 \geqq -2 & (1) \\ \qquad\ x_2+2x_3 \geqq 0 & (2) \\ 2x_1+x_2+4x_3 \geqq 0 & (3) \\ -x_1+x_2+\ x_3 \geqq -1 & (4) \end{cases}$$

においては、A_1 と A_2 は獨立で、

$$A_3=-2A_1+A_2,\quad A_4=A_1+A_2$$

となっている。從って r は2である。そこで一次不等式系 (3.13) の解の集合Sの $d=n-r=3-2=1$ 次元の面をすべて求めてみる。

そのためにはまず (3.13) から方程式系

$$(3.14)\quad \begin{cases} -x_1 \qquad\quad - x_3 = -2 & (1') \\ \qquad\ x_2+2x_3 = 0 & (2') \\ 2x_1+x_2+4x_3 = 0 & (3') \\ -x_1+x_2+\ x_3 = -1 & (4') \end{cases}$$

を作る。この左邊の一次式はどの $r=2$ 個をとっても互に獨立である。そこで二つずつのあらゆる組について解

を作ると

(1′)と(2′)より　$(2, 0, 0)+w(1, 2, -1)$　(5)

(1′)と(3′)より　$(2, -4, 0)+w(1, 2, -1)$　(6)

(1′)と(4′)より　$(2, 1, 0)+w(1, 2, -1)$　(7)

(2′)と(3′)より　$(0, 0, 0)+w(1, 2, -1)$　(8)

(2′)と(4′)より　$(1, 0, 0)+w(1, 2, -1)$　(9)

(3′)と(4′)より　$\left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}, 0\right)+w(1, 2, -1)$　(10)

となる。ただしwは任意の實數とする。(5)〜(10)の式の第一項は(3.14)からとった各組合わせについての特殊解、第二項はその右邊を0とおいてできる齊次方程式の一般解になっている。これは(3.14)の全部の式から生ずる齊次方程式の一般解にもなっているので、(5)〜(10)のどの式についても共通である。

そこで各特殊解が(3.13)の他の不等式を滿たすかどうかを調べる。例えば(5)については、(2,0,0)が(4)を滿足しないので、(5)に與えられている(1′)と(2′)の一般解は、(3.13)の解の集合Sにおける面になっていない。従ってS_{34}は空集合である。また(7)については、特殊解(2,1,0)は(3.13)の(2)と(3)を滿足して、(7)はSの面S_{23}になっている。このようにして、(5)〜(10)の各式について調べてみると、Sの一次元の面、すなわち稜になっているのは、(7)、(8)、(9)であることがわかる。（終）

前述の結果からつぎの定理が證明された。

〔定理三〕 一次不等式系(3.1)が解を有するとすれば、その解の集合Sにおけるd次元のすべての面は、その各面上にそれぞれ代表として一點P_1、……、P_kをとり、齊次連立一次方程式(3.12)の解の集合における基底をR_1、……、R_dとするとき、

(3.15)
$$\begin{cases} P_1+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ P_k+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d \end{cases}$$
$$-\infty<w_1<\infty,\ \cdots\cdots,\ -\infty<w_d<\infty$$

の形で與えられる。（終）

特に非特異の場合にはdは0となって、(3.15)はk個の頂點を示す。また特に齊次不等式系

(3.16)　$(A_1, P)\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ (A_m, P)\geqq 0$

においては、原點は各面上にあるから、P_1、……、P_kを全部原點にとることにより、(3.16)の解の集合における

d次元の面は

(3.17)　$w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d$

$$-\infty<w_1<\infty,\ \cdots\cdots,\ -\infty<w_d<\infty$$

の形に表わされるものたゞ一つとなる。

四

つぎに一次不等式系(3.1)の解の集合Sにおける $d+1$ 次元の面の構造について調べてみよう。

點P_0がSの $d+1$ 次元の面S_Hに屬するものとすれば、

$h\bar{\epsilon}H$　ならば　$(A_h,\ P_0)=b_h$

$h\epsilon H$　ならば　$(A_h,\ P_0)>b_h$

となり、ここでHに屬さないhに對するA_hの中には、一次獨立なものが $n-(d+1)=r-1$ 個ある。そこで齊次連立方程式(3.12)の解にはなっていないが、Hに屬さないすべてのhに對する齊次連立方程式

