# ゲーム理論と複占均衡*

藤野正三郎

## はしがき

クールノーに始まる複占の分析において、[8]（〔 〕を附した數字は末尾の文獻を示す）從來あるいは複占均衡は成立するといわれ、あるいは複占均衡は不決定であると主張されてきた。しかしこれらの主張の對立の原因は各複占者の市場に臨む態度をいかにみ、競争者のとる戰略（ストラテジー）に對する反應をどのように考え、從つてこの複占市場について陰伏的にいかなる動學模型を考えていたかにあるように思われる。

こゝでまず何をもつて複占均衡というかを明かにしておかねばならない。以下各複占者の戰略が利潤の増加を求めて動きえないような狀態を複占均衡と呼ぶ。この定義の下において各複占者が予測的態度をとる場合を分析する。この分析の過程で用いられる武器はノイマンおよびモルゲンステルンのゲーム理論で展開されたミニ・マックス原理である。[1](1) そしてこのミニ・マックス原理がある plausible な動學模型と結びつけられることにより、動學的に安定な均衡點が存在し、かつそれがクールノーの複占均衡點に外ならないことを示すであろう。

＊この論文は一橋大學理論經濟學研究會の諸氏との日頃の討論に負う所が大きい。また一橋大學內の研究會で報告した際、山田雄三教授および山田勇教授より貴重なる批判をいたゞいた。さらに數學的證明の過程については、藤末宏氏に聞いていたゞき、種々有益なる批判と教示を賜つた。記して感謝の意を表したい。もちろん誤りがあれば、それはすべて筆者の責任である。なお以下の分析（それは容易に多占の場合に擴張することもできるが）は私の考えようとしている市場の理論（それはマーシャルの市場理論に近い）の單なる一アペンディクスにすぎない。

(1)　極めて單純な模型の下における複占の分析へのミニ・マックス原理の適用は〔5〕にみられる。また〔10〕にも簡單な例の下での經濟現象へのミニ・マックス原理の適用が考察されている。

## 1.

兩複占者（以下その一方を1で、他方を2で示す）が供給側に立つ場合を考え、$i(=1, 2)$ の戰略を $\tau_i$、その集合を $T_i$ で示す。複占理論の傳統に從つて、各複占者の指令する戰略をそれぞれの供給量とする。そして各複占者の利潤を次の式によつて定義する。

(1.1)　$$\pi_i(\tau_1, \tau_2)=\tau_i D(\tau_1+\tau_2)-K_i(\tau_i) \qquad i=1, 2$$

こゝに $D(\tau_1+\tau_2)$ は需要函數を示し、それは價格を $p$ とすれば

(1.2)　$$p=D(\tau_1+\tau_2)$$

なる關係を滿すものとする。また $K_i(\tau_i)$ は $i$ の總費用函數を示す。

こゝで凸函數および凹函數を定義しておく。ある函數 $\varphi(x)$ がその定義區間において、

$$(1.3)\qquad \lambda_1, \lambda_2 \geqq 0, \qquad \lambda_1+\lambda_2=1$$

なる $\lambda_1$、$\lambda_2$ に對して

$$(1.4)\qquad \lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2) \geqq \varphi(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)$$

なる關係を滿足するとき、$\varphi(x)$ を凸函數という。また (1.4) において逆の不等號が成立するとき $\varphi(x)$ を凹函數という。次に $\lambda_1, \lambda_2>0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$ なる $\lambda_1$、$\lambda_2$ に對して

$$(1.5)\qquad \lambda_1\varphi(x_1)+\lambda_2\varphi(x_2) > \varphi(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2)$$

なる關係を滿足するならば、$\varphi(x)$ は嚴密に凸（ストリクトリ・コンベックス）であるという。もし (1.5) において逆の不等號が成立するならば $\varphi(x)$ は嚴密に凹であるという。もし $\varphi(x)$ が凸函數（あるいは嚴密に凸）であるならば、明かに $-\varphi(x)$ は凹函數（嚴密に凹）である。

さて通常經濟理論において想定されることは、(1.1) の利潤函數において各 $\tau_j$ に對し $\pi_i$ が $\tau_i$ に關して極大點を有するということである ($i \neq j$)。このとき極大の第一および第二條件を滿足する $\tau_i$ が定義區間において存在することになるが、經濟理論ではさらに極大が最大に一致するものとして分析を進めているようである。このことは極大の第二條件と同樣な關係（すなわち第二次微分が 0 または負という關係）が定義區間のいずれの點においても成立していることを意味している。すなわち利潤函數が凹函數なること（また極大點が一意的に決定されるためには嚴密に凹なること）に外ならない。そこでいまこのことを陽表的に假定する。

**〔假定・1〕**—弱假定—$\pi_i$は各$\tau_j$に對し$\tau_i$に關して凹である。$(i, j=1, 2;\ i \neq j)$

**〔假定・1′〕**—强假定—$\pi_i$は各$\tau_j$に對し$\tau_i$に關して嚴密に凹である。$(i, j=1, 2;\ i \neq j)$

次に需要函數は通常原點に向つて凸であるとされる。すなわち需要函數$D(\tau_1+\tau_2)$は各$\tau_j$に對し$\tau_i$に關して凸（あるいは嚴密に凸）であるとされる$(i, j=1, 2;\ i \neq j)$。しかるにこのことは(1.1)の利潤函數においては次の假定と同値である。

**〔假定・2〕**—弱假定—$\pi_i$は各$\tau_i$に對し$\tau_j$に關して凸である。$(i, j=1, 2;\ i \neq j)$

**〔假定・2′〕**—强假定—$\pi_i$は各$\tau_i$に對し$\tau_j$に關して嚴密に凸である。$(i, j=1, 2;\ i \neq j)$

さらに需要函數について考えて行く。需要函數は通常右下りの曲線で示される。すなわちそれは單調減少函數であるとされる。そこで次の假定をおく。

**〔假定・3〕**　$D(\tau_1+\tau_2)$は各$\tau_i$に對し$\tau_j$に關して單調減少函數である。$(i, j=1, 2;\ i \neq j)$

〔假定・2′〕と〔假定・3〕をともに用いるときには、$D(\tau_1+\tau_2)$は狹い意味での單調減少となる。また〔假定・3〕の必要且充分條件として、直ちに明かなように$\pi_i$は各$\tau_i$に對し$\tau_j$に關して單調減少函數である$(i, j=1, 2;\ i \neq j)$ということがえられる。以上の假定に加えて次の假定をおく。

**〔假定・4〕**　$\pi_i$はその定義領域において、各$\tau_i$に對し$\tau_j$に關して連續であり、また各$\tau_j$に對し$\tau_i$に關して連續である。$(i, j=1, 2;\ i \neq j)$

以上の利潤函數の特徴はそれが自己の戰略とともに相手の戰略に依存しているということである。このような事態

に直面せる複占者にとつて競争者の戰略に關して考えられることは、競争者は自己の利潤獲得に不利なようにその戰略を選擇するということであろう。このことは利潤の奪い合いの場たる複占市場の特質を示すであろう（以下においては兩複占者が協同して一つの單純獨占を結ぶ可能性を排除する）[1]。こゝで二つのケースを考える。

第一は、1は2が $\tau_2$ を選擇する前に $\tau_1$ を選び、次に2が $\tau_1$ の値を知つた後に $\tau_2$ を選ぶと考えられる（1の予想において）ケースである。これを1にとつての minorant case とよぶ。

第二のケースは、1が $\tau_1$ を選擇する前に2が $\tau_2$ を選ぶことを予想し（從つて1の利潤を極小にするように $\tau_2$ が選ばれたと予想し）、この予測的 $\tau_2$ の値の下で1が $\tau_1$ を選擇するという場合である。この場合には1は minorant case よりも明かに有利である。これを1にとつての majorant case とよぶことにする[2]。

