

書評

『線型不等式及び線型計画法  
に關するシンポジウム』

Alex Orden and Leon Goldstein, Edited by,  
"Symposium on Linear Inequalities and Pro-  
gramming", 1951. Comptroller, Headquarters  
U. S. Air Force

古瀬 大六

一 計画法と經營學

T. C. Koopmans 以下に編集された Activity Analysis of Production and Allocation, 1951 が Cowles Commission Monograph, No. 13 として刊行されたのを契機として、活動分析或は線型計画法という耳馴れない言葉が、吾國の一部の經濟學者の口から、時折聞かれるようになった。

編者 Koopmans がその序文に記してゐるやうに、この新しい領域は、マルサスの一般均衡方程式の解の存在條件、厚生經濟學の立場よりする資源の合理的配置、レオンチェフ體系に於ける技術的代替性の導入、などの國民經濟學上の諸問題と關聯しながら發展してきたものである。然し、同時にそれなまた、

第二次大戰中に現れた、複雑な輸送計畫、軍備計畫等を合理的に解決しようという、極めて實踐的な要求によつて刺戟された、という事實を忘れてはならない。

この線型計画法は、戦後に於ても更に、原材料の配合割合、最有利製造品目の決定、合理的人員配置、等の多くの管理上の難問題を解くための有力な武器として採り上げられつつある。それは、テラー以後に於ける科學的管理法の革命的展開の端緒をなすものと言つても言い過ぎではない。この意味に於て、この新しい領域を經濟學者だけに委ねることをせずに、經營學者の中からも、その發展に對して深い注意と關心とをよせられる多數の人々が現れることを、心から希望するものである。

二 文獻紹介

この活動分析或は線型計画法についてその後發表された雜誌論文、學會報告、單行本の數は、既に可成りの數にのぼつてゐる。その中で、特に經營技術として利用できるような形で問題を取上げたもの、而も吾々が容易に入手し得るもの、として次の二つを挙げるこゝができる。

Dorfman, R., Application of Linear Programming to the Theory of the Firm, 1951, University of California Press, pp. ix+98.

Charnes, A., Cooper, W. W. and Henderson, A., An Introduction to Linear Programming, 1953, Wiley, pp. 74.

この二つの小冊子は、何れも問題を簡単にわかり易くまとめられている、という點で優れたものであると言つてよい。然しその反面、あまりに問題を特定の形式に限定し、一つのわくをはめてしまつてゐる。わかり易い反面に、發展性がない。この新しい領域は、まだ生れたばかりの幼児であつて、これが將來どのような方面にその威力を發揮するようになるか、今のところ全く豫想もつけ難い。それを、今のうちから既存のわくに押込めてしまふことは、將來の自由な發展にとつて大きな障害になるであらう。

この二冊の入門書と全く對蹠的な立場に立つのが、最初に擧げた Koopmans, Activity Analysis of Production and Allocation, 1951, Wiley である。本書は、一九四九年の六月廿日から廿四日に互つて、シカゴの Cowles Commission に於て開催された Conference on Linear Programming の報告書である。その報告書の中には、經濟學者の外に、數學者、統計學者、經營學者等の多方面の専門家の顔がみられる。このような多方面の専門家たちが、それぞれの専門領域の立場から、問題をいろいろ多面的にとらえている點が、本書の特色である。

そのために、屢々初學者にはとりつきにくい數學的表現があり、體系的に極めて不統一であるという難點があつても、その中から將來への發展の緒口を見つけ出すことのできる豊富な示唆を含んでいる。その廿五編の論文のうち、特に經營學の立場からは非讀んでおかなければならない論文として、次の十一編