$(A_h,\ P)=0$　for all $h\bar{\epsilon}H$

の解になっているような點Q_0が存在する。このQ_0はもちろん原點ではない。ここで三つの場合を區別する。

(一)　Hに屬するすべてのhに對して$(A_h,\ Q_0)\geqq0$となる場合。この場合には、Q_0は齊次不等式系(3.16)の解になっている。しかもQ_0の定義から、Hに屬する少くも一つのhに對して$(A_h,\ Q_0)>0$となる。いま、このようなhに對する$\{(A_h,\ P_0)-b_h\}/(A_h,\ Q_0)$の最小値を$v$ $(v>0)$とし、vが例えば$\{(A_s,\ P_0)-b_s\}/(A_s,\ Q_0)$ $(s\epsilon H)$に等しいとすれば、點 $P_0'=P_0-vQ_0$ はSに屬する點であって、しかもHに屬さないすべてのhと$h=s$とに對して等式

$$(A_h,\ P_0')=(A_h,\ P_0)-v(A_h,\ Q_0)=b_h$$

が成立する。從ってP_0'はS_Hの境界面に屬する。補助定理三によれば、S_Hの境界面の次元はS_Hの次元より小であるが、Sにはdより小さい次元の面は存在しない。從ってP_0'は前節で述べたd次元のいずれかの面に所屬することになる。よってこの場合

$$P_0=P_0'+vQ_0$$

(4.1)　$=P_i+vQ_0+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d$

$$v>0,\ -\infty<w_1<\infty,\ \cdots\cdots,\ -\infty<w_d<\infty$$

の形にかくことができる。ただし、P_iは定理三のP_1、……、P_kのいずれかであり、R_1、……、R_dも定理三のとお

りである。

ここでS_Hの境界面は一つしかないことが證明できる。なぜならP_{i_1}、P_{i_2}をS_Hの異なる境界面、S_{H_1}、S_{H_2}上の點とすれば、P_{i_1}、P_{i_2}はともにS_Hの點が滿足すべき方程式を滿足する。すなわち

$$(A_h,\ P_{i_1})=b_h \quad \text{for all } h\in H$$
$$(A_h,\ P_{i_2})=b_h \quad 〃$$

從って$P_{i_1}-P_{i_2}$については

$$(A_h,\ P_{i_1}-P_{i_2})=0 \quad \text{for all } h\in H$$

が成立する。しかしP_{i_1}とP_{i_2}とはd次元の異なる面に屬するから、Hに屬するhの中には$(A_h,\ P_{i_1}-P_{i_2})\neq 0$となるものが存在する。從って

$$(4.2)\qquad P_{i_1}-P_{i_2}=vQ_0+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d \qquad v\neq 0$$

の形となる。ここで$v>0$ならば、すべてのhに對して

$$(A_h,\ P_{i_1})-(A_h,\ P_{i_2})$$
$$=(A_h,\ P_{i_1}-P_{i_2})=v(A_h,\ Q_0)\geqq 0$$

となるから、H_2はH_1の部分集合でなければならない。同様に$v<0$ならばH_1はH_2の部分集合となる。從ってS_{H_1}、S_{H_2}は一致するか、一方が他方の境界面となるけれども、いずれにしてもこれは不合理である。從ってS_Hの境界面は一つしかない。そこでP_0と同じ面S_H上の點は、すべて同一のP_iとQ_0とを用いて(4.1)の形にかくことができる。

逆にこのP_iとQ_0とを用いて、vはあらゆる正數、w_1、……、w_dはあらゆる實數の範圍を動かして(4.1)の形の點を考えれば、これがすべてP_0と同じ面S_H上にあることは明らかである。よってS_Hは(4.1)の形に表わされる點全體の集まりと同じことになる。

(二) Hに屬するすべてのhに對して$(A_h,\ Q_0)\leqq 0$となる場合。この場合はQ_0の代りに$-Q_0$を考えれば(一)の場合に歸着する。

(三) Hに屬するあるhに對しては$(A_h,\ Q_0)>0$、Hに屬する他のあるhに對しては$(A_h,\ Q_0)<0$となる場合。この場合には$(A_h,\ Q_0)>0$となるようなhに對する$\{(A_h,\ P_0)-b_h\}/(A_h,\ Q_0)$の最小値を$t_1(t_1>0)$とし、この最小値は$h=s_1$において達せられるものとする。また、$(A_h,\ Q_0)<0$となるような$h$に對する$\{(A_h,\ P_0)-b_h\}/\{-(A_h,\ Q_0)\}$の最小値を$t_2$ $(t_2>0)$とし、この最小