2についてもその minorant case とその majorant case を1の場合と同樣に考えることができる。たゞこゝで注意すべきことは、吾々の取扱つている問題がゲーム理論のタームでいえば非零和二人ゲームであるため、右の minorant case および majorant case はそれぞれの主體にとつての予測的行動であるということである。すなわち複占問題において自己の利潤極大を計ることは、その裏として相手の利潤の極小を計ることではない。たゞ各複占者が相手の出方を予測するに當つて、恰も相手が自己の利潤をできるだけ小ならしめようと行動していると考えて自己の行動を決定しようとするのが合理的であるというにすぎない。そこでこのことを明確に示すために各複占者の利潤函數中にある相手の戰略をそれぞれ $\tau_1^e$ あるいは $\tau_2^e$ とし、自己のそれは $\tau_1^a$ あるいは $\tau_2^a$ で示そう。このとき $\underset{\tau_1^a}{\mathrm{Max}}\,\underset{\tau_2^e}{\mathrm{Min}}\,\pi_1(\tau_1^a, \tau_2^e)$, $\underset{\tau_1^a}{\mathrm{Min}}\,\underset{\tau_2^e}{\mathrm{Max}}\,\pi(\tau_1^a, \tau_2^e)$, $\underset{\tau_2^a}{\mathrm{Max}}\,\underset{\tau_1^e}{\mathrm{Min}}\,\pi_2(\tau_1^e, \tau_2^a)$, $\underset{\tau_1^e}{\mathrm{Min}}\,\underset{\tau_2^a}{\mathrm{Max}}\,\pi_2(\tau_1^e, \tau_2^a)$ が存在するならば、右の二つのケ

ースにおける各複占者の予想利潤は次のようになる。

まず minorant case においては

$$\pi_{i1} \equiv \underset{\tau_i^a}{\mathrm{Max}}\ \underset{\tau_j^e}{\mathrm{Min}}\ \pi_i(\tau_i^a, \tau_j^e) \qquad i, j=1, 2\ ;\ i \neq j \tag{1.6}$$

また majorant case においては

$$\pi_{i2} \equiv \underset{\tau_j^e}{\mathrm{Min}}\ \underset{\tau_i^a}{\mathrm{Max}}\ \pi_i(\tau_i^a, \tau_j^e) \qquad i, j=1, 2\ ;\ i \neq j \tag{1.7}$$

さて一般的について次の定理が成立することはよく知られている。

**〔定理・1〕** 函數 $\phi(x, y)$ が $x \varepsilon X$, $y \varepsilon Y$ で定義され、その定義領域において $\underset{x}{\mathrm{Max}}\ \underset{y}{\mathrm{Min}}\ \phi(x, y)$ および $\underset{y}{\mathrm{Min}}\ \underset{x}{\mathrm{Max}}\ \phi(x, y)$ が存在するならば

$$\underset{x}{\mathrm{Max}}\ \underset{y}{\mathrm{Min}}\ \phi(x, y) \leqq \underset{y}{\mathrm{Min}}\ \underset{x}{\mathrm{Max}}\ \phi(x, y) \tag{1.8}$$

**〔證明〕** 略

したがつて $\pi_{i1}$、$\pi_{i2}$ が存在するならば

$$\pi_{i1} \leqq \pi_{i2} \qquad i=1, 2 \tag{1.9}$$

これは minorant case と majorant case の關係を rigorous に示すものに外ならず、$i$ にとつての予想利潤の下限と上限を與える。従つて $i$ がある戰略を選ぶ場合、彼の予想利潤は (1.9) によつて與えられる下限と上限の間に落るであろう。もし (1.9) において等式のみが成立するならば、$i$ の選ぶべき戰略の集合は一意的に決定されると考えてよかろう。その場合においてももちろん必ずしも $\pi_i(\tau_i^a, \tau_j^e) = \pi_i(\tau_i^a, \tau_j^a)(i; j=1, 2\ ;\ i \neq j)$ は成立せず、そのこ

とは後にみるように吾々を動學的考察へと導く。しかしそのような問題に入る前に、吾々の問題がいはゞ二つの零和二人ゲームとして構成されているために次に吾々の問題に關連ある零和二人ゲームを一般的な形で考えておこう。

(1) 兩複占者が協同する場合には、結托の問題として非零和二人ゲームの理論を用いて分析することができよう。このような問題については〔11〕の四八—五六頁における關恒義氏の數學註をみよ。

(2) 〔1〕における minorant game と majorant game の考え方に從うが、たゞこゝではそれらが予想上のものである點に注意せねばならない。

## 2.

吾々の問題とする複占市場は、供給量$\tau_1$、$\tau_2$がある區間の實數の集合となる場合であり、從つて戰略の集合が連續の濃度を有する場合である。このような場合についてワルトは零和二人ゲームを分析し、かゝる無限集合の上で定義された mixed strategy—確率測度—においてゲームが strictly determined であることを示した。[2] またボーネンブラスト、カーリンおよびシャープレーは利得函數が連續凸函數なる場合について一般的に考察し、[7] マッキンゼーはその特殊な場合についての考察をなしているが、[3] 吾々は當面必要とする定理の證明を以下で獨自に與えることとする。紙面の制約のためゲーム理論でのタームは一應既知のものとして考察を進める。

まず一般的な利得函數$K(a,b)$が與えられているものとする。この函數は變數$a$、$b$に關する有界實函數であると假定する。問題とする零和二人ゲームにおいてプレーヤー1の戰略は$a$であり、プレーヤー2の戰略は$b$であるとす

る（以下この節に關する限り1、2で、それぞれプレーヤー1およびプレーヤー2を示す）。$A$および$B$をそれぞれ$a$の集合、および$b$の集合（函數$K$の定義領域）としそれらは連續の濃度を有するものとする。$A$（$B$）は1（2）の純粋戰略（ピュア・ストラテジー）の集合である。

そこで混合戰略（ミクスト・ストラテジー）を定義する。1（2）が$A$（$B$）のある元$a$（$b$）の選ぶ代りに、$A$（$B$）の部分集合からなるボレル集合體$\mathfrak{A}$（$\mathfrak{B}$）に對して定義された確率測度$\xi$（$\eta$）を選ぶ場合、この$\xi$（$\eta$）を1（2）の混合戰略とよぶ。この場合1の利得の期望値は

$$(2.1)\qquad K^*(\xi,\eta)=\int_B\int_A K(a,b)d\xi d\eta$$

で與えられる。$K(a,b)$の値は$\xi_a$、$\eta_b$をそれぞれ$a$および$b$に確率1を與える確率測度とすると$K^*(\xi_a,\eta_b)$に外ならない。從つて以下$K^*(\xi,\eta)$の代りに$K(\xi,\eta)$なる表現を用い、また$K(\xi_a,\eta_b)$を$K(a,b)$と同義的に用いる。

ボレル集合體$\mathfrak{A}$、$\mathfrak{B}$を定義するために、$A$および$B$に次の如くして距離を導入する。$A$の二元$a_1$および$a_2$の距離は次式によつて與えられる。

$$(2.2)\qquad \delta(a_1,a_2)=\operatorname*{Sup}_b|K(a_1,b)-K(a_2,b)|$$

同様にして$B$の二元$b_1$と$b_2$の距離は

$$(2.3)\qquad \delta(b_1,b_2)=\operatorname*{Sup}_a|K(a,b_1)-K(a,b_2)|$$

によつて定義される（$A$および$B$において、それぞれの相異る二元の間の距離は正であると假定する。(2.2),(2.3)の關係が對稱性および三角關係を満足することは明かである）。

距離(2.2), (2.3) の意味における $A$ ($B$) のすべての開部分集合を元とする $A$ ($B$) の部分集合からなる最小のボレル集合體 $\mathfrak{A}_1$ ($\mathfrak{B}_1$) が以下問題とされる。そこで $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}_1$, $\mathfrak{B}=\mathfrak{B}_1$ とする。

また $C$ を $A$ と $B$ のカルテシャン積とし、$\mathfrak{C}$ を $\mathfrak{A}$ の任意の元と $\mathfrak{B}$ の任意の元のカルテシャン積を含む $C$ の部分集合からなる最小のボレル集合體とし、$K(a, b)$ が $\mathfrak{C}$ 可測なるゲームを取扱う。

