研究ノート

零和線型三者遊戯について

藤末宏

遊戯についての理論に於ては、鞍部點の存在、非存在の議論が重要な地位を占めてはいる。しかし考えてみれば、それらに就ての結論はすべて、手段（strategy）と利得函數（gain function）が與えられれば、數學的に引き出され得る。したがつて遊戯の理論の本質は、遊戯に於ける各遊戯者の手段と利得函數を決定することにあるといつて過言ではないであろう。しかしこの小研究に於いては、このような問題に對する議論は意圖していない。ある種の型を持つた遊戯についての數學的定理の陳述に止まることにする。

手段が有限なる場合は、著名な Theory of Games に於いて扱われている。手段が非有限なる場合についても、數々の論文を見る。例えば連續的無限なる手段を有する遊戯者の遊戯についても、Ville, J. によつて扱われている。この筆者の小研究に於ても扱う所は、手段が連續的無限なる場合であるが、更に簡單化された線型手段の場合である。また遊戯當事者が三者以上の場合については、前述の Theory of Games に見られる所である。筆者のこの小研究に於ては、線型手段を有する零和三者遊戯を扱うことにする。勿論この場合の一般化、即ちn者遊戯についても同様

な扱い方が出來るであろうが、その取扱いは更に複雑となる。

一、線型手段について

ある遊戯參加者の手段の集合をTとするとき、Tの各要素について次の二條件が滿されるならば、これらの手段を線型手段という。すなわちその條件とは、

1　集合Tは、任意の實數μに對して、それに對應する手段 t_μ を含み、またこのような手段から成り立つ。即ち

$$T=\{t_\mu\}$$

2　他の遊戯者の手段が一定のとき、當遊戯者の三つの手段 t_μ, t_{μ_1}, t_{μ_2} に對應する當遊戯者の利得函數を、それぞれ $K(\mu)$, $K(\mu_1)$, $K(\mu_2)$ とする。いま μ, μ_1, μ_2, の間に

$$\mu=x_1\mu_1+x_2\mu_2 \qquad x_1+x_2=1, \quad x_1\geqq 0, \quad x_2\geqq 0$$

の關係があれば、利得函數 $K(\mu)$ は

$$K(\mu)=x_1K(\mu_1)+x_2K(\mu_2)$$

を滿す。

たとえば

$$K(\mu)=a\mu+b \qquad (\text{ただし } a, b \text{ は定數})$$

なる利得函數が、手段 t_μ に對應するものであれば、この手段は明かに線型である。また逆も成立つことも證明され

る。

二 零和三者遊戲

線型手段を有する三遊戲者A、B、Cの利得函數の和が常に零である遊戲すなわち零和線型三者遊戲について考える。

A、B、C三者の手段の集合をそれぞれ、T_A, T_B, T_C とし、a_λ, b_μ, c_ν をそれぞれ、T_A, T_B, T_C に屬する手段であるとする。勿論、λ、μ、νは實數である。

各遊戲者について、それぞれ二つづつの手段を固定し、それらをそれぞれ、$a_{\lambda 1}$, $a_{\lambda 2}$, $b_{\mu 1}$, $b_{\mu 2}$, $c_{\nu 1}$, $c_{\nu 2}$ とする。Aが $a_{\lambda i}$, Bが $b_{\mu j}$, Cが $c_{\nu k}$ の手段をとつた時のA、B、Cの利得を夫々 a_{ijk}, b_{ijk}, c_{ijk} $(i, j, k=1, 2)$ とすれば、Aが a_λ, Bが b_μ, Cが C_ν の手段をとつたとき、ただし

$$\lambda_1 \leqq \lambda \leqq \lambda_2, \quad \mu_1 \leqq \mu \leqq \mu_2, \quad \nu_1 \leqq \nu \leqq \nu_2$$

のとき、A、B、Cの利得函數をそれぞれ

$K_1(\lambda,\mu,\nu)$, $K_2(\lambda,\mu,\nu)$, $K_3(\lambda,\mu,\nu)$ で表わすことにする。然らば手段の線型性から、

$$K_1(\lambda,\mu,\nu)=a_{111}x_1y_1z_1+a_{112}x_1y_1z_2+a_{121}x_1y_2z_1+a_{122}x_1y_2z_2+a_{211}x_2y_1z_1+a_{212}x_2y_1z_2+a_{221}x_2y_2z_1+a_{222}x_2y_2z_2$$

ただし、

$$x_1+x_2=1, \quad y_1+y_2=1, \quad z_1+z_2=1 \qquad x_1\geqq 0,\ x_2\geqq 0,\ y_1\geqq 0,\ y_2\geqq 0,\ z_1\geqq 0,\ z_2\geqq 0$$

