# 同心圓的手法による國際貿易の幾何學的分析

柴田　裕

## はしがき

A. P. Lerner が無差別曲線群を bliss point と名づける一定點を中心とする同心圓であらわした時[1]、彼は無差別曲線の性格を不當に擴張したように思われる。普通に行われるように、二次元のグラフの第一象限に無差別曲線を描く時、それは、右下りで原點に對して凸であると假定されるのであるが、それと同時にこの無差別曲線は任意のスロープを持つ豫算直線と接することが可能でなければならぬ。何となれば無差別曲線上の任意の點は二財の或る量の組合せをあらわすが、それは消費者の選擇行爲を前提とし、選擇は常に一定の環境のもとにおいてのみ effectual であり、豫算直線は正にこの環境をあらわすものだからである。從って、無差別曲線としての圓はこの條件を充す部分だけが意味があるのであるが、彼は不當にも他の部分にも意味を認めている。彼は又、bliss point も二財の組合せ量をあらわすことが出來ると考えているが、圓の中心は圓内の點であっても圓周上の點ではないのだから、無差別曲線上の點ではなく、從って bliss point に對する彼の考えは正しくはないであろう。

ラーナーのこれらの誤りは、無差別曲線群を同心圓であらわすことは、一つの作圖上の便宜に過ぎないのに、同心圓そのものに經濟學的意味を與えた爲である。

然し、無差別曲線群を同心圓であらわすことは[2]「作圖を簡單、且正確にする」という大きな長所を持ってい

る。小島　清氏は最近の一連の注目すべき諸論文(3)において、無差別曲線のみならず、變形曲線をも圓であらわす手法をとることによってこの長所を十分に利用している。

同心圓による手法は單に作圖上、便利であるのみでなく、無差別曲線及び變形曲線を圓函數を以てあらわすことによって、均衡分析の數學的表現を容易にするという今一つの長所を持っている。

本稿は國際貿易の幾何學的分析に小島氏が用いた同心圓的手法の持つ「正確」さを數字例並に數學的表現をもって追求したものであるが、併せて、この手法の持つ限界をも明かにすることを目的にしているのであって、小島氏の前掲諸論文（特に英文論文）の補充としての役割を果すことを期するものである。

以下、小島氏の諸論文におけると同様、ドイツ及び英國の二國が存在するものとし、兩國とも$X$財と$Y$財を生産、消費するものとする。

（**附記**）昭和三十年十一月九日、神戸大學において、小島清氏の「經濟成長と國際貿易」と題する研究發表があった。私は小島氏の報告の後で、同氏の同心圓的手法について若干のコメントを加えた。それは本稿の第四節にあたる部分である。その後、私は同心圓的手法全般に關する考をまとめて本稿の舊稿にあたるものを作成し、小島氏に送って批判を求めた。同氏からは、主として、第四節にあたる部分に關して、二度にわたる長文の私信による貴重な批判と御教示をいただいた。その結果、本稿は舊稿に比べて多くの點で改善されている。然し、勿論、本稿の內容については私一人が責任を負うものである。殊に第四節については、私は小島氏の全面的な同意を得ることが出來なかった。同氏の鋭い批判にも拘らず、舊稿以來の私の考を本質的に變えることが出來ぬまゝに、本稿に發表せざるを得なかった。



(1) A. P. Lerner, "The Diagrammatical Representation of Demand Conditions in International Trade." *in* Essays in Economic Analysis. 1953. p. 101～122.

(2) K. Kojima, "Equilibrium in International Trade: A Diagrammatical Analysis of the Case of Increasing Cost." *in* The Annals of the Hitotsubashi Accademy. Vol. VI. No. 1. Oct. 1955. p. 39.

(3) 小島　清「貿易利益の再吟味」一橋論叢、一九五四・八。同「國際貿易の均衡條件」經濟研究、第六卷第三號。同「經濟成長と國際貿易」一橋大學創立八十周年記念論

集、下卷。及び註（２）の英文論文。本稿に主として關係があるのは最後の二つの論文である。

## 一

貿易開始前のドイツ市場の均衡狀態は第一圖の第一象限であらわされるとしよう。變形曲線（圓）は次式であらわされる。

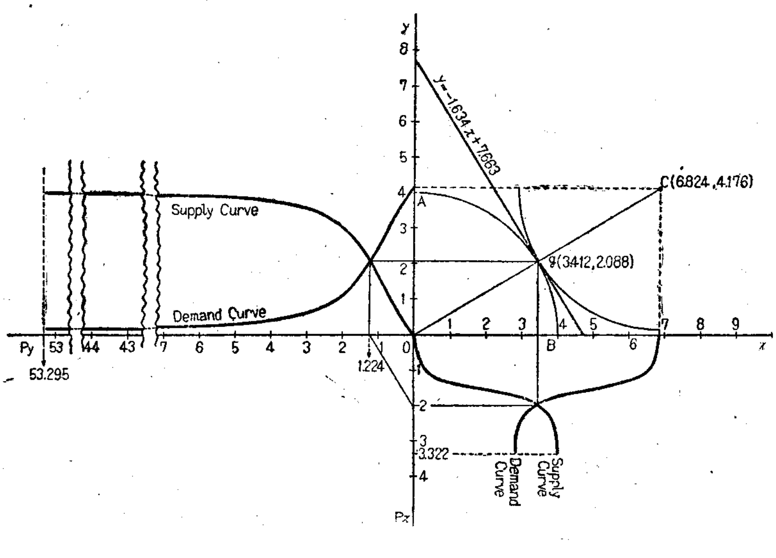
(1.1)　$x^2+y^2=4^2$

勿論、$x, y\geqq 0$である。又、無差別曲線は$c$點（その座標は6.824, 4.176）を中心とする同心圓であらわされるものとすれば

(1.2)　$(6.824-x)^2+(4.176-y)^2=r_a^2$

(1.2) 式の$x$、$y$については、「はしがき」でのべた無差別曲線の性質から、$x\leqq 6.824, y\leqq 4.176$という制限が與えられる。$r_a$は無差別曲線（圓）の半徑であるが、それは原點と無差別曲線との距離をも示すから、無差別曲線の滿足の大きさをあらわす指標でもある。

(1.2) 式において$r_a=4.000$とすれば、この特定の無差別曲線（圓）は、(1.1) 式の變形曲線（圓）と$g$點に




第一圖（ドイツ）

おいて接する。$g$點の座標は(3.412, 2.088)である。[1] $g$點を通って0と$c$を結ぶ直線に垂直に直線を引けば、この直線は

(1.3)　$y=-1.634x+7.663$　$(x, y \geqq 0)$

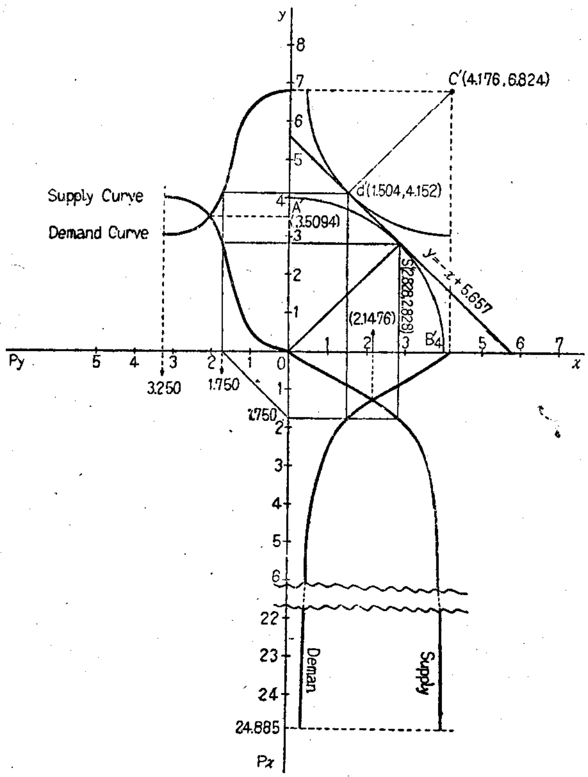
であらわされる。(1.3)式は豫算直線であるから、$x$、$y$財の價格をそれぞれ$P_x$、$P_y$とし、總支出額を$M$とすれば