値は $h=s_2$ において達せられるものとする。このとき(一)の場合と同様の議論によれば、

$$P_0'=P_0-t_1Q_0$$

$$P_0''=P_0+t_2Q_0$$

はそれぞれ S_H のある境界面上の點、従って次元 d の面上の點となる。この P_0'、P_0'' はいずれも (3.15) の形で表わされるから、

$$P_0=\frac{t_2}{t_1+t_2}P_0'+\frac{t_1}{t_1+t_2}P_0''$$

(4.3)　$$=u_iP_i+u_jP_j+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d$$

$$u_i>0,\ u_j>0,\ u_i+u_j=1$$

$$-\infty<w_1<\infty,\ \cdots\cdots,\ -\infty<w_d<\infty$$

の形になる。ただし P_i、P_j は定理三の P_1、……、P_k のうちのいずれかの異なる二つで、R_1、……、R_d も定理三のとおりである。

この場合 S_H の境界面は三つ以上は存在しない。なぜなら、P_{i_1}、P_{i_2}、P_{i_3} を S_H の異なる境界面 S_{H_1}、S_{H_2}、S_{H_3} 上の點とすれば、(一)の場合の (4.2) と同様に

$$P_{i_1}-P_{i_2}=vQ_0+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d \qquad v\neq0$$

$$P_{i_2}-P_{i_3}=v'Q_0+w_1'R_1+\cdots\cdots+w_d'R_d \qquad v'\neq0$$

$$P_{i_3}-P_{i_1}=v''Q_0+w_1''R_1+\cdots\cdots+w_d''R_d \qquad v''\neq0$$

が成立する。ただしここで $v+v'+v''=0$ となり、v、v'、v'' のうち二つは同符號である。そこで必要とあれば添數をつけかえることにして、$v>0$, $v'>0$ として一般性を失わない。この場合には

(4.4)　$$P_{i_2}=\frac{v'}{v+v'}P_{i_1}+\frac{v}{v+v'}P_{i_3}+w_1'''R_1+\cdots\cdots+w_d'''R_d$$

$$\frac{v'}{v+v'}>0,\ \frac{v}{v+v'}>0,\ \frac{v'}{v+v'}+\frac{v}{v+v'}=1$$

となる。ここで H_1、H_2、H_3 のうちのある一つが他の一つの部分集合になっているという關係はない（(一)の場合參照）。P_{i_1}、P_{i_3} がともに一次不等式系 (3.1) の解であることを考えれば、(4.4) の形に表わされる P_{i_2} に對する H_2 は、H_1 と H_3 の和集合でなければならない。従って H_1（および H_3）が H_2 の部分集合となって、P_{i_1}、P_{i_2}、P_{i_3} のとり方に反する。そこで S_H の境界面は三つ以上は存在しないことがわかった。従って P_0 と同じ面 S_H 上の點は、すべて同一の

P_iとP_jとを用いて(4.3)の形にかけることが證明された。

逆にこのP_i、P_jに對して、(4.3)の形に表わされる點は、すべて始めにとったP_0と同じ面上にあることはこの場合にも明らかである。よってこの場合にはS_Hは(4.3)の形で表わされる點全體の集まりと同一のものになる。

以上によってSの$d+1$次元の面の構造が確定した。

〔定理四〕 一次不等式系(3.1)が解を有するとすれば、その解の集合Sにおける$d+1$次元の面S_Hはつぎのいずれかの形になる。

(一) Hに屬さないhについては$(A_h, Q_0)=0$、Hに屬するhについては$(A_h, Q_0)\geqq 0$であって、しかもHに屬する少くも一つのhに對して$(A_h, Q_0)>0$となるようなQ_0をとると、

$$(4.5)\quad P_i+vQ_0+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d$$

$$v>0,\ -\infty<w_1<\infty,\ \cdots\cdots,\ -\infty<w_d<\infty$$

ただしP_iは定理三のP_1、……、P_kのいずれか、R_1、……、R_dも定理三と同じ意味である。

(二)

$$(4.6)\quad u_iP_i+u_jP_j+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d$$

$$u_i>0,\ u_j>0,\ u_i+u_j=1$$

$$-\infty<w_1<\infty,\ \cdots\cdots,\ -\infty<w_d<\infty$$

ただしP_i、P_j、R_1、……、R_dは(一)の場合と同様とする。

(終)

(一)の場合にはS_Hは、$d+1$次元空間をd次元空間で二つに分割した際のその片方の半空間(境界は含まない)を示し、(二)の場合は$d+1$次元空間の中で二つの平行なd次元空間の間に挾まれた部分(境界を含まない)を示している。

この定理において特に(3.1)が非特異の場合には、Sの一次元の面、すなわち稜は、ある一つの頂點から發した一方にだけ無限に伸びる半直線になるか(頂點は除く)、二つの頂點を結ぶ線分(兩端の點は除く)になるかいずれかである。

また齊次不等式系(3.16)においては、P_1、……、P_kは全部原點にとることができるので、(二)の場合は起りえない。この場合には$d+1$次元の面は、$d+1$次元空間をd次元の面S_ϕで分割した半空間(境界は含まない)に