こゝで次の定義を與えておく。

**〔定義・1〕** $A$ の元の系列 $\{a_n\}$ ($n=1, 2\cdots\cdots$) がもし $b$ において一様に

$$(2.4)\qquad \lim_{n\to\infty} K(a_n, b)=K(a, b)$$

であるならば、その系列は $A$ の元 $a$ へ收斂するという。

同様に $B$ の元の系列についてもその收斂を定義する。

**〔定義・2〕** ある集合 $E$ はその元の任意の系列 $\{e_n\}$ が收斂部分系列（すなわち $E$ の元へ收斂する部分系列）を有するならば、その集合 $E$ はコンパクトであるという。

そこでまずワルトの定理をかゝげておく。[6]

**〔定理・2〕** $A$ と $B$ がコンパクトであるならば、1に對する混合戰略 $\xi^0$、および2に對する混合戰略 $\eta^0$ が存在して、これらの戰略に對し

$$(2\cdot 5)\qquad K(\xi^0, \eta^0)=\operatorname*{Max}_{\xi}\ \operatorname*{Min}_{\eta}\ K(\xi, \eta)=\operatorname*{Min}_{\eta}\ \operatorname*{Max}_{\xi}\ K(\xi, \eta)$$

**〔證明〕** 略。

このワルトの定理を用いて次の定理をうる。

〔**定理・3**〕(i) $A$ および $B$ が凸コンパクト集合であり、(ii) $K$ は各 $b$ に對し $a$ に關して凹函數であり、かつ (iii) $K$ は各 $a$ に對し $b$ に關して凸函數であるならば、1に對する最適純粋戰略（オプティマル・ピュア・ストラテジー）$a^0$、および2に對する最適純粋戰略 $b^0$ が存在して、

$$K(a^0, b^0)=\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\,K(a,b) \tag{2.6}$$

〔**證明**〕まず $A$ と $B$ がコンパクトなることにより $\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)$ および $\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b)$ [6] が存在し、また $\underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ \underset{\eta}{\mathrm{Min}}\ K(\xi,\eta)$ および $\underset{\eta}{\mathrm{Min}}\ \underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ K(\xi,\eta)$ が存在する。

さて $A$ はコンパクトであるから、ボレルの被覆定理により有限個の開集合 $A_1\cdots\cdots A_k$ によつて被覆される。このとき任意の正數 $\varepsilon$ に對し、この開集合族の濃度 $k$ が定まつて $A_i$ $(i=1,2,\cdots,k)$ の徑が $\varepsilon$ を超えないようにすることができる。また $A_i$ は互に素なるよう選ぶことができるから、このように選んだとする。$ai$ を $Ai$ の一定點とし $\alpha$ で $A$ の有限部分集合 $\{a_1,\cdots\cdots,a_k\}$ を示すことにする。$A$ の上におけるある確率測度 $\xi$ に對し、確率測度 $\xi_\alpha$ を次のように定義する。すなわち $\xi_\alpha(a_i)=\bar{\xi}(A_i)$. $(i=1,\cdots\cdots,k)$。このときすべての $\eta$ に對して

$$|K(\bar{\xi},\eta)-K(\bar{\xi}_\alpha,\eta)|\leqq\varepsilon \tag{2.7}$$

したがつて

$$\underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ \underset{\eta}{\mathrm{Min}}\ K(\xi,\eta)-\varepsilon\leqq\underset{\xi_\alpha}{\mathrm{Max}}\ \underset{\eta}{\mathrm{Min}}\ K(\xi_\alpha,\eta) \tag{2.8}$$

をうる。もちろん $\xi^\alpha$ は $\xi_\alpha(\alpha)=1$ なる確率測度である。ところで

$$(2.9)\qquad \underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ \underset{\eta}{\mathrm{Min}} K(\xi,\eta)=\underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(\xi,b)$$

であるから

$$(2.10)\qquad \underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(\xi,b)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(\xi^*,b)=K(\xi^*,b^*)$$

と$\xi^*_0$および$b^*$を定めれば、(2.8) より

$$(2.11)\qquad K(\xi^*,b^*)-\varepsilon\leqq\underset{\xi_\alpha}{\mathrm{Max}}\ \underset{\eta}{\mathrm{Min}} K(\xi_\alpha,\eta)$$

こゝで、$\xi_\alpha'$および$b'$を

$$(2.12)\qquad \underset{\xi_\alpha}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(\xi_\alpha,b)=\mathrm{Min}\ K(\xi_\alpha',b)=K(\xi_\alpha',b')$$

と定義すれば、$B$の任意の元$b''$に對して明かに次の式が成立する。

$$(2.13)\qquad K(\xi_\alpha',b')\leqq K(\xi_\alpha',b'')$$

さて $\alpha=\bigcup_{i=1}^{k}a_i$ であり、$a_i$はもちろん互に素であるから

$$(2.14)\qquad \xi'_\alpha(\alpha)=\xi'_\alpha\left(\bigcup_{i=1}^{k}a_i\right)=\sum_{i=1}^{k}\xi_\alpha'(a_i)=1$$

であつてこのとき

$$(2.15)\qquad K(\xi_\alpha',b'')=\sum_{i=1}^{k}K(a_i,b'')\xi_\alpha'(a_i)$$

もちろん $\xi_\alpha'(a_i)\geqq0$ であるから假定(ii)により

$$(2.16)\qquad \sum_{i=1}^{k}K(a_i,b'')\xi_\alpha'(a_i)\leqq K\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_\alpha'(a_i)\cdot a_i,b''\right)$$

$A$は凸集合なる故確かに $\sum_{i=1}^{k}\xi_\alpha'(a_i)\cdot a_i$ は$A$の元である。次に$b''$は$B$の任意の元であつたから、

(2.17)　$K\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_{\alpha}'(a_i)\cdot a_i,\ b''\right)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ K\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_{\alpha}'(a_i)\cdot a_i,\ b\right)$

なるように$b''$を定めることができる。いまこのように$b''$を定めたとする。このとき（2・11）—（2.17）より

(2.18)　$\underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ \underset{\eta}{\mathrm{Min}}\ K(\xi,\eta)-\varepsilon=K(\xi^*,b^*)-\varepsilon\leqq\underset{b}{\mathrm{Min}}\ K\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_{\alpha}'(a_i)\cdot a_i,\ b\right)$

しかるに

(2.19)　$\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)\leqq\underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ \underset{\eta}{\mathrm{Min}}\ K(\xi,\eta)$

であるから、從つて

(2.20)　$\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)-\varepsilon\leqq\underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ \underset{\eta}{\mathrm{Min}}\ K(\xi,\eta)-\varepsilon\leqq\underset{b}{\mathrm{Min}}\ K\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_{\alpha}'(a_i)\cdot a_i,\ b\right)$

ところで明かに

(2.21)　$\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)\geqq\underset{b}{\mathrm{Min}}\ K\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_{\alpha}'(a_i)\cdot a_i,\ b\right)$

が成立する。故に（2.20）と（2.21）により

(2.22)　$\underset{b}{\mathrm{Min}}\ K\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_{\alpha}'(a_i)\cdot a_i,\ b\right)\leqq\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)\leqq\underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ \underset{\eta}{\mathrm{Min}}\ K(\xi,\eta)\leqq\underset{b}{\mathrm{Min}}\ K\left(\sum_{i=1}^{k}\xi_{\alpha}'(a_i)\cdot a_i,\ b\right)+\varepsilon)$

$\varepsilon$は限りなく小さく選ぶことができるから

(2.23)　$\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)=\underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ \underset{\eta}{\mathrm{Min}}\ K(\xi,\eta)$

同樣にして

(2.24)　$\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b)=\underset{\eta}{\mathrm{Min}}\ \underset{\xi}{\mathrm{Max}}\ K(\xi,\eta)$

〔定理・2〕を用いれば

$$\text{(2.25)} \qquad \underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b)$$

$\underset{b}{\mathrm{Min}}(a^\circ,b)=\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)$, $\underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b^\circ)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b)$ と$a^0$および$b^0$を定めれば

$$\text{(2.26)} \qquad \underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b)=\underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b^\circ)\geqq K(a^0,b^0)\geqq \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a^0,b)=\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)$$

