《研究ノート》

生産函數の齊一性と産業部門の統合

荒　憲治郎

一　問題・前提・結論

「産業概念の如何なる構成も、理論的には無意味である」とは、獨占的競爭の理論を一般均衡理論の武器によって分析しようとした場合の R. Triffin の言葉であった。吾々は、一方では理論的に、産業概念の曖昧性を概歎しながら、他方で實際問題になると、微視的企業者や巨視的國民所得の概念よりも頻繁に、産業の問題について語るのである。吾々は、經濟理論を "empty box" たらしめないために、斷えず理論と實際の架橋に努めねばならない。

　ここでの問題は、最近、世界の主要諸國で作成せられつつある所の投入・産出表の立場から、産業部門の統合について、一つの理論的規準を提示することである。問題はこうである。理論的分析が中心である時には、吾々は一般に n 個の産業部門を想定するのだが、しかし現實の問題になると、五〇〇個の産業部門を構成したり、それを五〇個の産業體系に統合したりしなければならない。特に、投入・産出表を經濟政策の理論模型として利用する場合には、産業部門の構成も operational な範圍、例えば精々の所五〇個部門位の範圍に留めなければならないであろう。その場合に、五〇〇個の産業體系に適用した經濟政策の效果が、それと全く同一の經濟政策を五〇個の體系に適用した效果と異ったものであるならば、産業部門の統合の規準について何等かの誤謬があったと見なければならない。何故ならば、現實は唯だ一つであり、その齟齬は現實の負うものに非ずして理論に課せらるべきものだからである。

　以下の所論を通じて吾々は、價格關係に關する凡ゆる問題を捨象する。從って簡單のために、相對價格を不變なるものと前提する。この時、吾々は次の歸結を得る。

　『n 個の産業部門において、もし生産函數の齊一なる産業部門が存在するならば、それらを統合して新しい産業部門を構成しても、統合前に適用した如何なる最終財需要の變動效果も、統合後の體系に適用した效果と全く同一である。』

この歸結より、若干その嚴密性は缺くけれども、米・小麥・野菜の生産部門を統合して農業部門を作ったり、乘用車・トラック・オートバイの生産部門を統合して自動車製造部門を構成したりする妥當性が與えられるのである。

　勿論、この命題は、最終財需要の變動效果の不變性という規準からみた産業部門統合についての、而も一つの充分條件であ

るに過ぎない。しかし常識的に考えられている産業部門の分類は、多くの場合、生産函數の齊一性が規準になっているのであり、以下の所論もこの常識に對して嚴密な證明を與えることを目的としているのである。(一)

二 産業部門統合の手續き

事態を簡單にするために、三個の産業體系を二個の産業體系に統合する場合を考える。勿論、n 個の産業部門を適當に再配列して、最初の m_1 個の産業部門を第一グループ、次の m_2 個を第二グループ、次の m_3 個を第三グループという仕方で、n 個の産業體系を S 個のそれに統合する一般的な場合にも妥當する。

今、第一表の如き

第一表

投入 ＼ 配分	第一部門	第二部門	第三部門	最終需要	産出量
第一部門	X_{11}	X_{12}	X_{13}	ξ_1	X_1
第二部門	X_{21}	X_{22}	X_{23}	ξ_2	X_2
第三部門	X_{31}	X_{32}	X_{33}	ξ_3	X_3

第二表

投入 ＼ 配分	第一部門	第二部門	最終需要	産出量
第一部門	X_{11}	$X_{12}+X_{13}$	ξ_1	X_2
第二部門	$X_{21}+X_{31}$	$X_{22}+X_{32}+X_{23}+X_{33}$	$\xi_2+\xi_3$	X_2+X_3

投入・産出表を考えてみよう。ここで、X_i は第〔i〕部門の産出量合計であり、X_{ij} は第〔i〕部門の産出量の中第〔j〕部門に配分されたものである。これらは凡て或る一定期間の價値額として示されている。又、ξ_i は第〔i〕部門の産出量の中、他の産業部門の費用項目とはならずに、言わば再生産過程の外部に流出する最終的需要量を示しており、それを全産業部門について合計するならば、周知の國民最終生産物となる。