なる。

〔例〕 一次不等式系 (3.13) の二次元の面について調べてみる。前節で述べたところによれば、A_1、A_2、A_3、A_4はどの二つをとっても一次獨立であり、しかもこれらのうちで一次獨立なものは三つ以上とることはできなかった。從って $r=2,\ d=n-r=3-2=1,\ d+1=2$ となり、考察の對象となるのはS_{234}、S_{134}、S_{124}、S_{123}の四つの面である。これら四つの面がいずれも空でないことは、これらの面上にそれぞれ、點 $(2, 3, 0)$, $(\frac{1}{2}, 0, 0)$, $(-1, 2, 0)$, $(\frac{3}{2}, \frac{1}{2}, 0)$ がのっていることから明らかである。

㈠ S_{234}に對しては方程式 $-x_1-x_3=0$ の解の一つ $(0, 1, 0)$ が定理四の㈠のQ_0に對する條件を滿足する。境界面はS_{23}となる。從ってS_{234}は

$$(2, 1, 0)+v(0, 1, 0)+w(1, 2, -1)$$
$$v>0, \quad -\infty<w<\infty$$

の形に表わされる點全體となる。

㈡ S_{134}に對しては方程式 $x_2+2x_3=0$ の解の一つ $(1, 0, 0)$ をQ_0とすれば、$(A_1, Q_0)<0$, $(A_3, Q_0)>0$, $(A_4, Q_0)<0$ となるので、定理四の㈢の場合になる。境界面はS_{14}、S_{13}の二つである。從ってS_{134}は

$$u_1(0, 0, 0)+u_2(1, 0, 0)+w(1, 2, -1)$$
$$u_1>0, \quad u_2>0, \quad u_1+u_2=1, \quad -\infty<w<\infty$$

の形に表わされる點全體の集まりとなる。

同樣に

㈢ S_{124}は

$$(0, 0, 0)+v(-1, 2, 0)+w(1, 2, -1)$$
$$v>0, \quad -\infty<w<\infty$$

㈣ S_{123}は

$$u_1(1, 0, 0)+u_2(2, 1, 0)+w(1, 2, -1)$$
$$u_1>0, \quad u_2>0, \quad u_1+u_2=1, \quad -\infty<w<\infty$$

の形に表わされる點全體の集まりと一致する。

五

齊次不等式系 (3.16) の解の集合における $d+1$ 次元の各面から一つずつ代表の點をとって、これをQ_1、……、Q_lとおく。定理四の㈠の場合におけるQ_0はこのような點の一つである。しかるとき、つぎの定理が成立する。

〔定理五〕 一次不等式系 (3.1) が解を有するとすれば、

その解は

$$(5.1)\quad u_1P_1+\cdots\cdots+u_kP_k+v_1Q_1+\cdots\cdots+v_lQ_l$$
$$+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d$$
$$u_1\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ u_k\geqq 0,\ u_1+\cdots\cdots+u_k=1$$
$$v_1\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ v_l\geqq 0,$$
$$-\infty<w_1<\infty,\ \cdots\cdots,\ -\infty<w_d<\infty$$

の形に表わされる點全體の集まりと一致する。

この證明のためにまずつぎの補助定理を證明しておく。

〔補助定理五〕 一次不等式系 (3.1)′ の解の集合Sにおいて、點P_0は$d'(d'\geqq d+2)$ 次元の面S_Hに屬するとする。このとき、P_0は $d'-1$ 次元以下のある二つの（S_Hの境界）面に屬する二點P_0'、P_0''を結ぶ線分の上にある。

〔補助定理の證明〕 假定により

$$h\epsilon H \quad ならば \quad (A_h,\ P_0)=b_h$$
$$h\bar{\epsilon}H \quad ならば \quad (A_h,\ P_0)>b_h$$

が成立つ。しかもHに屬さないhに對するA_hの中には一次獨立なものは $n-d'(\leqq n-d-2=r-2)$ 個まで存在する。ここで齊次連立方程式

$$(5.2)\quad \begin{array}{l}(A_h,\ P)=0 \qquad \text{for all } h\epsilon H\\ (A_1+\cdots\cdots+A_m,\ P)=0\end{array}$$

においては、Hに屬さないすべてのhに對するA_hと$A_1+\cdots\cdots+A_m$ の中には、一次獨立なベクトルは高々 $r-1$ 個しかとれない。そこで (5.2) の解になってはいるが (3.12) の解にはなっていないような點Q_0が存在する。從ってこのQ_0に對してHに屬するhをとれば、$(A_h,\ Q_0)$ はことごとくは零でない。しかもQ_0は (5.2) を滿足するので、

$$\sum_{h\epsilon H}(A_h,\ Q_0)$$
$$=(A_1+\cdots\cdots+A_m,\ Q_0)-\sum_{h\bar{\epsilon}H}(A_h,\ Q_0)=0$$