故に

$$\text{(2.27)} \qquad K(a^0,b^0)=\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b) \qquad \text{(Q・E・D)}$$

容易に證明されるようにベクトル $(a^0,b^0)$ は鞍點（サドル・ポイント）である。

**〔系・3・1〕**〔定理・3〕における１および２のそれぞれの最適純粹戰略は凸集合である。

**〔證明〕** １の最適純粹戰略の集合が凸集合なることを示せば足りる。１の最適純粹戰略がたゞ一つの場合には、もちろん系は成立する。故に１の最適純粹戰略集合に少くとも相異る二元があるとする。いまこの相異る最適純粹戰略を$a_1$および$a_2$とする。このとき

$$\text{(2.28)} \qquad \underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b)=K(a_1,b^0)=K(a_2,b^0)$$

$A$は凸集合であるから $\lambda_1,\lambda_2\geqq 0$, $\lambda_1+\lambda_2=1$ なる $\lambda_1$, $\lambda_2$ に對して $\lambda_1a_1+\lambda_2a_2$（$\equiv \bar{a}$ とおく）は確かに$A$に屬し、他方$K$が各$b$に對し$a$に關して凹なることにより

$$\text{(2.29)} \qquad \underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)=\lambda_1K(a_1,b^0)+\lambda_2K(a_2,b_0)\leqq K(\bar{a},b^0)$$

しかるに

$$\text{(2.30)} \qquad \underset{a}{\mathrm{Min}}\ \underset{b}{\mathrm{Max}}\ K(a,b)=\underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b^0)\geqq K(\bar{a},b^0)$$

故に

$$(2.31)\quad \underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b)=K(\bar{a},b^0)$$

従つて$\bar{a}$は1の最適純粋戰略である。

(Q・E・D)

〔**系・3・2**〕 (i) $A$および$B$は凸コンパクト集合であり、(ii) $K$は各$b$に對し$a$に關して嚴密に凹であり、かつ(iii) $K$は各$a$に對し$b$に關して凸であるならば、1の最適純粋戰略は一意的に決定される。

〔**證明**〕 1の最適純粋戰略の集合$E_1$に相異る二元$a_1$、$a_2$が存在すると假定する。このとき假定(ii)により

$$(2.32)\quad \underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a,b)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b)=K(a_1,b^0)=K(a_2,b^0)<K(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,b^0)$$

しかるに

$$(2.33)\quad \underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b)=\underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a,b^0)\geqq K(\lambda_1a_1+\lambda_2a_2,b_0)$$

これは(2.32)と矛盾する。故に$E_1$はたゞ一つの元からなる。

(Q・E・D)

同様にして次の系がえられる。

〔**系・3・3**〕 (i) $A$および$B$はそれぞれ凸コンパクト集合であり、(ii) $K$は各$b$に對し$a$に關して凹であり、かつ(iii) $K$は各$a$に對し$b$に關して嚴密に凸であるならば、2の最適純粋戰略は一意的に決定される。

こゝで次の補助定理を證明しておく。

〔**補助定理・4**〕 一次元ユークリッド空間の有界閉區間 $x_1\leqq x\leqq x_2$, $y_1\leqq y\leqq y_2$ で定義された實函數 $\varphi(x,y)$ がその定義區間において各$y$に對し$x$に關して連續であり、かつ各$x$に對して$y$に關して連續であるならば、$x_1\leqq x\leqq x_2$,

$y_1 \leqq y \leqq y_2$ はそれぞれコンパクトである。

〔證明〕 $x$ に關して證明すれば足りる。定義區間をそれぞれ $X$ および $Y$ で示す。いま $X$ の任意の系列 $\{x_i\}$ $(i=1, 2, \cdots\cdots)$ を選びこの系列に $x_i$ の値の大小によつて順序關係を與え、その順序により改めて $\{x_i\}=\{x_1, x_2, \cdots\cdots\}$ とする $(x_1 < x_2 < \cdots\cdots)$。このとき $\{x_i\}$ は有界單調増大數列であるから、通常の意味において收斂し、かつ $X$ はユークリッド空間 $R_1$ における閉集合なる故その極限値は $X$ に屬す。すなわち

(2.34) $\lim\limits_{i\to\infty} x_i = x_i, \quad x^0 \varepsilon X$

さて $\Phi$ は $Y$ の任意の元 $y'$ に對し $X$ に關する連續函數であるから、任意の正數 $\varepsilon$ が與えられるならばこれに對應して正なる $\delta$ を適當に選び

(2.35) $|x_i - x^0| < \delta$ なるとき $|\Phi(x_i, y') - \Phi(x^0, y')| < \varepsilon$

$\varepsilon$ は限りなく小く選ぶことができるから

(2.36) $\lim\limits_{i\to\infty} \Phi(x_i, y') = \Phi(x^0, y'), \quad x^0 \varepsilon X$

すなわち $X$ はコンパクトである。 (Q・E・D)

〔定理・5〕 $K$ が一次元ユークリッド空間における有界閉區間 $a_1 \leqq a \leqq a_2$, $b_1 \leqq b \leqq b_2$ で定義されているとする。このとき(i) $K$ はその定義領域において各 $b$ に對し $a$ に關して連續であり、かつ各 $a$ に對し $b$ に關して連續である、(ii) $K$ は各 $b$ に對し $a$ に關して凹である、(iii) $K$ は各 $a$ に對し $b$ に關して凸であるならば、1の最適純粹戰略 $a^0$、および2の最適純粹戰略 $b^0$ が存在して、これらの戰略に對して

(2.37)　$K(a^0, b^0)=\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a, b)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a, b)$

〔證明〕

(1)まずワイヤストラスの定理により、ある函數$f(p)$がユークリッド空間$R_n$における有界閉集合$E$の上で連續であるならば$f(p)$は$E$の上で有界であるから、[9] $K$は$a$および$b$に關して有界である。

(2)次に一次元ユークリッド空間の閉區間$a_1 \leqq a \leqq a_2$および$b_1 \leqq b \leqq b_2$に（2.2）および（2.3）の意味における距離を導入し、かくしてえられる距離空間を$A$および$B$とする。このとき明かに$K$は各$b$に對し距離空間$A$において連續であり、また各$a$に對し距離空間$B$において連續である。故に$-\infty < d < +\infty$なる任意の實數$d$に對して集合$G=\{(a, b); K(a, b)>d\}$は開集合となる。從つて$A$のすべての開集合を含む最小のボレル集合體$\mathfrak{A}$の任意の元と$B$の開集合を含む最小のボレル集合體$\mathfrak{B}$の任意の元とのカルテシヤン積を含む$A \times B$の部分集合からなる最小のボレル集合體$\mathfrak{C}$に$G$は屬する。すなわち$K$は$\mathfrak{C}$可測である。

(3)さらに〔補助定理・4〕により$A$と$B$はそれぞれコンパクトである。

(4)またもちろん$A$と$B$はそれぞれ凸集合。

故に右の(1)・(2)・(3)・(4)と定理の假定(ii)・(iii)を考慮すれば〔定理・3〕が適用されるから、1の最適純粹戰略$a^0$および2の最適純粹戰略$b_0$が存在し

(2.38)　$K(a^0, b^0)=\underset{a}{\mathrm{Max}}\ \underset{b}{\mathrm{Min}}\ K(a, b)=\underset{b}{\mathrm{Min}}\ \underset{a}{\mathrm{Max}}\ K(a, b)$　(Q・E・D)

この〔定理・5〕よりその系として〔系・3・1〕、〔系・3・2〕、〔系・3・3〕と同樣な結果をうる。これらを

それぞれ〔系・5・1〕、〔系・5・2〕、〔系・5・3〕としておく。

〔**系・5・4**〕 $K$が〔系・5・3〕の條件を滿し、かつ$K$が各$a$に對し$b$に關して單調減少函數であるならば、2の最適純粹戰略$b^0$は$b_2$（$b_2$は$b_1 \leqq b \leqq b_2$の$b_2$）に等しい。