さて、或る規準に從って第二部門と第三部門を統合し、これを新しく第二部門と名付けよう。その結果として得られる新しい投入・産出表は、上の第二表によって示される。

今、集計マトリックスを次のように規定する。

(1.1) $$P=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}$$

P の轉置マトリックスを P' で示せば、

(1.2) $$P'=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}$$

即ち、行と列を入れ換えたものである。

更に、第一表及び第二表より、次の如きマトリックス及びベクトルを定義する。

(1.3) $$[X_{ij}]=\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}&X_{13}\\X_{21}&X_{22}&X_{23}\\X_{31}&X_{32}&X_{33}\end{bmatrix}$$

(1.4) $$[Y_{ij}]=\begin{bmatrix}Y_{11}&Y_{12}\\Y_{21}&Y_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_{11}&X_{12}+X_{13}\\X_{21}+X_{31}&X_{22}+X_{32}+X_{23}+X_{33}\end{bmatrix}$$

(1.5) $$x \equiv \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix}$$

(1.6) $$y \equiv \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 + X_3 \end{bmatrix}$$

(1.7) $$\xi \equiv \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix}$$

(1.8) $$\zeta \equiv \begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 + \xi_3 \end{bmatrix}$$

これらにより、次の關係式の成立は明白であろう。

(1.9) $$P[X_{ij}]P' \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv [Y_{ij}]$$

(1.10) $$Px \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{bmatrix} \equiv y$$

(1.11) $$P\xi \equiv \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{bmatrix} \equiv \zeta$$

かくして、第一表より第二表を得るためには、適當に定義された集計マトリックスを、(1.9) より (1.11) 式に至る手續により、それぞれのマトリックス及びベクトルに操作すると看做し得るのである。

三　變動效果不變性の意味

さて、レオンチェフの方法に倣って、次の如きワルラスの假定を導入しよう。

(2.1) $$X_{ij} = a_{ij} X_j \qquad (i, j = 1, 2, 3)$$

(2.2) $$Y_{ij} = b_{ij} Y_j \qquad (i, j = 1, 2)$$

これは一般に limitational な生産函數と呼ばれている。そこでマトリックスを次のように定義するならば、

(2.3) $$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

(2.4) $$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

(2.5) $$[X_j] \equiv \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & X_3 \end{bmatrix}$$ 但し $X_i > 0$ $(i = 1, 2, 3)$

(2.6) $$[Y_j] \equiv \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix}$$ 但し $Y_i > 0$ $(i = 1, 2)$

次の關係式の成立は明白である。

(2.7) $$[X_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} X_{11} & X_{12} & X_{13} \\ X_{21} & X_{22} & X_{23} \\ X_{31} & X_{32} & X_{33} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 & 0 & 0 \\ 0 & X_2 & 0 \\ 0 & 0 & X_3 \end{bmatrix}$$
$$\equiv A[X_j]$$

(2.8) $$[Y_{ij}] \equiv \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1 & 0 \\ 0 & Y_2 \end{bmatrix} \equiv B[Y_j]$$

(2.9) $$P[X_j]P' \equiv [Y_j]$$

$X_i > 0 (i = 1, 5, 3)$ $Y_i > 0 (i = 1, 2)$ であるから、

(2.10) $$[X_{ij}][X_j]^{-1} = A$$ 但し $[X_j][X_j]^{-1} = E_{(3)}$

(2.11) $$[Y_{ij}][Y_j]^{-1} = B$$ 但し $[Y_j][Y_j]^{-1} = E_{(2)}$

も成立する。$E_{(i)}$ は〔i〕次の單位行列である。

さて、各産業部門の産出量について

(2.12) $X_i = X_{i1} + X_{i2} + X_{i3} + \xi_i \quad (i=1,2,3)$

(2.13) $Y_i = Y_{i1} + Y_{i2} + \zeta_i \quad (i=1,2)$

が成立するならば、(2.1) 及び (2.2) を考慮して、

(2.14) $$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad x = Ax + \xi$$

(2.15) $$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad y = By + \zeta$$

が成立する。從ってそれぞれの解は、

(2.26) $x = [E_{(3)} - A]^{-1}\xi$

但し $[E_{(3)} - A]^{-1}[E_{(3)} - A] = E_{(3)}$

(2.17) $y = [E_{(2)} - B]^{-1}\zeta$

但し $[E_{(2)} - B]^{-1}[E_{(2)} - B] = E_{(2)}$

となる。

さて問題は、ξ_1, ξ_2, ξ_3 が例えば國家當局によって任意に變動せしめられた場合に、統合前の體系（A體系と呼ぶ）と統合後の體系（B體系と呼ぶ）に及ぼす效果の比較である。