を擧げることができよう。

Chapters I, II, III, XI, XII, XIII, XIV, XIX, XX, XXI, XX-

### III.

#### 三 シンポジウム

この三冊の書籍の外に、吾々の見逃がすことのできないもう一つの重要な文獻のあることを忘れてはならない。本稿の表題として掲げた Proceedings of the Symposium on Linear Inequalities and Programming, 1952 がそれである。これは、一九五一年の六月十四日から十六日に互つて、米國商務省の National Bureau of Standards と、米空軍參謀本部の Deputy Chief of Staff, Comptroller との共同主催の下に、ワシントンで開かれたシンポジウムの報告書である。主催者が何か知識のないような感を與えるかもしれないが、標準局は G. E. Forsythe その他の有能な數値計算の専門家を揃えて聯立多元一次方程式の數値解法の研究に力を入れており、米空軍は今次大戰終結後もその軍備計畫の合理化、その危大な組織運営の能率化のために計畫法の研究に盛に熱を入れていること、を思いあわせるならば、少しも不思議ではない。

Cowles Commission の主催になる第一回會合以來の二七年間の進歩の跡がはつきりと見られるばかりでなく、その重點が、國民經濟學から經營學の上に移されているという點で、吾々研究者にとつて誠に有難い文獻と言わなければならない。唯、殘

念なことに、市販出版物の形態をとらずに謄写版刷りのままで少部数配布されるに止まつたために、多くの関係者の眼にふれる機会をもたなかつた様子である。この點を考慮して、以下、書評と同時に、内容紹介を兼ねるように注意しながら、話を進めることに致したい。

掲載された論文は全部で廿編で、空軍に於ける研究状況を報告した M. K. Wood の巻頭論文を除けば、數學理論及計算法についての十二の論文と、各種應用例についての七つの論文とに分けることができる。

#### 四 米空軍に於ける研究の現状

線型計画法の實踐の起源としては、Hitchcock と Koopmans とによつて第二次大戦初期にとりあげられた輸送計画法の問題、米空軍によつて戦後研究されている長期的軍備計画法の問題、の二つを擧げることができる。これらの間には、その與えられた實踐的課題の相異に應じて、その理論的内容に若干の相異點がみられる。

則ち、輸送計画法の問題では、種々の可能な計畫のうちから最も有利な計畫を選び出すこと (optimization) に重點が置かれた。然るに、軍備計畫の場合にあつては、何分にも activity の數が一〇〇萬個にも達するような有様であるために、最有利計畫を探し出すことよりも、その前に先ず、實行可能な計畫を一つでも決定すること (feasibility) が先決問題であつた。

#### 書 評

Wood の巻頭論文によれば、最終目的としての戰闘計畫が與えられるならば、それに必要な補給計畫・生産計畫を求めめるには、一定の技術的係数を順次にこれに乗じて行きさえすればよい。個々の計算はこのように單純であるとしても、二萬五千種の activity と、卅六ヶ月の期間とを含む現實の軍備計畫を解くには、通常の IBM 計算機を使つても、六ヶ月という長い期間を必要とする。この計算期間の短縮について空軍からの依頼を受けた標準局では、従來の十分の一(廿日間)で計算できる電子管式計算機 UNIVAC を設計し、恐らく昨年中に完成したかと思われる。

このような單純化の裏には、諸活動間の關係を表わす係數が一義的に定まつている、則ち、諸活動の間に技術的代替性が全く存在しない(數學的に言えば、諸係數が一つの三角マトリックスを形成すること)、という非現實的假定がかくされていることを見逃してはならない。これに對してとつた空軍當局の實踐的解決案は、それぞれの係數集團のうちで最も能率的と思われる係數だけを取つて係數マトリックスを作り、他種係數との間の相互依存關係は全くこれを無視する、というやり方であつた。

このような個別的 optimization が全體的 optimization と一致しないこと、言うまでもない。本當に合理的な optimization を行なおうとするならば、全般的な optimization を考慮しながら聯立多元一次方程式を解くことのできる優秀な機械が、ど

うしても必要となる。この目的のために特別に設計された計算機械 SCOMP (Scientific Computation of Optimum Programs) が、数年後には完成する筈である。