〔**證明**〕 略。

## 3.

以上の結果をもつて吾々の複占市場に立返える。まず複占者$i$（$i=1,2$）が相手の戰略に關する予想區間（もちろん有界と考える）を$\tau_{j1}^e \leqq \tau_j^e \leqq \tau_{j2}^e$と定め、かつ自己の戰略區間を$\tau_{i1}^a \leqq \tau_i^a \leqq \tau_{i2}^a$と定めたとき、〔假定・1〕、〔假定・2〕および〔假定・4〕がその利潤函數に與えられるならば、〔定理・5〕により

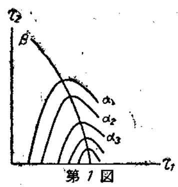
$$(3.1)\qquad \pi_i(\bar{\tau}_i^a, \bar{\tau}_j^e) = \underset{\tau_i^a}{\mathrm{Max}}\ \underset{\tau_j^e}{\mathrm{Min}}\ \pi_i(\tau_i^a, \tau_j^e) = \underset{\tau_j^e}{\mathrm{Min}}\ \underset{\tau_i^a}{\mathrm{Max}}\ \pi_i(\tau_i^a, \tau_j^e),\quad i, j=1, 2;\ i \neq j$$

が成立して各複占者のミニ・マックス戰略の集合$\{\bar{\tau}_i^a\}$が定まる。もちろんこのとき一般的には$\{\bar{\tau}_i^a\} \neq \{\bar{\tau}_i^e\}$（$i=1, 2$）であるから、吾々はこの集合を最適戰略集合とはよばず、これをミニ・マックス戰略集合とよぶことにする。

次に各複占者について〔假定・1〕を〔假定・1′〕でおきかえると、〔系・5・2〕によつて各複占者のミニ・マックス戰略は一意的に決定される。また〔假定・2〕を〔假定・2′〕でおきかえれば、〔系・5・3〕により各複占者の相手の戰略に關する予測は一意的に定まり、このとき〔假定・3〕を附加すればその予測された相手の戰略は〔系・5・4〕により$\tau_{j2}^e$と一致している。

問題をより具體的に考えるため以下〔假定・1′〕、〔假定・2′〕、〔假定・3〕および〔假定・4〕をおく。

まず各複占者の利潤表を考える。1の利潤は$\tau_1$、$\tau_2$に對して定まるのでベクトル$(\tau_1, \tau_2)$に對する$\pi_1$の値を$\tau_1$―$\tau_2$平面に投影すれば第1圖の如き等利潤曲線がえられるであろう。この圖において$\alpha_1$、$\alpha_2$、……$(\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots\cdots)$は等利潤$\alpha_i$を與えるベクトル$(\tau_1, \tau_2)$の軌跡であり、曲線$\beta$は各等利潤曲線において$\tau_2$が最も大なる値をとる點の軌跡（1の反作用曲線）である。等利潤曲線群が第1圖のような形をとるということは次のような理由にもとづく。すなわち1の利潤は需要函數が單調減少であるため、$\tau_1$を一定にして$\tau_2$を増加させれば明かに減少する。故に$\alpha_1 < \alpha_2 < \cdots\cdots$。また$\tau_2$を不變として$\tau_1$のみを増加すれば、ある點を超えると價格の下落とともに費用が増加するので$\pi_1$は$\tau_1$の増加によつて却つて減少する。そこで第1圖の如き等利潤曲線群がえられる。2についても同様である（その反作用曲線を$\overline{\beta}$とする）。



第1図

さて1と2の等利潤曲線群を重ね合せると吾々はどのような狀態をうるであろうか。このことを檢討するために、いま各複占者の利潤函數が微分可能であるとし、さらに各複占者の限界費用函數は單調増加函數（狹義）であると假定する。このとき各複占者が相手の戰略を所與として、各自の利潤を極大にしようとすれば、利潤極大なるためには

$$D+\tau_i D' - K_i' = 0 \qquad i=1,2 \tag{3.2}$$

でなければならない。こゝで$\tau_i$を限りなく0に近づければ、このとき近似的に

$$D(\tau_j) = K_i'(0) \qquad i,j=1,2;\ i \neq j \tag{3.3}$$

(3.4) $$D(\tau_j)+\tau_j D'(\tau_j)=K_j'(\tau_j) \qquad j=1,2$$

但し$K_i$は $0\leqq\tau_i$ で定義され，端點0においては微係數が存在せざるため $K_i'(0)$ は $\tau_i$を限りなく0に近づけたときの右側よりの微係數を示すものとする。さて(3.3)(3.4)を解いてえられる$\tau_j$をそれぞれ$\tau_j^0$および$\tau_j^*$とする。これらの値はすべて正であると考えることができよう。ところで $K_i'(\tau_i)$ の單調増大性により $K_i'(0)<K_i'(\tau_i^*)$ である從つて次の式が成立する。

(3.5) $$D(\tau_j^0)<D(\tau_i^*)+\tau_i^* D'(\tau_i^*), \qquad i,j=1,2\,;\ i\neq j$$

このとき $\tau_2^0<\tau_2^*$ であるならば，$D(\tau_2^0)>D(\tau_2^*)$ であり，もちろん $D(\tau_i)>D(\tau_i)+\tau_i D'(\tau_i)$, $(i=1,2)$ であるから，

(3.6) $$D(\tau_1^0)<D(\tau_2^*)<D(\tau_2^0)<D(\tau_1^*)$$

をうる。すなわち

(3.7) $$\tau_1^0>\tau_2^*>\tau_2^0>\tau_1^*$$

となつて $\tau_1^0>\tau_1^*$ である。

次に $\tau_1^*>\tau_1^0$ であるならば，同様にして

(3.8) $$\tau_2^0>\tau_1^*>\tau_1^0>\tau_2^*$$

となつて $\tau_2^0>\tau_2^*$ をうる。

$\tau_2^0>\tau_2^*$ である場合には，$\tau_1^0>\tau_1^*$ or $\tau_1^*>\tau_1^0$ or $\tau_1^*=\tau_1^0$ のいずれかゞ成立する。同様に $\tau_1^0>\tau_1^*$ なる場合に

は、$\tau_2^0 > \tau_2^*$ or $\tau_2^* > \tau_2^0$ or $\tau_2^* = \tau_2^0$ のいずれかゞ成立する。

さらに $\tau_2^* = \tau_2^0$ なる場合には

(3.9)　$D(\tau_1^0) < D(\tau_2^*) = D(\tau_2^0) < D(\tau_1^*)$

となるから $\tau_1^0 > \tau_1^*$ となる。同様に $\tau_1^* = \tau_1^0$ なるときには $\tau_2^0 > \tau_2^*$ となる。

そこで $\tau_2^0$、$\tau_2^*$ の大小關係と $\tau_1^0$、$\tau_1^*$ の大小關係との間に成立つ關係は次の三つのケースにすべて含まれる。

ケース：1　(i)　$\tau_2^* > \tau_2^0$ ならば $\tau_1^0 > \tau_1^*$

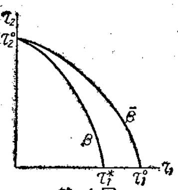
(ii)　$\tau_1^* > \tau_1^0$ ならば $\tau_2^0 > \tau_2^*$

ケース：2　(iii)　$\tau_2^0 > \tau_2^*$ ならば (a) $\tau_1^0 > \tau_1^*$ or (b) $\tau_1^* > \tau_1^0$ or (c) $\tau_1^* = \tau_1^0$

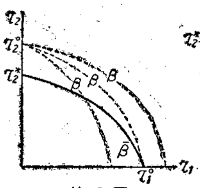
(iv)　$\tau_1^0 > \tau_1^*$ ならば (a′) $\tau_2^0 > \tau_2^*$ or (b′) $\tau_2^* > \tau_2^0$ or (c′) $\tau_2^0 = \tau_2^*$

ケース：3　(v)　$\tau_2^* = \tau_2^0$ ならば $\tau_1^0 > \tau_1^*$

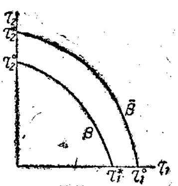
(vi)　$\tau_1^* = \tau_1^0$ ならば $\tau_2^0 > \tau_2^*$