(1.4)　$P_x/P_y=1.634$,　$M/P_y=7.663$

である。(1.3)式の直線は$g$點において變形曲線(圓)にも接するのであるから、$M$は同時に總所得額に等しい。

第一圖の第一象限から知ることは、貿易開始前の均衡狀態にあるドイツにおいては、$X$及び$Y$財は各々、3.412 單位と 2.088 單位とが生産並に消費され、$X$財價格の$Y$財價格に對する比は 1.634 であることである。若し、$X$財の均衡價格を $P_{x0}=2.000$ と假定すれば、$Y$財の均衡價格は $P_{y0}=1.224$ であり、均衡支出額(=均衡所得額)は $M_0=9.380$ である。

第二圖(英國)




貿易開始前の英國市場の均衡狀態は第二圖の第一象限に示されるもの

とする。變形曲線（圓）についてはドイツの場合と同じ假定を設けるが、無差別曲線（圓）は$c'$點（その座標は4.176, 6.824）を中心とする同心圓であらわされるものとする。圖から明らかなように英國では貿易開始前の均衡狀態においては、$X$及び$Y$財は各々、2.088單位と3.412單位が生産し、消費され、もし、$X$財の均衡價格を$P_{x0}=1.224$と假定するならば、$Y$財の均衡價格は$P_{y0}=2.000$であって、均衡支出額（=均衡所得額）は$M_0=9.380$である。

（1）$c$點の$x$、$y$各座標は$g$點の$x$、$y$各座標の二倍の大きさを持つ。

## 二

以上のことを一般的にのべる。

無差別曲線群たる同心圓の中心の座標を$(x'', y'')$とすれば、$x$と$y$を$X$財及び$Y$財の需要量として、無差別曲線群をあらわす方程式は、

$$(2.1)\qquad (x''-x)^2+(y''-y)^2=r_d^2$$

$r_d$は半徑であって、その意味は前節でのべた。又$x \leqq x''$, $y \leqq y''$の制限を與えるべきことも既述の通りである。

豫算直線は次式で與えられる。

$$(2.2)\qquad P_x \cdot x+P_y \cdot y=M$$

記號については前節でのべた。

消費者の行爲が極大滿足の原則に從うことを示す行動方程式は次式で與えられる。(1)

$$(2.3)\qquad P_x/P_y=(x''-x)/(y''-y)$$

以上の三ヶの式は、二財の需要量を決定するシステムである。

一方、二財の供給量を決定するシステムは、$x'$と$y'$を$X$財及び$Y$財の供給量として、變形曲線を示す方程式、

$$(2.4)\qquad x'^2+y'^2=r_s^2$$

並に生産者の行爲が利潤極大原則に從うことを示す行動方程式、(2)

$$(2.5)\qquad y'/x'=P_y/P_x$$

の二ヶの式から構成される。(2.4)式において、$r_s$は變形曲線（圓）の半徑であって、又、$x' \geqq 0, y' \geqq 0$であることはいうまでもない。

以上の五ヶの方程式に、二財の需給の一致を示す二ヶ

の式

(2.6)　$x=x'$　　(2.7)　$y=y'$

を加えた七ヶの式が一つの國の貿易開始前の國内市場の均衡をあらわすシステムである。然し、このシステムのうち、(2.3)式と(2.5)式のいずれか一ヶは獨立でない[3]ので、均衡方程式システムは六ヶの式からなる。又、システムに含まれる變數のうち、$x''$と$y''$及び$r_s$は當然コンスタントな構造係數と假定されねばならぬので、殘された變數は、$x$、$y$、$x'$、$y'$、$P_x$、$P_y$、$M$及び$r_a$の八ヶであるから、そのうち二ヶを所與とすれば[4]、體系は一義的に解かれる。

第一節でドイツ（或は英國）についてのべたことは(2.1)—(2.7)式のシステムにおいて、コンスタントな構造係數を $x''=6.824$, $y''=4.176$, $r_s=4.000$（或は $x''=4.176$, $y''=6.824$, $r_s=4.000$）とし、所與とする變數につらては、$P_x=2.000$, $M=9.380$（或は $P_x=1.224$, $M=9.380$）として、このシステムを解いたものに他ならない[5]。

（1）(2.1)式の $r_a$ は消費者の滿足の程度に反比例するから、$F(x,y)=(x''-x)^2+(y''-y)^2$ を (2.2) 式の $P_x \cdot x+P_y \cdot y=M=\mathrm{const.}$ の條件のもとで極少にする $x$、$y$ の値の滿す條件から求められる。

（2）變形曲線に關する G. Haberler 以來の傳統とは異るが、問題を單的に次のように構成した方がよい。即ち、販賣額、$F(x',y')=P_x \cdot x'+P_y \cdot y'$ を $x'^2+y'^2=r_s^2=\mathrm{const.}$ を條件として極大化することである。このことは資源量一定を假定しているから利潤極大化の問題に等しい。(2.5) 式はこの販賣額を極大化する爲の、$x'$、$y'$の値が滿足する條件から求められる。

（3）(2.1)—(2.7) 式から$x'$と$y'$を消去すれば次の五ヶの式となる。

(1) $(x''-x)^2+(y''-y)^2=r_a^2$

(2) $P_x \cdot x+P_y \cdot y=M$

(3) $P_x/P_y=(x''-x)/(y''-y)$

(4) $x^2+y^2=r_s^2$　(5) $y/x=P_y/P_x$

右の五ヶの式のうち、(1)—(4)式を連立させる時（$x''$、$y''$、$r_s$をコンスタントな値とし、又、$P_x$と$M$を所與として）、その幾何學的意味は、(1)式の圓と(2)式の直線が接し、且、この接點で、(4)式の圓とも接することである。又、(1)、(2)、(4)、及び(5)式を連立させてもその幾何學的意味は前の場合と等しい。即ち、(3)式又は(5)式の何れか一ヶは獨立ではない。