五 數學理論と計算法

次に數學理論と計算法とに關する諸論文を検討してみよう。Linear Programming の種々ある解法のうち、今までに最もよく研究され、實用化されているのは、例の Simplex Method である。Dantzig, Maximization of a Linear Function Subject to Linear Inequalities (Cowles Commission Monograph, No. 13, pp. 339—347) は、その最初の文獻であるが、degeneracy の取扱方の點で、必ずしも完全な解法を與えたものとは言ふ難い。この問題に完全な解決を與へ、Simplex Method を最も完全な形にしたのは、Charnes, Optimality and Degeneracy in Linear Programming (Econometrica, April 1952, pp. 160—170) である。

Charnes の論文は、その Simplex Method と關して、三つの論文が發表されている。その一つは、著者が用いた値であるが、A. Orden, Application of the Simplex Method to a Variety of Matrix Problems, pp. 28—50 である。彼は、その計算法を一つの computational matrix を表示するものとして、問題を計算機に持てる際の配練 (programming) を容易とし、且つまた、同様の ma-

トリクスを用いて、零和二人ゲーム・逆マトリックス・線型聯立不等式の解をも求めることを示した。これは、理論的には上記の Charnes の論文を一步も出るものではないにしても、その實用的意義は高く評價されるべきではない。

また、natural unit vector と artificial vector とを區別し、前者を、不等式を等式化するために添加される變數、後者を、initial feasible solution を簡便に見出すために附加される變數として區別したことの、計算法上の意義も決して少くない。兩者は、極大問題の場合には、一方を以て他方の役割をも果させることが出来るため、屢々混同されているが、極小問題に於ては、以上の二通りのヴェクトルを同時に添加することが必要となるのである。

他の二つは、Linear Programming に於ける双對 (duality) 定理を、従來のより面倒な幾何學的方法を使わずに、simplex method の收斂性を利用して全く算術的に證明した Dantzig and Orden の論文 A Duality Theorem based on the Simplex Method, pp. 51—55 及び simplex method の幾何學的意味を説いた Mayberry, A, Geometrical Interpretation of the Simplex Method, pp. 56—67 である。何れも興味深い問題であるが、差違は認められなく。

Linear Programming の一つの解法は、double description method である。simplex method は、最も有利な唯一組の optimal solution だけを能率的に求めるための對して、

れば、總つて feasible solutions を残らず組織的に算定しようとする計算法である。従つて、變數の數の多い場合には、その feasible solutions の數もまた甚大となつて、實用化できない、とつての缺點を持つが、然し、大部分の變數を固定した上で特定の少數の變數（例えば、原料價格・製品價格）を變えた場合の可能な總つての解を見出すといふことは、實踐的意義も大きく、計算技術上も實用化可能であらう。シンポジウム報告中の Raiffa, Thomson, Thrall の論文 An Algorithm for Determination of All Solutions of a Two Person Zero-Sum Game with a Finite Number of Strategies, pp. 100—114 が、この方法を論じたものである。これを更だ、これを一般の線型不等式の解法に適用した一章を新たに加えた論文が、Contributions to the Theory of Games, Vol. II (Annals of Mathematical Studies, No. 28), 1953, Princeton University Press 中で、Motzkin, Raiffa, Thompson and Thrall, The Double Description Method, pp. 51—74 として再録されている。

其他の色々な解法を論じたものとしては、R. S. Motzkin, New Techniques for Linear Inequalities and Optimization, pp. 15—27 ; E. W. Barankin, Some Investigations in Linear Programming, pp. 68—73 ; G. E. Forsythe, Methods for Solving Linear Equations (abstract), p. 182 が掲載されている。その外、Motzkin と Forsythe の論文は、線型聯立一次方程式又は線型聯立不等式の種々の解法を取扱つたものであつて、

optimization を含んでおらないので、これを直ちに線型計畫法の解法に適用するといふわけにはいかない。唯、その中で、Forsythe の擧げている Monte Carlo Method (Random walk のモデルによつて解く方法) は、將來性のある計算法として、注意を拂う價值があるであらう。