第 4 図



第 3 図

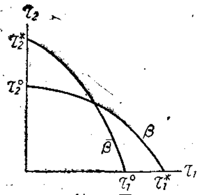


第 2 図

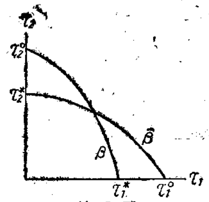
これら三つのケースを圖に示せば上の諸圖となる。これらの諸圖は(i)、(iii)、(v)を示したものであるが、(ii)、(iv)、(vi)も同様なものとなる。

さてケース・1は一方の複占者が壓倒的に優れた費用函數を有する場合であり、かゝる状態の下では一方の複占者がその競争者に破れ複占状態そのものが失われると考えられる。従つてこのケースは吾々の考察から排除される。ま

たケース・3においてもケース・1の場合と同様なことがいえる。故にこれを排除する。そこで残るのはケース・2であるが、そのうち(b)および(b′)はケース・1と同様であり、また(c)および(c′)はケース・3と同様である。そこでこれらも複占市場の特質を失うものとして排除され、複占市場における複占者の等利潤曲線群を特徴づけるものとして残



第 6 図



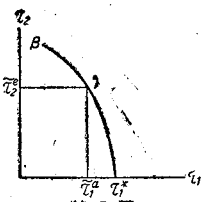
第 5 図

るのはケース・2の(a)と(a′)であつて、それらは第5圖で示される。こゝで注意すべきことは、第6圖で示されるような $\tau_2^*>\tau_2^0$, *and* $\tau_1^*>\tau_1^0$ というケースは以上の三つのケースのいずれにも含まれないということである。古典的なクールノーの場合は第5圖のそれであり、彼は生産に費用を要しないという假定の下に、第5圖のケースが生じ、第6圖のケースが生じえないことを明快に證明した。(1) 吾々は生産に費用を要するというより一般的な想定の下にクールノーと同じ結論をえたのである。

そこで問題は以上の如き等利潤曲線群の下で、各複占者のミニ・マックス戦略はいかになるかということである。

まず複占者$i$は相手$j$は高々$\bar{\tau}_j^e$までしか供給を行わないであろうという相手の戦略に關する予測限界を設定するであろう。このとき$i$の相手の戦略に關する予測區間は $0\leqq\tau_j^e\leqq\bar{\tau}_j^e$ で與えられる。他方$i$は自己のとる戦略の範圍を次のように定めるであろう。すなわち第5圖で明かなように、$i$は相手がどのような戦略を選ぼうとも利潤極大のためには彼は高々$\tau_i^*$の供給をなすにすぎないと考えられる。從つて$i$の選ぶべき戦略區間は $0\leqq\tau_i^e\leqq\tau_i^*$ によつて與えられる。いま1を例にとり、$\bar{\tau}_2^e$が第7圖のように設定されたとすれば、この場合各$\tau_2^e$に對

する $\underset{\tau_1^a}{\mathrm{Max}}(\tau_1^a, \tau_2^e)$ は$\beta$曲線中の$\tau_1^*$から$\gamma$までの部分によつて與えられる。上述の等利潤曲線群の性質により上方の等利潤曲線ほどより小なる利潤を與えるから、$\underset{\tau_2^e}{\mathrm{Min}}\ \underset{\tau_1^a}{\mathrm{Max}}\ \pi_1(\tau_1^a, \tau_2^e)$ は$\gamma$において定まるであろう。他方各$\tau_1^a$に對して $\underset{\tau_2^e}{\mathrm{Min}}\ \pi_1(\tau_1^a, \tau_2^e)$ を考えるに、これは等利潤曲線群の性質から明かであるように常に $\tau_2^e = \tilde{\tau}_2^e$ で與えられる。そこで $\underset{\tau_1^a}{\mathrm{Max}}\underset{\tau_2^e}{\mathrm{Min}}\ \pi_1(\tau_1^a, \tau_2^e)$ は$\tilde{\tau}_2^e$が與えられた場合の$\pi_1$の$\tau_1^a$に關する極大點、すなわち$\tilde{\tau}_1^a$によつて與えられる。從つて$\gamma$において



第7図

$$(3.10)\quad \underset{\tau_1^a}{\mathrm{Max}}\ \underset{\tau_2^e}{\mathrm{Min}}\ \pi_1(\tau_1^a, \tau_2^e) = \underset{\tau_2^e}{\mathrm{Min}}\ \underset{\tau_1^a}{\mathrm{Max}}\ \pi_1(\tau_1^a, \tau_2^e)$$

となり、1のミニ・マックス戰略は$\tilde{\tau}_1^a$となる。

2についても彼の1の戰略に關する予測限界を$\tilde{\tau}_1^e$とすれば、同樣にしてそのミニ・マックス戰略$\tilde{\tau}_2^a$が定まる。上述のように一般的には $\tilde{\tau}_1^a \neq \tilde{\tau}_1^e$, $\tilde{\tau}_2^a \neq \tilde{\tau}_2^e$ であり、各複占者はその予想を裏切られる。從つて問題を時間的繼起において考えるならば、各複占者は相手の戰略區間についての予想を改めてその下でさらにミニ・マックス行動をとろうとするであろう。そこで次に問題を動學的に考察しなければならない。

(1) 〔8〕一一七—一一九頁をみよ。

## 4.

まず初めに相手の戰略に關する予測限界について次の假定をおく。

第3節の考察から明かなように、第5圖においてもし$i$の相手の戰略に關する予測限界が$\tau_j^0$より大ならば、$i$のミニ・マックス戰略は0の供給量となる。$\tau_j^0$が予測限界のときも$i$に0のミニ・マックス戰略を與えるから、$\tau_j^0$より大なる予測限界は何等有效でないと考えられる。そこで$i$の$j$の戰略に關する予測限界は高々$\tau_j^0$であると假定する。

さてこの假定の下に$i$の$j$の戰略に關する予測限界を與える動學模型とし、次のように考えることが reasonable であろう。すなわち$i$の$t$時點における予測限界を$\tau_j^e(t)$で示し、$t$時點において$j$が選擇する戰略（$j$のミニ・マックス戰略）を$\tau_j^a(t)$とするとき、$(t+1)$時點に對し$i$は予測限界として$\tau_j^e(t)$と$\tau_j^a(t)$との間のある中間値を想定すると考えることこれである。このとき中間値として$\tau_j^a(t)$を含めて考える方がより現實的である。換言すれば$\rho_{j1}\geqq 0$, $\rho_{j2}>0$, $\rho_{j1}+\rho_{j2}=1$なる$\rho_1$、$\rho_2$に對して

$$\tau_j^e(t+1)=\rho_{j1}\tau_j^e(t)+\rho_{j2}\tau_j^a(t) \qquad j=1,2 \tag{4.1}$$

と考える。$\rho_{j1}$、$\rho_{j2}$はより一般的には$t$の函數とすべきであろう。しかしまず單純化のために$\rho_{j1}$、$\rho_{j2}$はコンスタントであると假定して問題を考察し、次にそれらが$t$の函數である場合、ある條件を附してより一般的に考察する。

第三節の圖解的例示で明かなように、また〔系・5・4〕で rigorous に證明されたように、複占者$i$のミニ・マックス解において相手$j$の戰略に關する予測値は、初め設定した予測限界$\tau_j^e(t)$に一致する。そしてこのミニ・マックス解において與えられる$\tau_i^a(t)$は$\tau_j^e(t)$の函數となるから

$$\tau_i^a(t)=f_i[\tau_j^e(t)] \qquad i,j=1,2;\ i\neq j \tag{4.2}$$

と表わすことができる。この函數$f_1$は$\beta$曲線に外ならず、また$f_2$は$\beta$曲線に外ならない。

いま單純化のため $f_i$ が線型であるとする。

すなわち

(4.3) $\tau_i^a(t)=a_{i1}+a_{i2}\tau_j^e(t)$ $\quad i,j=1,2;\ i\neq j$

各複占者の予想が實現されるならば $\tau_i^a(t)=\tau_i^e(t)\equiv\tau_i(t)$ であつて（4.3）より

(4.4) $\tau_i(t)=\dfrac{a_{i1}+a_{i2}a_{j1}}{1-a_{12}a_{22}}$ $\quad i,j=1,2;\ i\neq j$