（4）實際において所與となし得る變數は、第一圖の第一

象限を見れば分るように、$x''$、$y''$及び$r_s$がコンスタントである限り、$P_x$、$P_y$、及び$M$のうちの二ヶである。

(5) 第一節でとった實際の手續は、$r_d$を圖上で解き、この値と$P_x$を所與としたものである。

## 三

前節の(2.1)—(2.7)式のシステムが解かれたものとし、その時の無差別曲線(圓)の半徑を$r_{d0}$とし、總支出額(=總所得額)を$M_0$としよう。この貿易開始前の均衡狀態における(以下、國內均衡點における、と略稱する)無差別曲線(圓)の半徑を(2.1)式の$r_d$に代入すれば、

(3.1) $$(x''-x)^2+(y''-y)^2=r_{d0}^2$$

右式は國內均衡點における等しい高さの滿足の指標を持つ二財の組合せを示す特定の無差別曲線である。

同樣に$M_0$を(2.2)式に代入して書きかえれば、

(3.02)′ $$y=-(P_x/P_y)\cdot x+M_0/P_y$$

この式は一定の總支出額$M_0$に對する豫算直線である。消費者が極大滿足の原則に從って行動するとするならば、(3.1)式の圓の切線と(3.02)′式の直線とは同一のものであるから次の二式を得る。

(3.03)′ $$P_x/P_y=(x''-x)/(y''-y)$$

(3.04)′ $$M_0/P_y=y+\frac{x''-x}{y''-y}\cdot x$$

(3.03)′式はいうまでもなく(2.3)式と同一のものである。(3.03)′及び(3.04)′式を整理して次の二式を得る。

(3.2) $$P_x=M_0\Big/\left\{\left(y+\frac{x''-x}{y''-y}\cdot x\right)\Big/\frac{x''-x}{y''-y}\right\}$$

(3.3) $$P_y=M_0\Big/\left(y+\frac{x''-x}{y''-y}\cdot x\right)$$

右の(3.1)—(3.3)式は國內均衡點における二財の需要決定システムであって、(3.2)式と(3.3)式は$X$及び$Y$財の需要方程式であり、(3.1)式は二つの需要方程式の相互依存關係を示す條件式である。この需要決定システムにおいて方程式は三ヶ、變數のうち、$x''$と$y''$は前節でのべたようにコンスタントな構造係數、$M_0$と$r_{d0}$は所與であるから未知數は$P_x$、$P_y$、$x$及び$y$の四ヶである。即ち二財の價格比$P_x/P_y$に種々の値を與えるならばそれに對應する二財の需要量$x$、$y$は(3.1)—(3.3)式

から求められる。換言すれば、例えば$P_x$（又は$P_y$）に種種の値を與えるならばそれに對應して$P_y$（又は$P_x$）のとる値が定まり、$P_x$、$P_y$にそれぞれ對應する$x$及び$y$の値が求められる。

（3.1）—（3.3）式に基いて二財の需要曲線を二次元のグラフに描くことが出來る。[1] 第一節でのべた場合について いえば、コンスタントな値として、$r_{a0}=4.000$, $M_0=9.380$, $x''=6.824$, $y''=4.176$ を與えて、これらの値で置きかえられた（3.1）—（3.3）式において$P_x$に零より順次大なる値を與えて、それぞれの値に對應する$P_y$、$x$及び$y$の値を求める。第一圖の原點より下の$x$軸に$P_x$の値を、原點より左の$y$軸に$P_y$の値を目盛って、上述の$P_x$と$x$及び$P_y$と$y$の關係から各々第四象限と第二象限に描かれた曲線が、國内均衡點における$X$及び$Y$財の需要曲線である。

これらの需要曲線について特長的なことは、$X$財のそれについては、$P_x \leqq 3.322$で（$P_x=3.322$の時、$x=2.824$で且$P_y=0$）、$Y$財のそれについては$P_y \leqq 53.295$（$P_y=53.295$の時、$y=0.176$で且$P_x=0$）であることである が、このことは二つの需要曲線がマーシャルのそれと異って相互依存的であることの當然の結果である。[2]

第二圖の第四及び第二象限に、英國の國内均衡點における$X$及び$Y$財の需要曲線が描かれているが、それらの描き方及び性質は、ドイツの場合の$x$と$y$を交換することによって説明されるから、こゝに繰返さない。

さて、前節の（2.4）及び（2.5）式から次の二ヶの式を得る。

$$(3.4)\qquad x'=r_s\Big/\sqrt{1+\left(\frac{P_y}{P_x}\right)^2}$$

$$(3.5)\qquad y'=\left\{r_s\Big/\sqrt{1+\left(\frac{P_y}{P_x}\right)^2}\right\}\cdot\frac{P_y}{P_x}$$

右の二ヶの式は二財の供給を決定する式である。前述の二財の國内均衡點における需要決定システムにおいて$P_x$に零から順次大なる値を與えれば、それに對應する$P_y$の値が得られるのであるが、この$P_x$と$P_y$の一對の値を、（3.4）—（3.5）のシステムに與えるならば、$r_s$はコンスタントな構造係數であるから、$P_x$又は$P_y$の種々の値に對應する$X$又は$Y$財の供給量が求められる。この場合、

所與とされる二財の價格は國內均衡點における價格であるから、(3.4)—(3.5) は、國內均衡點における二財の供給決定システムをあらわすことになる。そしてこれらの種々の $P_x$ と $P_y$ に對應する $x'$ と $y'$ の量を國內均衡點におけるX及びY財の需要曲線を描いた象限に、需要曲線の場合と同樣の方法で描いたのが、第一圖及び第二圖の、兩國の國內均衡點における二財の供給曲線である。

(3.1) — (3.3) 式の國內均衡點における需要決定システムにおいて、二財の需要方程式の相互依存關係を示す條件式を豫算直線であらわすように書きかえると次の如くになる。

(3.1)′ $$x=-\left\{r_{d0}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{P_y}{P_x}\right)^2}\right\}+x''$$

(3.2)′ $$y=-\frac{P_y}{P_x}\left\{r_{d0}\Big/\sqrt{+1\left(\frac{P_y}{P_x}\right)^2}\right\}+y''$$

(3.3)′ $$P_x\cdot x+P_y\cdot y=M_0$$

(3.1)′—(3.2)′ 式と (3.4)—(3.5) 式から、$x$ 又は $y$ と $x'$ 又は $y'$ の間に次の關係があることが分る。

(一) 若し $r_{d0}=r_s$ ならば

(3.05)′ $x'=x''-x$ (3.06)′ $y'=y''-y$

二財の需給が一致した場合の需給量を各々、$x_0$ 及び $y_0$ とすれば

(3.07)′ $x_0=x''/2$ (3.08)′ $y_0=y''/2$

(3.07)′ と (3.08)′ を (3.05)′ と (3.06)′ に代入すれば、

(3.09)′ $x'=x_0+(x_0-x)$

(3.10)′ $y'=y_0+(y_0-y)$

右の二式の意味することは、第一及び第二圖でいえば（兩圖とも $r_s=r_{d0}$ だから）、需給曲線の交點を通って價格軸に平行線を引けば、兩曲線はこの平行線について對照であることである。