となる。從ってHに屬するあるhに對しては $(A_h,\ Q_0)>0$ となり、Hに屬する他のあるhに對しては $(A_h,\ Q_0)<0$ となる。

そこで三九頁の㈢の場合と同樣に、適當に正數t_1、t_2をとれば、

$$P_0'=P_0-t_1Q_0,\ P_0''=P_0+t_2Q_0$$

はともにS_Hの境界面、從って次元 $d'-1$ 以下の面に屬して、P_0はP_0'とP_0''とを結ぶ線分の上にあることになる。

〔定理五の證明〕 前二節の結果によれば、Sのd次元の面、並びに$d+1$次元の面に屬する點については、(5.1)が成立する。補助定理五によれば、$d'(\geqq d+2)$次元の面に屬する點は、$d'-1$次元以下の面上の二つの點を結ぶ線分上にある。(5.1)の形で表わされる點全體は凸集合をなす（證明は定理二・一と同樣）ので、Sの點が屬する面の次元に關する歸納法を用いれば、Sの點はすべて(5.1)の形にかけることが證明されたことになる。逆に(5.1)の形にかける點はすべて(3.1)を滿足することは明らかである。

〔例〕 三六頁並びに四一頁で取上げた例について、(3.13)の解の集合は

$$u_1(2,\ 1,\ 0)+u_2(0,\ 0,\ 0)+u_3(1,\ 0,\ 0)$$
$$+v_1(0,\ 1,\ 0)+v_2(-1,\ 2,\ 0)+w(1,\ 2,\ -1)$$
$$u_1\geqq 0,\ u_2\geqq 0,\ u_3\geqq 0,\ u_1+u_2+u_3=1$$
$$v_1\geqq 0,\ v_2\geqq 0,\ -\infty<w<\infty$$

の形に表わされる點全體の集合と一致する。（終）

定理五において特に(3.1)が齊次不等式系(3.16)の場合には、$k=1$でP_1は原點にとることができる。Q_1、……、Q_lはそのとり方からするとb_1、……、b_mの値には無關係に定めることができる。そこで(5.1)から生ずる

(5.3) $$v_1Q_1+\cdots\cdots+v_lQ_l+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d$$
$$v_1\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ v_l\geqq 0,$$
$$-\infty<w_1<\infty,\ \cdots\cdots,\ -\infty<w_d<\infty$$

なる點集合は、(3.16)の解全體の集合と一致する。そこで定理五からつぎの系が導かれる。

〔系〕 一次不等式系(3.1)の解全體からなる點集合Sは、Sのd次元の各面から一つずつ代表的にとった點P_1、……、P_kの凸包に屬する點と(3.16)の解の點との和の形に表わされる點全體の集合と一致する。（終）

また(3.1)が非特異の場合には$d=0$であって、この場合には(5.1)は

(5.4) $$u_1P_1+\cdots\cdots+u_kP_k+v_1Q_1+\cdots\cdots+v_lQ_l$$
$$u_1\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ u_k\geqq 0,\ u_1+\cdots\cdots+u_k=1$$
$$v_1\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ v_l\geqq 0$$

の形となる。非特異の齊次不等式系の場合には(5.4)でさらにP_1、……、P_kの項を除いて

(5.5) $$v_1Q_1+\cdots\cdots+v_lQ_l$$

$$v_1\geqq0,\ \ldots\ldots,\ v_l\geqq0$$

となる。

つぎに(3.1)の解(5.1)が有界となる場合について考えてみよう。この場合には(5.1)でQ_1、……、Q_l、R_1、……、R_dは現われてはならない。従って(5.1)は

(5.6) $$u_1P_1+\cdots\cdots+u_kP_k$$

$$u_1\geqq0,\ \ldots\ldots,\ u_k\geqq0,\ u_1+\cdots\cdots+u_k=1$$

となり、これはP_1、……、P_kなるk個の點から成る點集合の凸包と一致する(第二節參照)。ここでQ_1、……、Q_l、R_1、……、R_dが(5.1)に現われないための必要十分條件は、齊次不等式系(3.16)の解(5.3)が原點だけから成ることである。そのためには(3.1)が非特異のことは必要條件になっている。

リニヤー・プログラミングの問題においては、前述のように(3.2)の各式がそれぞれ(3.1)の一式になっているものと考えられる。この場合(3.1)の解は有界でないかも知れないが、ここで正數Mをとって、不等式

(5.7) $$-x_1-x_2-\cdots\cdots-x_n\geqq-M$$

を(3.1)に追加すれば、齊次不等式系

$$x_1\geqq0,\ \ldots\ldots,\ x_n\geqq0,\ -x_1-\cdots\cdots-x_n\geqq0$$

の解がすでに原點だけからなるので、(5.7)の一式を追加した後に生ずる不等式系の解の集合は有界になる。(この事實はこのような考察を煩わさなくても明らかであるが。)

ここで後のために定理五の(5.1)の表現には、つぎの意味で無駄がないことを證明しておこう。

(一) P_1、……、P_kのあるもの例えばP_1が、P_2、……、P_k、Q_1、……、Q_l、R_1、……、R_dだけを用いて($u_1=0$とおいて)(5.1)のように表わされることはない。