この $(\tau_1(t),\tau_2(t))$ は $\beta$ 曲線と $\bar{\beta}$ 曲線の交點であり、クールノーの複占均衡點に外ならない。そこで（4.4）で與えられる諸量は正である。また第5圖から明かなように（4.3）において $a_{i1}>0$, $a_{i2}<0$ $(i=1,2)$ と考えられる。

さて（4.4）で與えられる $\tau_i(t)$ が正であるためには二つのケースが考えられる。すなわち

ケース：$A$ $\quad a_{i1}+a_{i2}a_{j1}>0$, $(1-a_{12}a_{22}>0)$, $i,j=1,2;\ i\neq j$

ケース：$B$ $\quad a_{i1}+a_{i2}a_{j1}<0$, $(1-a_{12}a_{22}<0)$, $i,j=1,2;\ i\neq j$

（但し $1-a_{12}a_{22}\gtrless0$ は $a_{i1}$、$a_{i2}$ に對する假定を用いて、$a_{i1}+a_{i2}a_{j1}\gtrless0$, $(i,j=1,2;\ i\neq j)$ から導かれるから獨立な條件ではない。）そしてケース・$A$ は第5圖に對應する場合であり、ケース・$B$ は第6圖に對應する場合である。第6圖の場合が吾々の複占市場では起りえぬことは既に示した。故に吾々はケース・$A$ のみを問題とすればよい。

（4.1）に（4.3）を代入すれば

(4.5) $\tau_i^e(t+1)=\rho_{i2}a_{i1}+\rho_{i1}\tau_i^e(t)+\rho_{i2}a_{i2}\tau_j^e(t)$ $\quad i,j=1,2;\ i\neq j$

まず（4.5）の定常解 $\tau_i^e$ を求めると

$$(4.6)\qquad \tau_i^e=\frac{a_{i1}+a_{i2}\,a_{j1}}{1-a_{12}\,a_{22}},\ (\tau_i^e=\tau_i^a)\qquad i,j=1,2\,;\ i\neq j$$

となつて（4.4）の予想が實現される場合の解と一致する。

次に（4.5）において常數項を除いた聯立同次定差系を考えるに、初期の $\tau_i^e(0)$,（$i=1,2$）が與えられるとき

$$(4.7)\qquad \delta^2-(\rho_{11}+\rho_{21})\delta+\rho_{11}\rho_{21}-\rho_{12}\rho_{22}a_{12}a_{22}=0$$

を滿す $\delta$ がその解となる。解が動學的に安定であるためには $\rho_{i1}+\rho_{i2}=1\,(i=1,2)$ なることに注意してシューアの條件[4][12]

$$(4.8)\qquad \rho_{12}\rho_{22}(1-a_{12}a_{22})>0$$

$$(4.9)\qquad 1-\rho_{11}\rho_{21}+\rho_{12}\rho_{22}a_{12}a_{22}>0$$

$$(4.10)\qquad \rho_{12}\rho_{22}(1-a_{12}a_{22})+2(\rho_{11}+\rho_{21})>0$$

が滿足されねばならない。$\rho_{i2}>0$ であり、かつ上述のように $1-a_{12}a_{22}>0$ であるから（4.8）は成立する。このとき $\rho_{i1}\geqq 0$ であるからより一層强い理由により（4.10）は成立する。さらに（4.9）の成立することも明かであろう。從つて吾々の複占市場は動學的に安定であり

$$(4.11)\qquad \lim_{t\to\infty}\tau_i^e(t)=\frac{a_{i1}+a_{i2}a_{j1}}{1-a_{12}a_{22}}=\lim_{t\to\infty}\tau_i^a(t)\qquad i,j=1,2\,;\ i\neq j$$

となる。すなわちクールノーの復占均衡點に收斂する（この節で收斂というときには通常の意味でのそれであり、第2節で定義した收斂とは異る）。そしてこの點においては各複占者のミニ・マックス行動によつて想定された相手の戰略に關する予想は實現される。すなわち、

(4.12)　$$\underset{\tau_i^a(t)}{\mathrm{Max}}\ \underset{\tau_j^e(t)}{\mathrm{Min}}\ \pi_i(\tau_i^a(t),\tau_j^e(t))=\underset{\tau_j^e(t)}{\mathrm{Min}}\ \underset{\tau_i^a(t)}{\mathrm{Max}}\ \pi_i(\tau_i^a(t),\tau_j^e(t))\qquad i,j=1,2;\ i\neq j$$

であつて、かつ

(4.13)　$$\tau_i^a(t)=\tau_i^e(t)\qquad i=1,2$$

そして各複占者の相手の戦略に關する予測限界設定についての先きの動學模型によりこの點が到達されると、各複占者は利潤をより大ならしめようとして他の點へ動くことはない。從つてその點は吾々が先きに定義した意味における複占均衡點である。この點をミニ・マックス均衡點とよぼう。かくしてクールノーの複占均衡點はミニ・マクス均衡點に外ならない。

以上は$\rho_{i1}$、$\rho_{i2}$ $(i=1,2)$をコンスタントと假定した場合であるが、より現實的にこれらの値が時間の函數であるとする場合にはどのように考えられるであろうか。この場合は各複占者は$(t+1)$時點で相手の戦略に關して予測限界を設定しようとするとき、それを$t$時點の予測限界と$t$時點に實現された相手の戦略との中間値とはするが、その中間値を決定するpatternが各時點で必ずしも同一の形態ではない場合である。このとき(4.5)の動學體系は次の體系によつておきかえられる。

(4.14)　$$\begin{pmatrix}\tau_1^e(t+1)\\ \tau_2^e(t+1)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha_{11}\rho_{12}(t)\\ \alpha_{21}\rho_{22}(t)\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\rho_{11}(t) & \alpha_{12}\rho_{12}(t)\\ \alpha_{22}\rho_{22}(t) & \rho_{21}(t)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_1^e(t)\\ \tau_2^e(t)\end{pmatrix}$$

この體系において$\rho_{i1}(t)+\rho_{i2}(t)=1$, $(i=1,2)$なる條件を考慮すれば、その定常解は(4.6)で與えられるものと一致することが分かる。

次に（4.14）の非同次項を除いた同次定差系の解を直接求めてその安定性を検討する代りに、次のように考える。

すなわち初期條件を

(4.15) $\qquad \tau_i^e(0)=\tau_{i0}^e \qquad i=1,2$

と與えれば

(4.16) $$\begin{pmatrix}\tau_1^e(t)\\ \tau_2^e(t)\end{pmatrix}=\left(\prod_{\theta=0}^{t-1}\begin{pmatrix}\rho_{11}(\theta) & a_{22}\rho_{22}(\theta)\\ a_{12}\rho_{12}(\theta) & \rho_{21}(\theta)\end{pmatrix}\right)'\begin{pmatrix}\tau_{10}^e\\ \tau_{20}^e\end{pmatrix}$$

こゝに（4.16）右邊の行列の右肩につけたダッシュは轉置行列を示すための記號である。

そこで

(4.17) $$\lim_{t\to\infty}\left(\prod_{\theta=1}^{t}\begin{pmatrix}\rho_{11}(\theta) & a_{22}\rho_{22}(\theta)\\ a_{12}\rho_{12}(\theta) & \rho_{21}(\theta)\end{pmatrix}\right)'=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

となるならば、吾々の同次定差系の解が安定條件を滿していることになる。從つて原非同次定差系においても安定條件が滿足され、$t$ が限りなく大きくなるとき $\tau_i^e(t)$ は定常解に收斂することになろう。このことを考察するためにより一般的な次の定理を考える。