(二) $r_{d0}\neq r_s$ で且、$r_{d0}/r_s=\alpha$ とすれば

(3.11)′ $x'=(x''-x)/\alpha$ (3.12)′ $y'=(y''-y)/\alpha$

二財の需給が一致した時の需給量を $x_0$ 及び $y_0$ とすれば

(3.13)′ $x_0=x''/(1+\alpha)$ (3.14)′ $y_0=y''/(1+\alpha)$

右の二式を使って (3.11)′—(3.12)′ 式を書き直せば、

(3.15)′ $x'=x_0+(x^0-x)/\alpha$

(3.16)′ $y'=y_0+(y_0-y)/\alpha$

右の二式の意味することは、需給曲線の交點を通って價格軸に平行線を引き、かつ、この平行線に垂直に直線を引くとき、この直線が需要曲線と交わる點と平行線間の距離に $1/\alpha$ を乗じたものが、この直線と供給曲線の交點と平行線の間の距離に等しいことである。(3)

（1） この需要曲線の描き方について、私は J. B. Williams, International Trade under Flexible Exchange Rates. 1954 から多くの示唆を得た（本書については、私の書評が國際經濟學會編「後進國の經濟發展」國際經濟第七號、p. 221〜228 にある）。然し、ウィリアムズの數學的表現は誤りを含んでいる。

（2） 例えば、無差別曲線の性質から、$x \geqq 2.824$ であり、$x=2.824$ の時 $P_x=3.322$ であるが、$M_0=9.380$ だから $P_x \leqq 3.322$ である。

（3） 第三、第五及び第六圖における需要曲線と供給曲線の形を見られたい。

## 四

第一圖及び第二圖では、$c$（又は $c'$）點を中心として國内均衡點における無差別曲線（圓）の半徑 $r_{d0}$ の大きさを持つ圓は $x$ 軸及び $y$ 軸の何れとも交わらない。従って、この特定の圓は $-P_y/P_x$ なるスロープが $0 \sim -\infty$ の値をとる豫算直線と接し得ることを示している。即ち、需要曲線についていえば、二財の價格のとり得る範圍は零から、需要決定システムそのものによって制限される値（豫算直線をあらわす方程式によって制限される値）までである。

然し、コンスタントな構造係數である無差別曲線（圓）の中心 $c$（又は $c'$）が異った位置にあるならば、$r_{d0}$ の半徑を持つ特定の圓は $x$ 又は $y$ 軸の何れか一つ或は兩者と交わるかもしれない。第三圖は第二圖における $c$ 點の位置を直線 $oc$ の延長上に移動して $cg=5.000$ となるように作圖したものである。$c$ 點の新しい座標は（7.677, 4.698）である。(1)

(2.1)―(2.7) 式のシステムにおいて、コンスタントな構造係數として、$x''=7.677$, $y''=4.698$, $r_s=4.000$ とし、所與として、$P_x=2.000$, $M=9.380$ としても、國内均衡點における $x$、$x'$ と $y$、$y'$ 及び $P_y$ の値は變らないが、の $r_d$ の値は 4.000 から 5.000 になる。然し、第三圖から明らかなように國内均衡點において特定化される無差別

曲線は $x=5.966$ で $x$軸と交わり、この點での接線のスロープは、$-0.364$ だから、

(4.1)　$P_x/P_y<0.364$

の場合の二財の組合せは無意味である。

第三圖の第四及び第二象限には、前節でのべた方法で $M_0=9.380$, $r_{x0}=5.000$ として、(3.1)—(3.3) 式のシステムを使って、$X$財及び$Y$財の國内均衡點における需要曲線が描かれている。然し、二財の價格比が (4.1) 式の値を取ることが出來ないから、$P_x$ の値は、$1.572\leqq P_x\leqq 3.504$ というように上限と下限を持っている（第一圖では上限のみを持っている）。所で$P_x$が上限を持つこと[2]は需要決定システムの持つ條件から當然であるが、$P_x$を $1.572\leqq P_x$ で制限する條件は需要決定システムに存しない[3]。從って、(4.1) 式を拒否する條件は需要決定システムに存在しない。このことは、$c$點が第四圖における座標をとり得ないことを示すものである。

一般的に、限られた値のスロープを持つ豫算直線とのみ接し得るという條件を無差別曲線に與えることは出來ない。第四圖の $c$點が意味のある無差別曲線を與え、且、意味のある需要曲線を導き得る爲には、その座標は $x''\leqq 7.137$, $y''\leqq 4.368$ で、均衡點における無差別曲線の半徑は $r_{x0}\leqq 4.368$ でなければならぬ。或は一般的にいって、$x''<y''$（又は $y''<x''$）の時は $x''\geqq r_{x0}$（又は $y''\geqq r_{x0}$）でなくてはならぬ。

以上のべた$c$點の座標 $x''$及び $y''$が或る制限を持つことは、(2.1)—(2.7) 式のシステムで假定した、構造係數としての $x''$及び $y''$の値の constancy の性質と關係がある。卽ち、我々は $(x'', y'')$ がコンスタントであるという時、それは單に消費者の taste が一定であると假定せねばならぬことを意味するのであって、例えば第四圖の第一象限において $c$點が特定の座標をとるということではない。從って、$c$點が第一象限のどこに存在するかということは經濟學的な意味を全然持たない[4]。$c$點が我々のシステムに矛盾を生じないような座標を持つと考えても、それは、$x''$及び $y''$の値の costancy とは矛盾はしない。端的にいって $c$點は作圖上の補助點でしかない。

然し、もし、$c$點そのものに經濟學的意味を與えるか、又は $c$點が移動するということに經濟學的意味を與える

ならば、我々は、(2.1)—(2.7) 式のシステムにおいて、$x''$及び$y''$をコンスタントとして扱うことは出来ない。従って、我々のシステムを解くことは不可能になるであろう。(5)

(1) 三角の相似から、$x''=9\times3.412\div4=7.677$, $y''=9\times2.088\div4=4.689$ である。

(2) $x\geqq2.677$, $M_0=9.380$ で、$x=2.677$ の時 $P_x=3.504$ だから、$P_x\leqq3.504$ である。

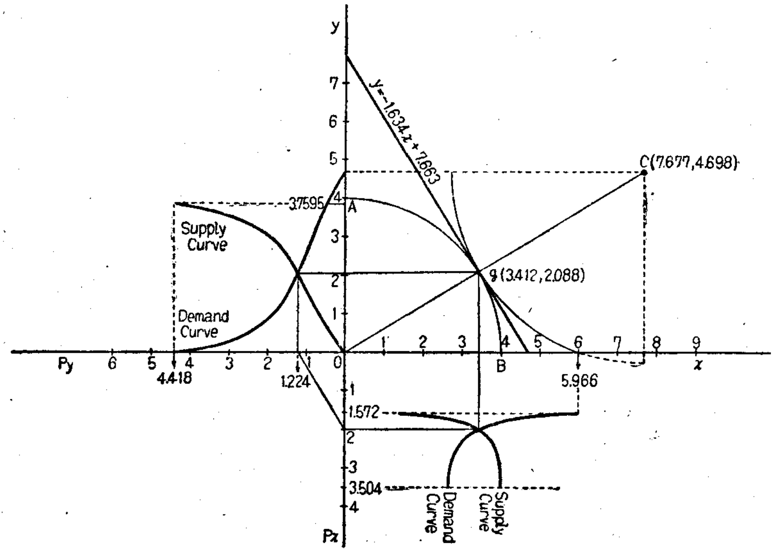
(3) $P_x=1.572$ の時 $x=5.966$, $P_y=4.418$, $y=0$ である。$P_x<1.572$ の時は $P_y>4.418$ であるが、その時$Y$財の需要量は零だから、$P_x<1.572$ の $P_x$ の値で$X$財が需要されても、需要決定システムとは矛盾しない。