先ず、最終的需要ベクトル ξ の變動が適當に選擇されるならば、A體系からB體系に移る手續きには、何等の理論的根據も不必要であることに注意しなければならない。從ってここでの問題は、最終的需要ベクトル ξ が如何ように變動しても、A體系とB體系との産出量水準に及ぼす變動效果が等しい條件を尋ねることである。

今、ξ が $\Delta\xi$ だけ變動したとしよう。A體系にこれを適用するならば、

(2.18) $\Delta x = [E_{(3)} - A]^{-1}\Delta\xi$

である。所で明かに

(2.19) $\Delta\zeta \equiv P\Delta\xi$

であるから、本質的には $\Delta\xi$ と等しい $\Delta\zeta$ をB體系に適用するならば、

(2.20) $\Delta y = [E_{(2)} - B]^{-1}\Delta\zeta \equiv [E_{(2)} - B]^{-1}P\Delta\xi$

となる。もしも、A體系についてみた Δx とB體系についてみた Δy との間に、如何なる $\Delta\xi$ についても、不斷に

(2.21) $P\Delta x \equiv \Delta y$

が成立しているならば、A體系における變動效果を後で集計したものと、直接にB體系で生じた變動效果とが等しいということ、卽ち凡ゆる最終需要の變動に對するA體系とB體系の效果は等しいと言えるのである。

(2.21) 式は次のように書改められる。

(2.22) $P\Delta x - \Delta y = P[E_{(3)} - A]^{-1}\Delta\xi - [E_{(2)} - B]^{-1}P\Delta\xi$

$= \{P[E_{(3)} - A]^{-1} - [E_{(2)} - B]^{-1}P\}\Delta\xi \equiv 0$

但し0は零ベクトルを示す。再びこの式において、$\Delta\xi$ が適當に選ばれるならば、體系の如何に拘らず $P\Delta x - \Delta y = 0$ の可能性が充分にあることに留意しなければならない。例えば

(2.23) $\Delta\xi = \lambda\xi$

の場合（但しλは任意のスカーラー常數）などはそれである。しかし、凡ゆる $\Delta\xi$ に對してこのことが言われるのは、

(2.24)　$[P[E_{(3)}-A]^{-1}-[E_{(2)}-B]^{-1}P]\equiv[0]$

但し $[0]$＝零行列

となる場合、そしてその場合に限ることが明白である。即ち、吾々は次の定理を得る。

〔定理〕　如何なる最終需要の變動に對してもA體系とB體系の變動效果が等しいためには、

$$[P[E_{(3)}-A]^{-1}-[E_{(2)}-B]^{-1}P]\equiv[0]$$

の成立が必要且つ充分である。

證明。充分なることは

$$P\Delta x-\Delta y=[0]\Delta\xi\equiv0$$

より明かである。必要なることは、もし

$$[P[E_{(3)}-A]^{-1}-[E_{(2)}-B]^{-1}P]\neq[0]$$

とすれば、適當な $\Delta\xi$ を選んで、

$$[P[E_{(3)}-A]^{-1}-[E_{(2)}-B]^{-1}P]\Delta\xi\neq0$$

とすることが出來るから明かである。

さて、(2.24) は次のようにも書ける。

(2.25)　$P[E_{(3)}-A]^{-1}\equiv[E_{(2)}-B]^{-1}P$　or

(2.26)　$[E_{(2)}-B]P\equiv P[E_{(3)}-A]$

所で、計算によって容易にわかるように、

(2.27)　$E_{(2)}P\equiv\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\equiv P\equiv\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\equiv PE_{(3)}$

であるから、(2.26) 式の兩邊からこれらを差引くならば、

(2.28)　$BP\equiv PA$

が得られる。(2.28) より (2.25) 從って (2.24) を導くことも出來、又、その逆も可能なのであるから、(2.28) の關係は (2.25) 又は (2.24) と同値の關係を示す。

かくして最終需要の如何なる變動に對してもA體系とB體系のそれぞれの變動效果が等しいためには、

$$BP\equiv PA$$

の成立する場合、そしてその場合にのみ可能であることが明白となった。

三　生產函數の齊一性

然らば、如何なる條件がみたされる時に、(2.28) の關係が成立するのであろうか。この條件を分析するために、生產函數の齊一性について定義を與えておかなければならない。ここで生產函數が齊一であるというのは、例えば第二部門と第三部門についてみれば、