〔**定理・6**〕(1) $n\times n$ 行列 $A_\theta$（$\theta=1,2,\cdots\cdots$）において、

任意の $i$ 行について

(4.18) $$\operatorname*{Sup}_{\theta}\sum_{j=1}^{n}|a_{\theta ij}|<1 \qquad i=1,\cdots\cdots,n$$

が満足されるとき、行列の無限積 $\prod_{\theta=1}^{\infty} A_\theta$ は０行列へ絶對收斂する。

(2)　$n \times n$ 行列 $A_\theta$（$\theta=1, 2, \cdots\cdots$）の任意の $j$ 列について

(4.19)　$$\operatorname*{Sup}_{\theta} \sum_{i=1}^{n} |a_{\theta ij}| < 1 \qquad j=1, \cdots\cdots, n$$

が満足されるとき、行列の無限積 $\prod_{\theta=1}^{\infty} A_\theta$ は０行列へ絶對收斂する。[1]

〔證明〕 (1)を證明すれば(2)も同様にして證明されるから、(1)のみを證明すれば足りる。

まず $a_{\theta ij}(i, j=1, \cdots\cdots, n\,;\, \theta=1, 2, \cdots\cdots)$ がすべて正なる場合を考える。

(4.20)　$$\bar{A}_t \equiv \prod_{\theta=1}^{t} A_\theta \qquad t=1, 2, \cdots\cdots$$

とおき、かつ $\bar{A}_t$ の $(i, j)$ 分子を $\bar{a}_{tij}$ とすれば

(4.21)　$$\bar{a}_{tij} = \sum_{r_1}^{n} \cdots\cdots \sum_{r_{t-1}}^{n} a_{1ir_1} \cdots\cdots a_{tr_{t-1}j}, \qquad i, j=1, \cdots\cdots n$$

さて

(4.22)　$$\operatorname*{Max}_{i} \operatorname*{Sup}_{\theta} \sum_{j}^{n} a_{\theta ij} \equiv \alpha$$

とおけば、假定により $\alpha$ は１より小である。そしてこのとき明かに次の關係が成立する。

(4.23)　$$\alpha^t \geqq \sum_{r_1}^{n} a_{1ir_1} \sum_{r_2}^{n} a_{2r_1r_2} \cdots\cdots \sum_{j}^{n} a_{tr_{t-1}j} = \sum_{j}^{n} \bar{a}_{tij} \geqq \bar{a}_{tij} \qquad i=1, \cdots\cdots, n$$

$t$ が限りなく大となるとき、$\alpha^t$ は０へ收斂する。從つて（4.23）より $\bar{a}_{tij}$ もまた０へ收斂する。

故に

(4.24)　$$\lim_{t\to\infty} \prod_{\theta=1}^{t} A_\theta = [0]$$

次に行列 $A_\theta$（$\theta=1, 2, \cdots\cdots$）に負の組成分子もある場合を考える。このとき

$$(4.25)\qquad \sum_{j}^{n}\sum_{r_1}^{n}\cdots\cdots\sum_{r_{t-1}}^{n}|a_{1ir_1}|\cdots\cdots|a_{tr_{t-1}j}| \geqq \sum_{j}^{n}\Big|\sum_{r_1}^{n}\cdots\cdots\sum_{r_{t-1}}^{n} a_{1ir_1}\cdots\cdots a_{tr_{t-1}j}\Big| \qquad i=1, \cdots\cdots, n$$

である。（4.25）の左邊は $A_\theta$ の組成分子がすべて正である場合と同様にして０へ收斂する。從つて（4.25）右邊ももちろん０へ收斂する。

故に

$$(4.26)\qquad \lim_{t\to\infty}\prod_{\theta=1}^{t} A_\theta=[0]$$

$a_{\theta ij}(i, j=1, \cdots\cdots, n\,;\ \theta=1, 2, \cdots\cdots)$ に０があるときには、以上の命題はより一層强い理由で成立する。（Q・E・D）

さて吾々の問題に立返つて考察する。もし（4.16）において

$$(4.27)\qquad \operatorname*{Sup}_{\theta}(|\rho_{11}(\theta)|+|a_{22}\rho_{22}(\theta)|)<1$$

$$(4.28)\qquad \operatorname*{Sup}_{\theta}(|\rho_{21}(\theta)|+|a_{12}\rho_{12}(\theta)|)<1$$

ならば、〔定理・6〕によつて（4.17）が成立する。從つて先きのミニ・マックス均衡點は動學的に安定となる。吾々の複占市場においては、前述のように $a_{12}a_{22}<1$ であるが、必ずしも $|a_{i2}|<1, (i=1, 2)$ ではない。もし $|a_{i2}|<1, (i=1, 2)$ ならば、（4.27）（4.28）の成立の可能性は大となるが、そのことは各複占者の生產設備がほゞ同じ質と量をもつていることを意味するであろう。そこで各複占者がほゞ同等の力を有する典型的な複占市場を考えるならば、（4.27），（4.28）が滿され、從つて吾々の動學的行動 pattern の下においてその複占市場は動學的に安定なミニ・マックス均衡點を有するであろう。

かくして予測的態度の下における複占市場においても、古典的なクールノーの複占均衡點が重要な意味をもつことが明かとなつた。

(1) 〔定理・6〕において $\underset{\theta}{\mathrm{Sup}}\sum_{i=1}^{n}|a_{\theta ij}|<1$, $(j=1, \cdots\cdots, n)$ という條件を $\sum_{i=1}^{n}|a_{\theta ij}|<1\sum_{i=1}^{n}|a_{\theta ij}|<1$ $(i, j=1, \cdots, n;\ \theta=1, 2\cdots\cdots)$ という條件でおきかえると、行列の無限積 $\prod_{\theta=1}^{\infty}A_\theta$ は各組成分子の絶對値が1より小なる値をもつた行列へ絶對收斂することが證明できる。けだしそのとき任意の $i$ について

$$1>\sum_{j}|a_{1ij}|>\sum_{j}(\sum_{r_1}|a_{1ir_1}\ a_{2r_1j}|)>\cdots\cdots>\sum_{j}(\sum_{r_1}\cdots\cdots\sum_{r_{t-1}}|a_{1ir_1}\cdots\cdots a_{tr_{t-1}j}|)\geqq\sum_{j}|\sum_{r_1}\cdots\cdots\sum_{r_{t-1}}a_{1ir_1}\cdots\cdots a_{tr_{t-1}j}|\geqq 0$$

が成立し、從つてこの數列は有界單調減少數列となり、$t$ が限りなく大きくなると $\underline{At}$ の $i$ 行の組成分子の絶對値の和は（故に $i$ 行の各組成分子は）絶對値が1より小なるある値へ收斂するからである。

## 文　獻

〔1〕 J. von Neumann, & O. Morgenstern: *Theory of Games and Economic Behavior*, 1947.

〔2〕 A. Wald: *Statistical Decision Function*, 1950.

〔3〕 J. C. C. Mackinsey: *Introduction to the Theory of Games*, 1952.

〔4〕 P. A. Samuelson: *Foundations of Economic Analysis*, 1948.

〔5〕 L. Hurwicz: The Theory of Economic Behavior, *American Economic Review*, 1945, Vol. 35, pp. 909—925.

〔6〕 A. Wald: Foundations of General Theory of Sequential Decision Functions, *Econometrica*, 1947, Vol. 15, pp. 279—313.

〔7〕 H. F. Bohnenblust, S. Karlin & L. S. Shapley: Games with Continuous, Convex Pay-off, *Contributions to the Theory of Games*,, edited by H. W. Kuhn & A. W. Tucker 1950, pp. 181—192.

〔8〕中山伊知郎譯「クールノー・富の理論の數學的原理に關する研究」
〔9〕辻正次「實變數函數論」
〔10〕山田雄三「ミニ・マクス原則の要點」理論經濟學・第1卷・第2號・一六〇—一七四頁
〔11〕山田雄三「『遊戯の理論』における價格分析」一橋論叢・第27卷・第6號・三〇—五六頁
〔12〕安井琢磨「經濟的均衡の動學的安定條件」經濟思潮・第九集一—三〇頁