(4) $x''$又は$y''$と $r_{a0}$ の大小關係も經濟學的意味を持たない。$r_{a0}$ の値が定まるということは、均衡點において或る無差別曲線が specify されるということを意味するにすぎない。$r_{a0}$ が比較され得るのは、せいぜい無差別曲線群の他の圓の半徑とであって、而も單に序數的に比較され得るのである。

(5) $c$點を bliss point と名づけて經濟學的意味を與えることが疑問である今一つの理由である。又、こゝにのべた理由で、私は小島氏の前掲論文「經濟成長と國際貿易」における $c$ 點に對する見解に疑問を持っている。



第三圖（特殊ケース）



## 五

第一圖及び第二圖で示される、國內均衡狀態にあるドイツ及び英國が相互に貿易關係にはいるものとしよう。

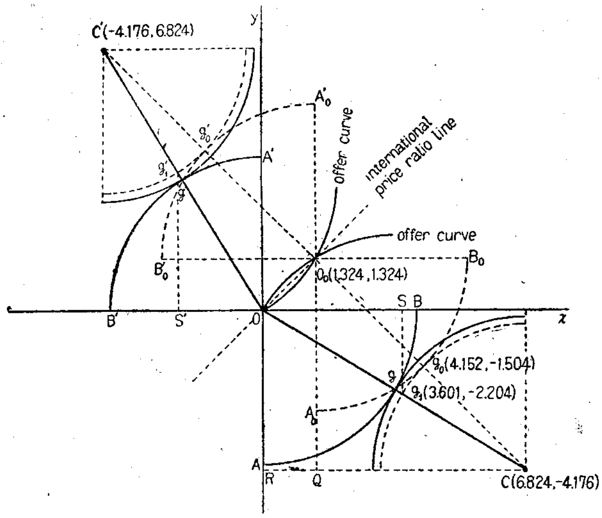
國際市場が均衡する時の國際價格比率及び兩國の輸出入財と輸出入量は第四圖で與えられる。第四圖には、第一圖の第一象限の圖を$x$軸について對照に第四象限に描き、第二圖の第一象限の圖を$y$軸について對照に第二象限に描いている。第四圖によって國際均衡を分析することはいうまでもなく、J・E・ミードに從ったものである[1]。ミードに從って、兩國の貿易無差別曲線を求めるならば、$c$及び$c'$點を中心とする同心圓によつて與えられる[2]。兩國において、貿易開始前の國內均衡點における二財の價格比、$P_x/P_y$は、$c$又は$c'$點を中心とし、半徑を$oc$とする貿易無差別曲線（卽ち國內均衡點における貿易無差別曲線）の原點0におけるスロープで與えられる[3]。

次にオッファー曲線は、ドイツについては、$o$と$c$を結ぶ直線の中點、卽ちこの場合は$g$點を中心とし、半徑を$og$（この場合は$og=4.000$）とする圓によって與えられ、英國については、$g'$點を中心とし、$og'=4.000$を半徑とする圓によって與えられる[4]。二つのオッファー曲線の交點の座標は（1.324, 1.324）である[6]。

貿易開始後の國際市場の均衡狀態（以下、國際均衡點と稱する）における兩國の$X$、$Y$二財に對する需要量は次の如くにして求められる。生産ファンの横軸と縦軸を、$x$及び$y$軸に平行に保ったまゝ移動させて、そのコーナーをオッファー曲線の交點に一致せしめる。新しい位置の兩國の生産ファン（點線で描かれたもの）のコーナーと$c$（又は$c'$）點を結び、この直線と、點線で描かれた新位置の生産ファン（それは（1.324, 1.324）を中心とし、半徑を4.000とする圓である）との交點の座標を求める。この交點をドイツの場合は$g_0$、英國の場合は$g'_0$とすると、それぞれの座標は$g_0(4.152, -1.504)$, $g'_0(-1.504, 4.152)$である[7]が、$g_0$及び$g'_0$の$x$座標と$y$座標の絶體値は、ドイツ及び英國の$X$財と$Y$財に對する均衡需要量をあらわしている。

$g_0$の$x$座標及び$y$座標の値から二つのオッファー曲線の交點の$x$座標及び$y$座標の値を引いた差の絶體値は、

第四圖　(國際均衡)




それぞれドイツの$X$財と$Y$財の均衡供給量であるが、いずれも2.828である。英國の二財の均衡供給量も同様の方法で求められるが、いずれも2.828である。

國際價格比率 $P_x/P_y$ は二つのオッファー曲細の交點と原點を結ぶ直線のスロープで與えられるが明かに1である。

第四圖は次のことを示している。國際均衡點においては、國際價格比率 $P_x/P_y=1$ で、ドイツでは、二財を共に2.828だけ生産し、需要量は$X$財が4.152、$Y$財は1.504である。從って、$P_x/P_y=1$ に從って$X$財を1.324だけ輸入し、$Y$財を1.324だけ輸出する。英國の狀態については、ドイツの場合の$X$と$Y$を換えればよい。

兩國の國際均衡點において特定化された無差別曲線(圓)の半徑は3.778であるから[8]、貿易開始によって、滿足度のより高い指標を持つ無差別曲線(圓)に移動したわけである。

(1) Cf. J. E. Meade, A Geometry of International Trade. 1952.

(2) Cf. Ibid. p. 12~13.

(3) $g$又は$g'$點における各國の無差別曲線のスロープにそれぞれ等しいから。

(4) オッファー曲線については、Ibid. p. 19. オッファー曲線のこゝでのべた描き方については A. P. Lerner, op. cit., p. 106 を參照。オッファー曲線上の任意の點と原點$o$及び$c'$を結んでその點を$o_0$とすれば角 $oo_0c'$ は常に直角である。

(6) 第四圖において、直線$oo_0$は直線$cc'$に當然垂直だから。

(7) 直線$cc'$の方程式と、$o_0$を中心とし、半徑を4とする圓の方程式を連立させて求めた$x$、$y$の値である。

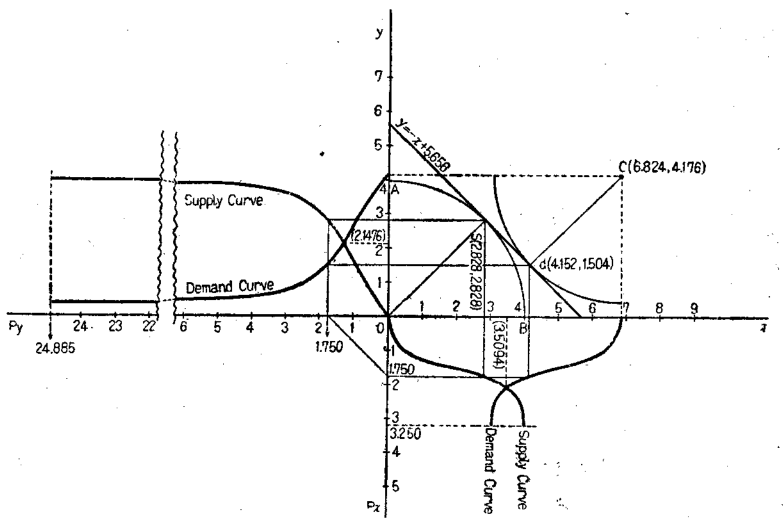
(8) ドイツについては次の如くにして求められる。第四圖において、$c$を通って$x$軸に、又$o_0$を通って$y$軸にそれぞれ平行線を引き、その交點を$Q$とせよ。三角形 $cQo_0$ において $co_0=7.778$ であるが、$o_0g_0=4.000$ にとってあるから $cg_0=3.778$ である。