(二) Q_1、……、Q_lのあるもの例えばQ_1が、Q_2、……、Q_l、R_1、……、R_dだけを用いて($v_1=0$とおいて)(5.3)のように表わされることはない。

(三) R_1、……、R_dのあるもの例えばR_1が、R_2、……、R_dだけを用いて($w_1=0$とおいて)(3.17)の形に表わされることはない。

(四) $v_1\geqq0$、……、$v_l\geqq0$ であって

(5.8) $$v_1Q_1+\cdots\cdots+v_lQ_l+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d=0$$

が成立つのは

$$v_1=\cdots\cdots=v_l=w_1=\cdots\cdots=w_d=0$$

のときに限る。

㈠の證明。P_1が$u_1=0$とおいて(5.1)の形に表わされたとする。u_2、……、u_kの中には少くも一つの正數があるので例えば$u_2>0$とする。この場合には、P_1の屬する面をS_{H_1}、P_2の屬する面をS_{H_2}とおけば、H_2がH_1の部分集合となって不合理である。

㈡の證明。Q_1が$v_1=0$とおいて(5.3)の形で表わされたとする。v_2、……、v_lの中に少くも一つ正のものがある場合には、例えばこれを$v_2>0$とする。齊次不等式系(3.16)の解の集合Sにおいて、Q_1の屬する面をS_{H_1}、Q_2の屬する面をS_{H_2}とすれば、この場合にもH_2がH_1の部分集合となって不合理である。また$v_2=\cdots\cdots=v_l=0$とすれば、Q_1が齊次連立方程式(3.12)の解となって、これも不合理である。

㈢の證明。R_1、……、R_dが齊次連立方程式(3.12)の解の基底であることから明らかである。

㈣の證明。$v_1\geqq 0$、……、$v_l\geqq 0$として(5.8)が成立つとすれば、(5.8)の兩邊と$A_1+\cdots\cdots+A_m$との內積をとると、R_1、……、R_dの關係した項は消えて、

(5.9) $v_1(\Sigma A, Q_1)+\cdots\cdots+v_l(\Sigma A, Q_l)=0$

となる。$(\Sigma A, Q_1)>0$、……、$(\Sigma A, Q_l)>0$により、(5.9)が成立つためには$v_1=\cdots\cdots=v_l=0$でなければならない。これを(5.8)に代入すれば、㈢によって$w_1=\cdots\cdots=w_d=0$がえられる。

六

今度は逆に有限個の點P_1、……、P_k、Q_1、……、Q_l、R_1、……、R_dを與えて(5.1)の形で表わされる點全體の集合を考え、これがある一次不等式系の解になっていることを證明しよう。

まずこれらの點について前節四五頁の條件㈠～㈣が成立っているとして一般性を失わないことが證明される。なぜなら㈠～㈢のいずれかが成立たない場合には、餘分のP、Q、Rを取除いても(5.1)の形で與えられる點全體の集合には變りない。また㈣が成立たない場合には、(5.8)のv_1、……、v_lの中で正のものをv_1'、……、v_l'とする。すなわち

(6.1)　$v_1'Q_1'+\cdots\cdots+v_l'Q_l'+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d$
$=0$

しかるとき、Q_1'、……、Q_l'、R_1、……、R_dの一次結合として表わされる任意の點

$$P=v_1'Q_1'+\cdots\cdots+v_l'Q_l'$$
$$+w_1'R_1+\cdots\cdots+w_d'R_d$$

は、正數tを十分大きくとれば(6.1)より

$$P=(v_1'+v_1't)Q_1'+\cdots\cdots+(v_l'+v_l't)Q_l'$$
$$+(w_1+w_1't)R_1+\cdots\cdots+(w_d+w_d't)R_d$$

となり、ここで、Q_1'、……、Q_l'の係數はすべて正にすることができる。従って(5.1)においてQ_1'、……、Q_l'に負の係數を許しても(5.1)の形の點全體の集合は變らない。従ってこれらはRの仲間入りをさせることができる。以上の操作の結果、(一)〜(四)がすべて成立つような點の組が與えられる。

ここでつぎの補助定理を利用する。

〔補助定理六〕 齊次不等式系（3.16）の解を（5.3）とする。n次元空間の點Aが

$$(6.2)\quad \begin{cases} (A,\ Q_1)\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ (A,\ Q_l)\geqq 0 \\ (A,\ R_1)\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ (A,\ R_d)\geqq 0, \\ (A,\ -R_1)\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ (A,\ -R_d)\geqq 0 \end{cases}$$

を満足すれば、

$$(6.3)\quad A=\lambda_1A_1+\cdots\cdots+\lambda_mA_m$$
$$\lambda_1\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ \lambda_m\geqq 0$$