(3.1)　$\begin{bmatrix}a_{12}\\a_{22}\\a_{32}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{13}\\a_{23}\\a_{33}\end{bmatrix}$

ということである。即ち、行列Aの任意の列ベクトルが等しいことを意味する。そこで吾々は、齊一なる生產函數をもつ產業部門が存在する時には、それらを統合してA體系よりB體系を作るならば、(2.28) をみたすということを示したいと思う。

これを定理で示せば、

〔定理〕　生産函數の齊一なる産業部門を統合して一個の部門と看做してA體系よりB體系を作るならば、如何なる最終需要の變動も二つの體系に與える變動效果は相等しい。

ということである。

先ず、次の如き行列運算を考えよう。

$$(3.2)\qquad PP'=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}=R$$

明かにRは正則であり逆行列をもつ。それを R^{-1} で示すと、

$$(3.3)\qquad PP'R^{-1}=RR^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=E_{(2)}$$

である。簡單に

$$(3.4)\qquad P'R^{-1}=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\0&0.5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0.5\\0&0.5\end{bmatrix}=Q$$

で示すならば、明白に

$$(3.5)\qquad PQ=E_{(2)}$$

である。

更に、次の行列運算を考えよう。

$$(3.6)\qquad QP=\begin{bmatrix}1&0\\0&0.5\\0&0.5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0.5&0.5\\0&0.5&0.5\end{bmatrix}=M$$

然るに、もしも行列Aの第二列ベクトルと第三列ベクトルが等しければ、即ち (3.1) が成立しているならば、次の關係は明白である。

$$(3.7)\qquad AQP=AM=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&0.5&0.5\\0&0.5&0.5\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}&0.5(a_{12}+a_{13})&0.5(a_{12}+a_{13})\\a_{21}&0.5(a_{22}+a_{23})&0.5(a_{22}+a_{23})\\a_{31}&0.5(a_{32}+a_{33})&0.5(a_{32}+a_{33})\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{bmatrix}=A$$

即ち、行列Mを行列Aの右側から乘じても、それは恰も單位行列Eの如き作用を營むにすぎないのである。

さて、前に明かにしたことから、行列Bは

$$(3.8)\qquad B=[Y_{ij}][Y_j]^{-1}=P[X_{ij}]P'[Y_j]^{-1}$$

(2.11)　(1.9)

$$=PA[X_j]P'[Y_j]^{-1}$$

(2.7)

である。然るに、(3.7) によって $A=AQP$ であるから、

$$(3.9)\qquad B=PA[X_j]P'[Y_j]^{-1}=PAQP[X_j]P'[Y_j]^{-1}$$

である。(2.9) により $P[X_j]P'=[Y_j]$ なる故

$$(3.10)\qquad B=PAQP[X_j]P'[X_j]^{-1}$$

$$=PAQ[Y_j][Y_j]^{-1}=PAQ$$

が成立する。前提によって $A=AQP$ であるから、兩邊の右側から行列Pを乘ずると、

$$(3.11)\qquad BP=PAQP=PAM=PA$$

が得られる。

さて、この最後の式が、吾々が變動効果不變性のために導出した(2.28)そのものであることを繰返す必要は存在しないであろう。吾々は $A=AQP$ という條件がみたされる時に $BP=PA$ ということが言えるということ、從って、生産函數が齊一なる産業部門はこれを統合して一個の部門と看做しても、政策模型の効果判斷分析には何等の支障も存在しないということを證明したのである。

ただここで注意すべきことは、$BP=PA$ ということからは、兩邊の右側から行列 Q を乘じて $BPQ=B=PAQ$ ということは言えるが、無條件に $B=PAQ$ から $BP=PA$ は出て來ないということ、卽ち逆變換は必ずしも可能ではないということである。從って吾々の提示したクライテリヤは、未だ存在するかも知れない[三]充分條件の一つに過ぎないということに注意しなければならない。

五　一般的展開と數字例

以上の分析を一般的な場合、卽ち n 個の産業部門を S 個のグループ、

$$\underbrace{(1,2,\ldots\ldots,m_1)}_{m_1\text{個}},\ \underbrace{(m_1+1,m_1+2,\ldots\ldots,m_1+m_2)}_{m_2\text{個}},\ \ldots\ldots,\ \underbrace{(m_{S-1}+1,m_{S-1}+2,\ldots\ldots,m_{S-1}+m_S)}_{m_S\text{個}}$$