然し、見方を變えて、經濟學的な一般均衡理論、又はそれと等價な數學的表現を持つところの分權的管理法の立場からすれば、これら聯立多元一次方程式の種々の iterative method による數値解法は、それぞれ、各經濟主體又は分權管理者の行動様式に對應させることができる、といふ點で、充分の注意を拂うべき價值をもつてゐる。則ち、それぞれの解法から、逆に、主體の行動様式としての意味を引出し、その解の收斂性から、經濟機構又は管理組織の分權的決定の安定性を理解することができるであらう。(その一例として、relaxation method と市場均衡との間の關聯性についての論文、古瀬大六「計畫法と分權決定」、商學討究、昭和廿八年七月、を参照せられたい。)

また、右に記した Barankin の短い論文は、optimization を含んだ linear programming の新しい解法として、その示唆を含んでゐるが、また實用の段階に到つてゐない。

最後に、極めて重要な數學的論文として、E. W. Blackett の Convex Programming (abstract), pp. 133—134 を擧げたいのはならない。双對定理 (duality theorem) によれば、 $AX=b$  のなる條件の下で、 $c$  を最大ならしめよ、といふ線型計畫

法の最大問題に對し、 $A_{ij}$ 、 $M_{ij}$ 、 $N_{ij}$ なる條件の下で  $b_{ij}$  を最小ならしめよ、という最小問題が必ず存在し、且つその解  $x_{ij}$ 、 $y_{ij}$  はその値が等しくなる、とどういふことを吾々は知つてゐる。この定理は、國民經濟又は分權管理機構における價格の役割を理解する上で、缺くことのできなから重要な定理であるが、それが果して非線型の場合にも成立してゐらうか。これは筆者が饒つてゐた一年越しの疑問であつたが、Blackett により、それが convex programming の場合にも成立すること、また、最大問題から簡単な計算によつて最小問題を導き得ること、を知り得たことは、分權管理論にとつて大きな貢獻である。残された課題として、この場合にも果して  $P$  は價格としての役割を持ち得るのか、また、Kuhn and Tucker が考へた  $L$ 、 $G$ 、 $H$  の最大問題に於けるラグランジュ乗数と見做すことができるか、 $L$  と  $G$  を含む単一の函数の mini-max 解として問題を扱へるかとが、あるか、等の諸點を擧げよう。(H. W. Kuhn and A. W. Tucker, Non-linear Programming, Proceedings of the Second Berkeley Symposium, 1951, pp. 481—492.)

残された一〇の報中 M. M. Flood, Hitchcock Distribution Problem, pp. 74—99 は、従來の simplex method による Dantzig の方法 (G. B. Dantzig, Application of the Simplex Method to a Transportation Problem, Cowles Commission Monograph, No. 63, pp. 359—379) を數學的に嚴密化しただけで、特に取上げて問題にしなければならぬような點は、見當らな

## 六 計畫法の應用例

linear programming の實踐的應用として、その七つの論文に移らう。全論文のうち最大の頁數を占める A. Charnes, W. W. Cooper and B. Mellon, Blending Aviation Gasolines, pp. 115—146 は、殆どそのまゝの形で、エロノメトリカ、一九五二年四月號に轉載されてゐるので、この二改めて言及することを避けた。

先ず、吾々にとつて目新しい應用例として、Problem of Contract Awards と Personnel Assignment Problem の二つを注目に値する。(Leon Goldstein, Problem of Contract Awards, pp. 147—154; D. F. Votaw and A. Orden, Personnel Assignment Problem, pp. 153—163.)