の形になる。また（6.3）の形のAが（6.2）のすべての不等式を満足することは明らかである。齊次不等式系（3.16）が原點以外に解をもたなければ、n次元空間の任意の點Aを(6.3)の形に書表わすことができる。

〔證明〕 Weyl (10), (11) または Tucker (9) の論文を參照されたい。（終）

この補助定理において（3.16）が原點以外に解をもたなければ、$A=-A_1-\cdots\cdots-A_m$が(6.3)の形に書表わされる。従って

$$-A_1-\cdots\cdots-A_m=\lambda_1A_1+\cdots\cdots+\lambda_mA_m$$

よって

$$(1+\lambda_1)A_1+\cdots\cdots+(1+\lambda_m)A_m=0$$
$$1+\lambda_1>0,\ \cdots\cdots,\ 1+\lambda_m>0$$

となる。従ってこの場合には、A_1、……、A_mに適當な正

數をかけたものの和として原點が表わされる。

さて、與えられたP_1、……、P_k、Q_1、……、Q_l、R_1、……、R_dの組が前節の(一)〜(四)の條件を滿足するものとし(後で使用するのは條件(一)だけである)、この補助定理をA_1、……、A_mが

$$(6.4)\quad \begin{aligned} &P_2-P_1,\ \cdots\cdots,\ P_k-P_1,\ Q_1,\ \cdots\cdots,\ Q_l,\\ &R_1,\ \cdots\cdots,\ R_d,\ -R_1,\ \cdots\cdots,\ -R_d \end{aligned}$$

の場合に對して適用する。すると

(一)　原點には一致しない若干個の點A_{11}、……、A_{1m_1}が存在して、不等式系

$$(6.5)\quad (A_{11},\ P')\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ (A_{1m_1},\ P')\geqq 0$$

を滿足する點P′の全體と

$$(6.6)\quad \begin{aligned} P'=&u_2(P_2-P_1)+\cdots\cdots+u_k(P_k-P_1)\\ &+v_1Q_1+\cdots\cdots+v_lQ_l+w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d\\ &u_2\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ u_k\geqq 0,\ v_1\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ v_l\geqq 0\\ &-\infty<w_1<\infty,\ \cdots\cdots,\ -\infty<w_d<\infty \end{aligned}$$

の形に表わされる點P′の全體とが一致するか、

(二)　原點が

$$u_2>0,\ \cdots\cdots,\ u_k>0,\ v_1>0,\ \cdots\cdots,\ v_l>0$$

として(6.6)の右邊の形で表わされるかである。

しかるにここで(二)の場合は前節の條件(一)から起りえないことが證明される。なぜなら、(二)の場合には

$$(6.7)\quad \begin{aligned} &(u_2+\cdots\cdots+u_k)P_1\\ &=u_2P_2+\cdots\cdots+u_kP_k+v_1Q_1+\cdots\cdots+v_lQ_l\\ &\quad +w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d\\ &u_2+\cdots\cdots+u_k>0 \end{aligned}$$

となり、(6.7)の兩邊を$u_2+\cdots\cdots+u_k$でわれば四五頁の條件(一)に抵觸する式がえられるからである。

いまP_1を取出して(6.4)を考え、これに對して不等式系(6.5)を作ったのであるが、同樣な不等式はP_2、……、P_kを取出した場合にも作ることができる。これらの不等式をそれぞれ

$$\begin{aligned} &(A_{21},\ P')\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ (A_{2m_2},\ P')\geqq 0\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ &(A_{k1},\ P')\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ (A_{km_k},\ P')\geqq 0 \end{aligned}$$

とする。このとき一次不等式系

$$(6.8)\quad \begin{cases} (A_{11},\ P-P_1)\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ (A_{1m_1},\ P-P_1)\geqq 0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{cases}$$

$$\left\{(A_{k1},\ P-P_k)\geqq 0,\ \cdots\cdots,\ (A_{km_k},\ P-P_k)\geqq 0\right.$$

を満足する點Pの全體と(5.1)の形に表わされる點Pの全體とが一致することが證明される。

まずPが(5.1)の形になるとすれば、

$$\begin{aligned}P-P_1=u_2(P_2-P_1)+\cdots\cdots+u_k(P_k-P_1)\\ +v_1Q_1+\cdots\cdots+v_lQ_l\\ +w_1R_1+\cdots\cdots+w_dR_d\end{aligned}$$

によって $P'=P-P_1$ は(6.6)の形に表わされる。從ってP'は(6.5)を満足するのでPは(6.8)の第一行の不等式系を満足することになる。第二行以下の全部の不等式を満足することも同様に證明される。