に統合する場合を考える。勿論、各グループに所屬する産業部門は、それぞれ齊一の生産函數をもっているものと考えられている。

今、ベクトル $e_{(i)}$ を次のように定義する。

$$(5.1)\qquad e_{(i)}\equiv[\underbrace{1,1,\ldots\ldots,1}_{i\text{個}}]$$

そこで集計マトリックス P は

$$(4.2)\qquad P\equiv\begin{bmatrix} e_{(m_1)} & & & \\ & e_{(m_2)} & & \\ & & \cdots\cdots & \\ & & & e_{(m_s)} \end{bmatrix}$$

となる。但し空白の部分は0で埋められている。

再び議論の凡てを繰返す必要はない。そこで、中心的な關係式

$$(5.3)\qquad AQP\equiv AM=A\quad \text{但し}\ PQ=E_{(s)}$$

についてのみ關說しよう。

今、ベクトル $m_{(i)}$ を

$$(5.4)\qquad m_{(i)}=[\underbrace{\frac{1}{m_i},\ \frac{1}{m_i},\ \ldots\ldots,\ \frac{1}{m_i}}_{m_i\text{個}}]$$

と定義すれば、行列 Q は

$$(5.5)\qquad Q\equiv\begin{bmatrix} m'_{(1)} & & & \\ & m'_{(2)} & & \\ & & \cdots\cdots & \\ & & & m'_{(s)} \end{bmatrix}$$

となる。但し $m'_{(i)}$ は $m_{(i)}$ の轉置ベクトルを示し、且つ空白

の部分は0で埋められている。そこで再び

$$(5.6)\qquad m'_{(i)}e_{(mi)}\equiv\begin{pmatrix}\frac{1}{m_i}\\ \vdots\\ \frac{1}{m_i}\end{pmatrix}[1,1,\cdots,1]\equiv\begin{pmatrix}\frac{1}{m_i}&\cdots\cdots&\frac{1}{m_i}\\ \vdots&&\vdots\\ \frac{1}{m_i}&\cdots\cdots&\frac{1}{m_i}\end{pmatrix}\equiv M_{(i)}{}^{-1}$$

と定義するならば、

$$(5.7)\qquad QP\equiv M\equiv\begin{pmatrix}M_{(1)}{}^{-1}&&&\\&M_{(2)}{}^{-1}&&\\&&\cdots\cdots&\\&&&M_{(s)}{}^{-1}\end{pmatrix}$$

である。ここでも再び、空白の部分は0で埋められている。

さて、最後の m_1 個の列ベクトルが凡て等しく、次の m_2 個の列ベクトルが凡て等しく……という行列 A の右側から行列 M を乗ずるならば、恰も行列 M は單位行列の如き作用を營むにすぎないことが容易に確められる。即ち

$$(5.8)\qquad AQP\equiv AM=A$$

が成立するのである。これより、(3.8) より (3.11) に至る凡ての關係式が導出される。

かくして、n 個の産業部門の中、生産函數の齊一なる部門を統合して S 個の産業部門を編成しても、統合前の産業體系と統合後の産業體系は、最終需要の如何なる變動に對してもその效果は等しいのである。

具體的數字例によって補足しよう。今、六個の産業體系のレオンチェフ行列を次の如く假定する。

$$(5.9)\qquad A\equiv\left(\begin{array}{c|cc|ccc}0.2&0&0&0.2&0.2&0.2\\ \hline 0.4&0.2&0.2&0.3&0.3&0.3\\ 0.2&0.1&0.1&0&0&0\\ \hline 0&0.1&0.1&0&0&0\\ 0&0.4&0.4&0.1&0.1&0.1\\ 0&0&0&0.2&0.2&0.2\end{array}\right)$$

そこで $[E_{(6)}-A]^{-1}$ を計算するならば、

$$(5.10)\qquad [E_{(6)}-A]^{-1}\equiv\left(\begin{array}{c|cc|ccc}\frac{85}{53}&\frac{25}{53}&\frac{25}{53}&\frac{35}{53}&\frac{35}{53}&\frac{35}{53}\\ \hline \frac{105}{106}&\frac{140}{106}&\frac{140}{106}&\frac{90}{106}&\frac{90}{106}&\frac{90}{106}\\ \frac{105}{106}&\frac{140}{106}&\frac{140}{106}&\frac{90}{106}&\frac{90}{106}&\frac{90}{106}\\ \hline \frac{75}{159}&\frac{100}{159}&\frac{100}{159}&\frac{140}{159}&\frac{140}{159}&\frac{140}{159}\\ \frac{75}{159}&\frac{100}{159}&\frac{100}{159}&\frac{140}{159}&\frac{140}{159}&\frac{140}{159}\\ \frac{75}{159}&\frac{100}{159}&\frac{100}{159}&\frac{140}{159}&\frac{140}{159}&\frac{140}{159}\end{array}\right)$$