## 六

國際均衡點におけるドイツ及び英國における二財の需給狀態を別々に示したのが、それぞれ第五圖と第六圖の第一象限である。

ドイツの場合の第五圖について說明する。圖において

第五圖 (ドイツ)



直線

$$(6.1)\quad y=-x+5.656$$

は $s(2.828, 2.828)$ 點において、半徑 $r_s=4.000$ で原點を中心とする變形曲線（圓）に接し、$d(4.152, 1.504)$ 點において、$c(6.824, 4.176)$ 點を中心とし、半徑 $r_{d0}=3.778$ の無差別曲線（圓）に接する。(1) $d$ 及び $s$ 點の $x$ 座標と $y$ 座標はそれぞれ國際均衡點における $X$ 財及び $Y$ 財の供給量と需要量をあらわすことは第五節でのべた通りである。

所で第四圖で明らかなように、無差別曲線の半徑は貿易開始によって 4.000 から 3.778 に短縮されたのであるから、第四圖の第四象限でいえば、貿易開始前の國內均衡點における豫算直線は南東に平行に移動し、新しい無差別曲線に $g_1$ 點（3.601, −2.204）で接する筈である。(2) この移動した豫算直線は $y$ 軸を $y=-8.088$ で截るから、$M=9.900$ であることになる。(3) 即ち、貿易開始によって總支出額（＝總所得額）は 9.380 から 9.900 へと增加し、その差額 0.520 は貿易利益をあらわすのであるが、それは又、貿易開始によって、滿足度のより高い指標を持つ無差別曲線（圓）に移動するということの具體的な內容である。

$M=9.900$ と（6.1）式からドイツにおける $X$ 財と $Y$ 財の國際均衡價格は

$$(6.2)\quad P_{x0}=1.750 \qquad (6.3)\quad P_{y0}=1.750$$

であることを知る。

輸出入關係については前節で既にのべた。又英國の國際均衡點における狀態は第六圖の第一象限に描かれているが、その說明はドイツについてのべたことと同じである。勿論、英國の國際均衡點における總支出額（總所得額）は $M=9.900$ で二財の均衡價格は $P_{x0}=P_{y0}=1.750$ である。

（1） $d$ 及び $s$ 點における接線が一致する理由は第四圖を見られたい。

（2） 第四圖において直線 $Qc$ を延長して $y$ 軸との交點を $R$ とせよ。三角形 $ocR$ において $cg_1=3.778$ だから相似關係によって $g_1$ の座標が求められる。

（3） 新しい半徑を持つ無差別曲線の $g_1$ 點における接線（豫算直線）の方程式は、

$$y=1.634x+8.088$$

所で第一節の(1.5)式に見るように豫算直線の常數項は $M/P_y$ であるが、$P_y=1.224$ であるから $M=9.900$ を得る。

## 七

以上、國際均衡についてのべたことを一般的に扱ってみよう。國際均衡は次のシステムであらわされる。但し記號は第二節の場合と同じで、下添字 $a$、$b$ で國別を示し、$a$ はドイツ、$b$ は英國をあらわすことにしよう。

兩國の無差別曲線（圓）を示す式、

(7.1)　$(x''_a-x_a)^2+(y''_a-y_a)^2=r_{ad}^2$

(7.2)　$(x''_b-x_b)^2+(y''_b-y_b)^2=r_{bd}^2$

兩國の豫算直線を示す式、

(7.3)　$P_{xa}\cdot x_a+P_{ya}\cdot y_a=M_a$

(7.4)　$P_{xb}\cdot x_b+P_{yb}\cdot y_b=M_b$

極大滿足原則に從う消費者行動を示す式、

(7.5)　$P_{xa}/P_{ya}=(x''_a-x_a)/(y''_a-y_a)$

(7.6)　$P_{xb}/P_{yb}=(x''_b-x_b)/(y''_b-y_b)$

兩國の變形曲線（圓）を示す式、

(7.7)　$x'^2_a+y'^2_a=r_{sa}^2$　　(7.8)　$x'^2_b+y'^2_b=r_{bs}^2$

極大利潤原則に從う生産者行動を示す式、

(7.9)　$y'_a/x'_a=P_{ya}/P_{xa}$　　(7.10)　$y'_b/x'_b=P_{yb}/P_{xb}$

以上の各式は第二節のシステムの最初の五ヶの式に相應する。國際均衡システムに特長的な式は次の各式である。

二財の需要供給が國際市場を通じて等しいことを示す式、

(7.11)　$x_a+x_b=x'_a+x'_b$　　(7.12)　$y_a+y_b=y'_a+y'_b$

ドイツ（從って英國）の貿易收支の均衡を示す式、

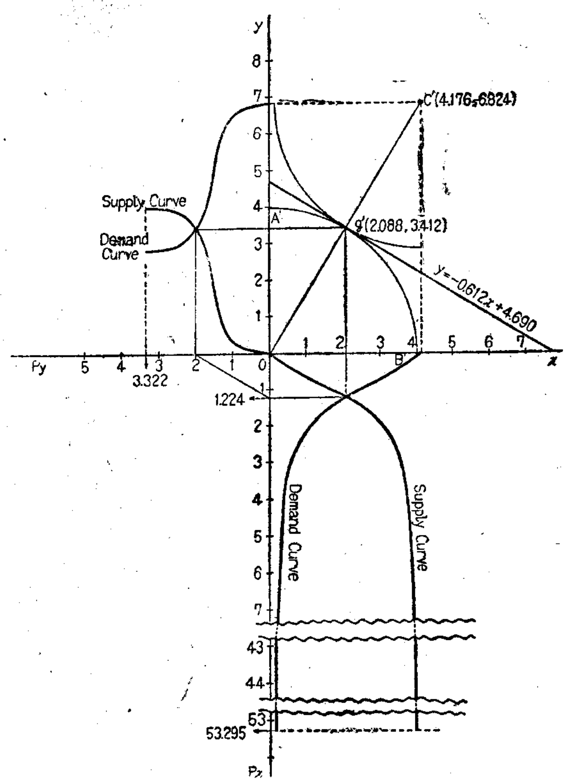
(7.13)　$(x_a-x'_a)P_{xa}=-(y_a-y'_a)P_{ya}$

兩國における二財の價格比率が等しいことを示す式

(7.14)　$P_{ya}/P_{xa}=P_{yb}/P_{xb}$

以上の十四ヶの式のうち、(7.5)と(7.9)式のうち一ヶ及び(7.6)と(7.10)式のうち一ヶが獨立でないことは第二節でのべた。[1] 從って獨立である方程式は十二ヶである。變數のうち $x''_a$、$x''_b$、$y''_a$、$y''_b$、$r_{as}$ 及び $r_{bs}$ の六ヶは既述のようにコンスタントな構造係數であるから、以上のシステムにおける未知數は十六ヶある。所で第四圖から