大企業又は官公廳が、種々の商品をそれぞれ定められた量だけ購入しようとする場合、購買係としては、單にその個々の商品の價格を安くさせるだけでなく、全體としての購入價額を最低ならしめるように努めなくてはならない。各製品の生産者が專業化され、一企業一製品である場合には、競争入札により、各商品ごとその最低入札者を決めればよい。

けれども、通常、一つの企業は様々な關聯商品を生産しており、それぞれの品物の間には或る種の代替關係が成立つてゐる。このような状況の下で購入價額を全體として最低ならしめるた

めには、従来のように、単に個々の品目についての価格・供給量を入力するだけでは、不十分である。供給業者は、更に、何等かの形で、その各商品に共通した最大供給能力と、その換算割合とを申出ることを必要とする。具體的には、最大供給能力と最高契約総額、または、標準商品への換算率とその商品の最大供給能力、を申出なければならぬ。

これを數學的に定式化すれば、 $a_i$ を商品 $i$ の購入必要量、 $x_{ij}$ を供給業者 $j$ から購入する商品 $i$ の量、 $c_{ij}$ をその申出価格、 $U_j$ を供給業者 $j$ の供給し得る最高契約総額として、

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} \leq a_i \quad (i=1, \dots, m)$$

$$\sum_{i=1}^m c_{ij} x_{ij} \leq U_j \quad (j=1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

なる条件の下で、

$$\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij}$$

を最小ならしめよ、という、典型的な linear programming の問題として表わすことができる。若し、価格 $c_{ij}$ が生産量の大小によつて異なるといふのであれば、これを幾つかの step function に分けて考えることにより、右と同様の數學形式によつて、その解を求めることができる。この contract awards の解法は、同一企業内に同種製品を生産し得る多數の獨立的工場

が存在する場合にも適用することができるであろう (D. Patinkin, Multiple-plant firms, cartels and imperfect competition, Q. J. E., 1946, 7, pp. 173—205 参照)。

次は、人員配置の問題である。 $n$ 人の人間を $n$ 個の地位に配置する方法は、 $n!$ 通りのやり方が可能であるが、出来るだけ適材を適所に配置することによつて、全體として最大の効果を擧げるように工夫しなければならぬ。 $i$ 番目の人間を $j$ 番目の地位につかせたときの能率を $c_{ij}$ とし、人間 $1, 2, \dots, n$ を、それぞれ、地位 $j_1, j_2, \dots, j_n$ につかせる配置方法を、 $(1, j_1), (2, j_2), \dots, (n, j_n)$ と表わせば、問題は

$$\sum_{i=1}^n c_{ij_i}$$

を最大ならしめるように $(1, j_1), \dots, (n, j_n)$ を選ぶにはどうしたらよいか、という數學問題になる。これにはいろいろな計算方法が可能であり、報告者 Votaw and Orden も七つの方法を擧げているが、そのうち、最も常識的に理解し易いのは、五番目の switching pairs の計算法である。

これは、或る任意の配置方法から出發して、そのうちの或る二人を入れ替えることによつて總得點が増加してゆく限り、そのような入れ替えを次々に行つて、その結果、如何なる入れ替えをやつても得點が増加しなくなつたところが最も有利な計畫である、とする方法である。最初の出發點となる配置を決めるに際し、でたらめではなしに、一人一人の人間に最適の職を與

え、同一職に二人以上の適職者があるときは、そのうちの高職者とその職につかせ、他の一人は次善の職につかせる、というように決めておけば、以降の計算回数を大幅に減少させることができるであろう。

Votaw and Orden は、この問題を

$$\sum_{j=1}^n x_{ij} = 1 \quad (i=1, \dots, n)$$

$$\sum_{i=1}^n x_{ij} = 1 \quad (j=1, \dots, n)$$

$$x_{ij} \geq 0$$

なる条件の下に

$$\sum_{i,j} c_{ij} x_{ij}$$

を最大ならしめよ、と云う linear programming の問題と考へて、これを simplex method を適用することができると論じている。然し、この解法には若干疑問がある。というのは、地位 $j$ に配置される人間の数は、必ず1又は0でなくてはならぬのに、右の解は必ずしもこの条件を保証してはいないからである。