を得る。これより吾々は、最終需要 $\xi_1, \xi_2, \cdots\cdots, \xi_6$ が與えられるならば、容易に産出量水準 $X_1, X_2, \cdots\cdots, X_6$ を計算することが出來る。

所で容易にわかるように、行列 A を縦列に眺めると、第二列と第三列、第四列と第五列と第六列とはそれぞれ等しい。そこで生産函數の齊一性の規準により、集計行列 P を

(5.11) $$P\equiv\begin{bmatrix}1&0&0&0&0&0\\0&1&1&0&0&0\\0&0&0&1&1&1\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}e_{(1)}&0&0&0&0&0\\0&e_{(2)}&0&0&0\\0&0&0&e_{(3)}\end{bmatrix}$$

と定義し、新たに

(5.12) $$PAP'\equiv B\equiv\begin{bmatrix}0.2&0&0.2\\0.6&0.3&0.3\\0&0.5&0.3\end{bmatrix}$$

を作る。

直ちに明白なように行列 A 及び B は

(5.13) $$PA=BP$$

を満足している。即ち、六個の產業體系を三個のそれに統合しても、最終需要の變動効果は不變である。

檢證のために、$[E_{(3)}-B]^{-1}$ を計算するならば、

(5.14) $$[E_{(3)}-B]^{-1}\equiv\begin{pmatrix}\frac{85}{53}&\frac{25}{53}&\frac{35}{53}\\\frac{210}{106}&\frac{280}{106}&\frac{180}{106}\\\frac{375}{159}&\frac{300}{159}&\frac{420}{159}\end{pmatrix}$$

である。所で、

$$X_1=Y_1,\quad X_2+X_3=Y_2,\quad X_4+X_5+X_6=Y_3$$

$$\xi_1=\zeta_1,\quad \xi_2+\xi_3=\zeta_2,\quad \xi_4+\xi_5+\xi_6=\zeta_3$$

に留意しながら、例えば

$$\Delta\xi_1=\Delta\xi_2=\Delta\xi_3=\Delta\xi_4=\Delta\xi_5=0,\quad \Delta\xi_6=15.9$$

としよう。$P\Delta\xi\equiv\Delta\zeta$ なる故に

$$\Delta\zeta_1=\Delta\zeta_2=0,\quad \Delta\zeta_3=15.9$$

である。従って (5.10) 及び (5.14) の右側から $\Delta\xi$ 及び $\Delta\zeta$ を與えるならば、

$$\Delta X_1=10.5,\quad \Delta X_2=\Delta X_3=13.5,\quad \Delta X_4=\Delta X_5=\Delta X_6=14.0$$

$$\Delta Y_1=10.5,\quad \Delta Y_2=27.0,\quad \Delta Y_3=42.0$$

を得る。容易にわかるように、

$$\Delta X_1=\Delta Y_1=10.5,\quad \Delta X_2+\Delta X_3=\Delta Y_2=27.0,$$

$$\Delta X_4+\Delta X_5+\Delta X_6=\Delta Y_3=42.0$$

であって、$P\Delta x=\Delta y$ が檢證されるのである。そしてこの歸結は、最終需要の如何なるエレメントが任意に變動しても成立する。

（一） 吾々は、既に產業體系を前提とし、その體系を更に巨視的な產業體系に統合するという手續きをとったが、この分析は、微視的企業者から產業體系を構成する場合にも適用出來るのである。ワルラスは、此の種の議論をすっかり無視していたように思はれる。レオンチェフを始め多くの學者は、吾々と同じ結論を文學的に語っており、未だ曾つて一度も證明を與えていない。宣言と證明は異る。

（二） 私はこの論文を書いてから暫らく後に、Morgenstern (ed.), "Economic Activity Analysis" 1954. における Balderston 及び Whitin の論文「投入・產出モデルにおける集計」を繙讀する機會を持った。彼等は、論證の手續きは異るけれども（そして不充分でもある）、私と同じ結論を得ている。但し、私の第一命題の如き變動効果不變性の必要且つ充分條件は導出していない。（一九五四・七・三〇）