第六圖（英國）




明らかなように、兩國がどの財をいかほど輸出入するかは、コンスタントな構造係數たる $c$ 及び $c'$ 點の座標の $x''_a$、$x''_b$、$y''_a$ 及び $y''_b$ の値によつて定まるから、以上の方程式に加えて更に次式を得る。(2)

$$(7.15)\quad x_a - x'_a(=x'_b - x_b) = \frac{x''_a}{2} - \frac{y''_a}{2}\cdot\frac{x''_b + x''_a}{y''_b + y''_a}$$

$$(7.16)\quad y'_a - y_a(=y_b - y'_b) = \frac{x''_a}{2}\cdot\frac{y''_b + y''_a}{x''_b + x''_a} - \frac{y''_a}{2}$$

更に第六節でのべたように、貿易開始前の國內均衡點における兩國の二財の均衡價格と、國際均衡點における總支出額＝總所得額の間には、國際均衡點において特定化される無差別曲線の半徑を通じて一定の關係があるが、それは次の如くにあらわされる。(3)

$$(7.17)\quad M_a = P'_{ya0}(r_{as} + r_{ad0} - r_{ad})\cdot\left(\sin\alpha_a + \frac{P'_{xa0}}{P'_{ya0}}\cdot\cos\alpha_a\right)$$

$$(7.18)\quad M_b = P'_{yb0}(r_{bs} + r'_{bd0} - r_{ab})\cdot\left(\sin\alpha_b + \frac{P'_{xb0}}{P'_{yb0}}\cdot\cos\alpha_b\right)$$

右二式において、$P'_{xa0}$, $P'_{xb0}$ と $P'_{ya0}$, $P'_{yb0}$ 及び $r'_{ad0}$,

$r'_{ba0}$は貿易開始前の國内均衡點におけるX財とY財の均衡價格及び特定化された無差別曲線の半徑である。$\sin\alpha_a$, $\cos\alpha_a$ 及び $\sin\alpha_b$, $\cos\alpha_b$ はそれぞれ $c$ 及び $c'$ の座標によって決まるから、それ自身コンスタントな値である。第四圖でいうと、$g_1$點から $x$ 軸に垂線を下し、その交點を $s$ とすれば角 $sog_1$ を度であらわしたのが $\alpha_a$ であり、$g'_1$點から $x$ 軸に垂線を下し、その交點を $s'$ とする時、角 $s'og'_1$ を度であらわしたのが $\alpha_b$ である。

以上の十八ヶの式が國際均衡を示すシステムであるが、獨立の方程式は既述のように十六ヶであるが、未知數は貿易開始前の兩國の國内均衡システムが解かれている限り、$P_{xa}$、$P_{xb}$、$P_{yb}$、$P_{yb}$、$x_a$、$x_b$、$y_a$、$y_b$、$x'_a$、$x'_b$、$y'_a$、$y'_b$、$M_a$、$M_b$、$r_{ad}$、$r_{bd}$ の十六ヶであるから、我々の國際均衡システムは一義的に解かれる。

第六節でのべたことは、ドイツについては、コンスタントな構造係數については貿易開始前と同樣とし、從って、$\alpha_a$ は

$$\tan 31°28' = \frac{4.176}{6.824} = \frac{y'_a}{x''_a}, \quad \therefore \ \alpha_a = 31°28'$$

又國内均衡點における値として

$$P'_{xa0} = 2.000, \ P'y'_{a0} = 1.224, \ r'_{aa0} = 4.000$$

とし、英國についても同樣に、コンスタントな構造係數は貿易開始前と同じであるから、$\alpha_b$ は

$$\tan 58°32' = \frac{6.824}{4.176} = \frac{y''_b}{x''_b}, \quad \therefore \ \alpha_b = 58°32'$$

國内均衡點における値として

$$P'_{xb0} = 1.224, \ P'_{yb0} = 2.000, \ r'_{ba0} = 4.000$$

として、(7.1)―(7.18) 式のシステムを解いた結果を示したものに他ならない。[4]

(7.13) 式はドイツの貿易收支均衡を示したのであるが、(7.11)―(7.14) 式から、英國の貿易收支均衡を示す式

$$(x_b - x'_b)P_{xb} = -(y_b - y'_b)P_{yb}$$

を導き出すことが出來る、

（1）第二節註（3）を參照。

（2）第四圖において $c$ と $c'$ を結ぶ直線の方程式は、座標をそれぞれ $(x''_a, -y''_a)$, $(-x''_b, y''_b)$ として、

(1)　$$y = -\frac{y''_b + y''_a}{x''_b + x''_a}(x - x''_a) - y''_a$$

又原點と $o_0$ を結ぶ直線は直線 $cc'$ に垂直だから、その方程

式は、

$$(2)\qquad y=\frac{y''_b+y''_a}{x''_b+x''_a}\cdot x$$

両式を連立させて $x$、$y$ を求めると、

$$(3)\qquad x=\frac{x''_a}{2}-\frac{y''_a}{2}\cdot\frac{x''_b+x''_a}{y''_b+y''_a}$$

$$(4)\qquad y=\frac{x''_a}{2}\cdot\frac{y''_b+y''_a}{x''_b+x''_a}-\frac{y''_a}{2}$$

(3)及び(4)式の $x$、$y$ はいうまでもなく本文の記號を使って、

$$x=x_a-x'_a=x'_b-x_b,\quad y=y'_a-y_a=y_b-y'_b$$

である。

（3） (7.17) 式について説明する。第四圖において $g_1$ 點から $x$ 軸に垂線を下して交點を $s$ とせよ。角 $sog_1$ は $c$ 點の座標によって定まるコンスタントな大きさを持つが、それを $\alpha$ 度としよう（以下、第四象限の圖を $x$ 軸に對象に第一象限に描いたものとして座標は全て正値をとるものとする）。直線 $sg_1$ 及び $os$ の長さ（卽ち $g_1$ の $x$ 及び $y$ 座標）は、角 $sog_1$ 及び直線 $og_1$ が與えられれば定まる。所で、圖で明らかなように、

$$(1)\qquad og_1=r_{as}+r'_{ad0}-r_{ad}$$

である。但し、$r'_{ad0}$ は貿易開始前の國內均衡點において特定化された無差別曲線の半徑である。從って $g_1$ 點の $x$ 座標 $os$ と $y$ 座標 $sg_1$ は、

$$(2)\qquad os=og_1\cdot\cos\alpha_a \qquad (3)\qquad sg_1=og_1\cdot\sin\alpha_a$$

一方、ドイツの貿易開始前の國內均衡點における豫算直線の方程式は

$$(4)\qquad y=\frac{2.000(=P'_{xa0})}{1.224(=P'_{ya0})}\cdot x+\frac{9.380(=M'_{a0})}{1.224(=P'_{ya0})}$$