これを零和二人ゲームの問題に換元して解こうとするものに、J. von Neumann, A Certain Zero-Sum Two Person Game Equivalent to the Optimal Assignment Problem (Contributions to the Theory of Games, Vol. II, 1953, pp. 5—21)

がある。着想は誠に面白いが、その game matrix の行と列とが  $2^n \times 2^n$  という長大なものになるので、解法としての實用性は少いであろう。

この人員配置の問題を、各種航空機の在庫量と、その各種任務への振り分けの問題、と考へても、その數學的形式は少しも變ふなご。J. L. Holley, Suitability Scales for Allocation Problems (abstract), pp. 192—3 は、この種の配分問題を扱つたものである。評點 $s_j$ の決定について、彼は、用途 $j$ の優先順位を  $p_j$ 、型航空機を用途 $j$ に振向けた場合の能率を  $h_j$  とすれば、 $c_{ij} = F(p_j, s_j)$  なる  $p \cdot s$  の單調増加函數を以てすべきことを主張している。また、これを、生産要素 $j$ を使つて生産物 $i$ を生産する經濟問題、と解釋するならば、 $p_j$  は生産物 $i$ の價格、 $s_j$  は資源 $j$ の一單位から生産される生産物 $i$ の量、則ちその限界生産物、であり、その場合の  $c_{ij}$  は

$$c_{ij} = p_i \times s_j$$

で表わされることを指摘している。

Heller, Least Ballast Shipping Required to Meet a Specified Shipping Program, pp. 164—171 は、周知の transportation problem を扱つたもので、その點では、別に何の新しい點も見られない。但し、その中で論ぜられてゐる、多期間計畫の處理方法は、企業の最有利豫算の算定にも應用でき、その實用的意義は大きい。例えば、三ヶ月間の輸送計畫に於て、毎月必要輸送量のサエクトルを  $b_1, b_2, b_3$ 、毎月の計畫輸送



最のベクトルを  $y_1, y_2, y_3, \dots$  費用ベクトルを  $c$  とすれば、問題は

$$\begin{cases} Ay \geq b \\ A(y_1 + y_2 + y_3) \geq b_1 + b_2 + b_3 \\ y_i \geq 0 \end{cases}$$

なる条件の下に

$$d' \sum_{i=1}^n y_i$$

を最小にする  $y$  の linear programming の一變型となるのである。

Woodbury M. A., Design of an Optimal Test Battery, pp. 172—175 44, 感度測定された合計時間及び最も有利な實驗計畫を導く問題を論じているが、差當りし經營上の問題に直接關係はなからぬので、解説は省略する。

最後の G. Debreu, Efficiency Prices as Guides for Decentralized Decisions (abstract), pp. 190—191 44, 國民經濟に於ける一般均衡の解の存在を論じたものである。一般均衡を  $n$  の mini-max 問題として取扱った最初の學者は J. von Neumann (A Model of General Equilibrium, Review of Economic Studies, XIII, pp. 1—9) である。それを更に一般化したものは Arrow, Debreu 等の新進學者によってなされたのである。この論文は、斯る研究の中間報告として

て興味深いものである。

(附記) linear programming の經營學的應用に重點を置くと、特許  $\Delta$  の機械  $\Delta$  の  $\Delta$  米國空軍の外に Charnes, Cooper の  $\Delta$  の Carnegie Institute of Technology を挙げることが出来る。更に、個人的研究としては、左記の如き研究も進められたることを附記し、 $\Delta$  The American Economic Review, Sept. 1953, p. 770)。

W. W. Gardner, Interindustrial Relations Data and Linear Programming Methods as applied to Problems of Business Management.

T. A. Marschak, Application of Linear Programming to Oil Distillation. (昭和廿八年十一月廿日)