逆にPが不等式系(6.8)を満足するとしよう。この場合には(6.8)の第一行により、$P'=P-P_1$ が(6.5)の不等式系を満たすことから、

$$P=u_{11}P_1+u_{12}P_2+\cdots\cdots+u_{1k}P_k+v_{11}Q_1+\cdots\cdots+v_{1l}Q_l+w_{11}R_1+\cdots\cdots+w_{1d}R_d \tag{6.9}$$

が成立する。同様に(6.8)の第二行以下から

$$\begin{cases}P=u_{21}P_1+u_{22}P_2+\cdots\cdots+u_{2k}P_k+v_{21}Q_1+\\ \qquad\cdots\cdots+v_{2l}Q_l+w_{21}R_1+\cdots\cdots+w_{2d}R_d\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ P=u_{k1}P_1+u_{k2}P_2+\cdots\cdots+u_{kk}P_k+v_{k1}Q_1+\\ \qquad\cdots\cdots+v_{kl}Q_l+w_{k1}R_1+\cdots\cdots+w_{kd}R_d\end{cases} \tag{6.10}$$

$$u_{ij}\geqq 0\,(i\neq j),\quad u_{i1}+\cdots\cdots+u_{ik}=1$$

$$v_{ij}\geqq 0,\quad -\infty<w_{ij}<\infty$$

がえられる。

(6.9)並びに(6.10)のどれか少くも一つの式において $u_{ii}\geqq 0$ であれば、その式がすでに(5.1)の形になっている。

すべてのiに對して $u_{ii}<0$ とすれば、(6.9)に

$$\frac{u_{21}}{u_{21}-u_{11}},\ \cdots\cdots,\ \frac{u_{k1}}{u_{k1}-u_{11}}\quad(\geqq 0)$$

をかけたものを、それぞれ(6.10)の各式に

$$\frac{-u_{11}}{u_{21}-u_{11}},\ \cdots\cdots,\ \frac{-u_{11}}{u_{k1}-u_{11}}\quad(>0)$$

をかけたものに加えれば、

$$\begin{cases}P=u_{22}'P_2+\cdots\cdots+u_{2k}'P_k+v_{21}'Q_1+\cdots\cdots\\ \qquad+v_{2l}'Q_l+w_{21}'R_1+\cdots\cdots+w_{2d}'R_d\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\end{cases} \tag{6.11}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathrm{P}=u_{k2}'\mathrm{P}_2+\cdots\cdots+u_{kk}'\mathrm{P}_k+v_{k1}'\mathrm{Q}_1+\cdots\cdots \\ \quad +v_{kl}'\mathrm{Q}_l+w_{k1}'\mathrm{R}_1+\cdots\cdots+w_{kd}'\mathrm{R}_d \end{array}\right.$$

$$u_{ij}'\geqq 0(i\neq j),\ u_{i2}'+\cdots\cdots+u_{ik}'=1$$

$$v_{ij}'\geqq 0,\ -\infty<w_{ij}'<\infty$$

が成立する。

ここでいずれかの式において $u_{ii}'\geqq 0$ であれば，Pは(5.1)の形になっている。しからざれば同様の操作を行ってP_1，P_2を含まない $k-2$ 個の(6.11)と同様な式を作ることができる。

この操作を繰返し行えば，各段階の各式において u の和は1になっているので，遂にはいずれかの式において $u_{ii}^{(j)}\geqq 0$ の狀態に到達する。その際にはその式からPが(5.1)の形になっていることがわかる。

參考文獻

(1) P. Alexandroff und H. Hoph: Topologie, 1935.

(2) A. Charnes, W. W. Cooper and A. Henderson: Introduction to Linear Programming, 1953.

(3) Ky Fan: On Systems of Linear Inequalities, 1956.

(4) A. J. Goldman: Resolution and Separation Theorems for Polyhedral Convex Sets, 1956.

(5) A. J. Goldman and A. W. Tucker: Polyhedral Convex Cones, 1956.

(6) A. J. Goldman and A. W. Tucker: Theory of Linear Programming, 1956.

(7) T. S. Motzkin: Beiträge zur Theorie der Linearen Ungleichungen, 1936.

(8) A. W. Tucker: Linear Inequalities and Convex Polyhedral Sets, in "Proceedings of the Second Symposium in Linear Programming", 1955.

(9) A. W. Tucker: Dual Systems of Homogeneous Linear Relations, 1956.

(10) H. Weyl: Elementare Theorie der Konvexen Polyeder, in "Commentarii Mathematici Helvetici Vol. 7," 1935.

(11) H. Weyl: The Elementary Theory of Convex Polyhedra, in "Contribution to the Theory of Games Vol. 1", 1950.

註1° (3)，(4)，(5)，(6)，(9)は "Linear Inequalities and Related Systems", Edited by H. W. Kuhn and A. W. Tucker, 1956. に掲載されている論文である。

註2° (7)は脱稿までに入手できなかった。

（一橋大學講師）