記號は $M'_{a0}$（國內均衡點における總支出額＝總所得額）の他は本文にのべてある。(4)式の直線は國際均衡點においては $c$ 點に向って平行に移動して $g_1$ 點で新しい半徑を持つ無差別曲線に接する。この移動した直線の方程式は、(2)及び(3)式を使って、

$$(5)\qquad y=-\frac{P'_{xa0}}{P'_{ya0}}\cdot x+(r_{as}+r'_{ad0}-r_{ad})\cdot\left(\sin\alpha_a+\frac{P'_{xa0}}{P'_{ya0}}\cdot\cos\alpha_a\right)$$

(5)式の直線は、國際均衡點において特定化されるドイツの無差別曲線に接しているから(5)式の右邊第二項は次式の第二項に等しい。

$$(6)\qquad y=-\frac{P'_{xa0}}{P'_{ya0}}\cdot x+\frac{M_a}{P'_{ya0}}$$

從って、(7.17) 式を得る。

（4） 實際の手續は、$r_{ad}$ を圖上で求めて、$r_{ad0}=3.778$ としているので、(7.17) 式は次のようになる。

$$M_a=5.1677\times\sin 31.°28'+8.4440\times\cos 31°28'=9.900$$

## 八

第七節の (1.1)—(7.18) 式のシステムを解いて、國際均衡點における兩國の總支出額=總所得額並に特定化される無差別曲線の半徑を求めて、それらを、$M_{a0}$, $M_{b0}$ 並に $r_{ad0}$, $r_{bd0}$ としよう。これらの値を、(7.1)—(7.6) 式に代入し、第三節でのべた方法で書き換えれば次の六ヶの式を得る。

(8.1) $$(x''_a-x_a)^2+(y''_a-y_a)^2=r_{ad0}^2$$

(8.2) $$P_{xa}=M_{a0}\Bigg/\left\{\left(y_a+\frac{x''_a-x_a}{y''_a-y_a}\cdot x_a\right)\Bigg/\frac{x''_a-x_a}{y''_a-y_a}\right\}$$

(8.3) $$P_{ya}=M_{a0}\Bigg/\left(y_a+\frac{x''_a-x_a}{y''_a-y_a}\cdot x_a\right)$$

(8.4) $$(x''_b-x_b)^2+(y''_b-y_b)^2=r_{bd0}^2$$

(8.5) $$P_{xb}=M_{b0}\Bigg/\left\{\left(y_b+\frac{x''_b-x_b}{y''_b-y_b}\cdot x_b\right)\Bigg/\frac{x''_b-x_b}{y''_b-y_b}\right\}$$

(8.6) $$P_{yb}=M_{b0}\Bigg/\left(y_b+\frac{x''_b-x_b}{y''_b-y_b}\cdot x_b\right)$$

(8.1)—(8.3) 式及び (8.4)—(8.6) 式は第三節でのべたことから分るように、國際均衡點におけるドイツ及び英國の二財に對する需要決定システムである。(8.1)—(8.3) 式において $P_{xa}$ (又は $P_{ya}$) に零から順次大なる値を與えてゆけば、$P_{xa}$ (又は $P_{ya}$) のそれぞれの價に對應する $P_{ya}$ (又は $P_{xa}$)、$x_a$ 及び $y_a$ の値が求められるから、第一圖で試みたと同様に、二次元のグラフにドイツの國際均衡點における二財の需要曲線を描くことが出來る。(8.4)—(8.6) 式を使って、同様に英國の國際均衡點における二財の需要曲線を描き得る。第五圖の第四及び第二象限に描かれたドイツの$X$財と$Y$財の需要曲線は、$x''_a=6.824$, $y''_a=4.176$, $r_{ad0}=3.778$, $M_{a0}=9.900$として、(8.1)—(8.3) のシステムから求めたものであり、第六圖の英國の二財の需要曲線は、$x''_b=4.176$, $y''_b=6.824$, $r_{bd0}=3.778$, $M_{b0}=9.900$ として求めたものである。これらの需要曲線の性質については第三節でのべたことから類推出來るからしてこゝではのべない。

又、(7.7)—(7.10) 式を書き換えれば、

(8.7) $$x'_a=r_{as}\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{P_{ya}}{P_{xa}}\right)^2}$$

(8.8) $$y'_a=\left\{r_{as}\Bigg/\sqrt{1+\left(\frac{P_{ya}}{P_{xa}}\right)^2}\right\}\cdot\frac{P_{ya}}{P_{xa}}$$

$$(8.9)\qquad x'_b=r_{bs}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{P_{yb}}{P_{xb}}\right)^2}$$

$$(8.10)\qquad y'_b=\left\{r_{bs}\Big/\sqrt{1+\left(\frac{P_{yb}}{P_{xb}}\right)^2}\right\}\cdot\frac{P_{yb}}{P_{xb}}$$

(8.7)—(8.8) 式はドイツの二財の供給決定システムであるが、前述の國際均衡點における需要曲線を描く場合に得られた一對の$P_{xa}$と$P_{ya}$の種々の値を (8.7)—(8.8) 式に入れて、それらに對應する$x'_a$と$y'_a$の値を求めれば、國際均衡點におけるドイツの二財の供給曲線を描くことが出來る。第五圖のドイツの第四及び第二象限に描かれた$X$及び$Y$財の供給曲線は $r_{as}=4.000$ として、このようにして得られたものである。(8.9)—(8.10) 式は英國の二財の供給決定システムであって、これら二ヶの式を使って、ドイツの場合と同樣の方法で第六圖の第二及び第四象限に國際均衡點における英國の$X$財及び$Y$財の供給曲線が描かれている。

以上の國際均衡點における需給決定システムの一〇ヶの式に加えるに、二財の需給が國際市場を通じて等しいことを示す式

$$(8.11)\quad x_a+x_b=x'_a+x'_b \qquad (8.12)\quad y_a+y_b=y'_a+y'_b$$

及び兩國の貿易收支が均衡することを示す式

$$(8.13)\qquad (x_a-x'_a)P_{xa}=-(y_a-y'_a)P_{ya}$$

及び兩國の二財の價格比率が等しいことを示す式

$$(8.14)\qquad P_{ya}/P_{xa}=P_{yb}/P_{xb}$$

を加えれば、これら十四ヶの式からなるシステムは、第七節の (7.1)—(7.18) 式の特別の表現である。

(8.2)、(8.3)、(8.7) 及び (8.8) 式のうち一ヶ、並に、(8.5)、(8.6)、(8.9) 及び (8.10) 式のうち一ヶは獨立でないので[1]、(8.1)—(8.14) 式のうち獨立な方程式の數は十二ヶである。變數のうち、$x''_a, x''_b, y''_a, y''_b, r_{as}, r_{bs}$ の六ヶはコンスタントな構造係數であり、$M_{a0}, M_{b0}, r_{a0}, r_{b0}$ は所與である。從って、未知數は、$x_a, x_b, x'_a, x'_b, y_a, y_b, y'_a, y'_b, P_{xa}, P_{ya}, P_{xb}, P_{yb}$ の十二ヶであるからシステムは一義的に解かれる。第五圖、第六圖の第四及び第二象限は、この解の幾何學的表現なのである。

(1) 例えば (7.9) 式が非獨立とせよ。この式を使って (7.7) 式から (8.7) と (8.8) 式を導いているからそのうち一ヶは獨立でない。(富山大學講師)