が導き出される。

さて $K_1(\lambda,\mu,\nu)$ に於いて、x_1, y_1, z_1 を、x, y, z で置き變えると、

$$K_1(\lambda,\mu,\nu)=k_1(xyz+a_1xy+b_1yz+c_1zx+d_1x+e_1y+f_1z+g_1) \cdots\cdots (1)$$

となる。$K_2(\lambda,\mu,\nu)$, $K_3(\lambda,\mu,\nu)$ についても同様である。即ち、

$$K_2(\lambda,\mu,\nu)=k_2(xyz+a_2xy+b_2yz+c_2zx+d_2x+e_2y+f_2z+g_2) \cdots\cdots (2)$$

$$K_3(\lambda,\mu,\nu)=k_3(xyz+a_3xy+b_3yz+c_3zx+d_3x+e_3y+f_3z+g_3) \cdots\cdots (3)$$

また遊戯が零和であることから、明かに次の關係が成立する。

$$k_1+k_2+k_3=0, \quad k_1a_1+k_2a_2+k_3a_3=0, \quad k_1b_1+k_2b_2+k_3b_3=0, \quad \cdots\cdots, \quad k_1g_1+k_2g_2+k_3g_3=0$$

さて以上で、各遊戯者の利得函數は、三變數 $x, y, z,$ の函數の形式で決定された。これらの利得函數について、次の lemma と定理が成立する。

〔Lemma 1〕

零和三人遊戯に於いて、

$$\underset{0\leq x\leq 1}{Max}\ \underset{0\leq y,z\leq 1}{Min}\ K_1(\lambda,\mu,\nu)=\underset{0\leq y,z=1}{Min}\ \underset{0\leq x\leq 1}{Max}\ K_1(\lambda,\mu,\nu)$$

が、

$$0<x<1, \quad 0<y<1, \quad 0<z<1 \cdots\cdots (4)$$

で成立するためには、

$k_1 \neq 0, \quad e_1 = a_1 b_1, \quad f_1 = b_1 c_1$

であることを要する。

同様に、

$$\underset{0 \leq y \leq 1}{Max}\ \underset{0 \leq x, z \leq 1}{Min}\ K_2(\lambda, \mu, \nu) = \underset{0 \leq x, z \leq 1}{Min}\ \underset{0 \leq y \leq 1}{Max}\ K_2(\lambda, \mu, \nu)$$

が（４）で成立するためには、

$k_2 \neq 0, \quad d_2 = c_2 a_2, \quad f_2 = b_2 c_2$

であることを要する。また

$$\underset{0 \leq z \leq 1}{Max}\ \underset{0 \leq x, y \leq 1}{Min}\ K_3(\lambda, \mu, \nu) = \underset{0 \leq x, y \leq 1}{Min}\ \underset{0 \leq z \leq 1}{Max}\ K_3(\lambda, \mu, \nu)$$

が（４）で成立するためには、

$k_3 \neq 0, \quad d_3 = c_3 a_3, \quad e_3 = a_3 b_3$

であることを要する。以上の逆も成立する。

〔Ｌｅｍｍａ　２〕

基準にとる手段 $a_{\lambda 1}, a_{\lambda 2}, b_{\mu 1}, b_{\mu 2}, c_{\nu 1}, c_{\nu 2}$ をそれぞれ、$a_{\lambda 1}^*, a_{\lambda 2}^*, b_{\mu 1}^*, b_{\mu 2}^*, c_{\nu 1}^*, c_{\nu 2}^*$ に置き換えたときに得られる利得函數の式を（１）（２）（３）式の係數に＊を附けることによって表わすとすれば、$k_1 k_2 k_3 \neq 0$ ならば $k_1^* k_2^* k_3^* \neq 0$ であり、更に次の關係も成り立つ。

（１）　$e_1 = a_1 b_1, \quad f_1 = b_1 c_1$　ならば　$e_1^* = a_1^* b_1^*, \quad f_1^* = b_1^* c_1^*$

（２） $d_2=a_2c_2$,　$f_2=b_2c_2$ ならば $d_2^*=a_2^*c_2^*$,　$f_2^*=b_2^*c_2^*$

（３） $d_3=a_3c_3$,　$e_3=a_3b_3$ ならば $d_3^*=a_3^*c_3^*$,　$e_3^*=a_3^*b_3^*$ である。

〔定理〕

零和三者遊戯に於いて、

$$\left.\begin{aligned}\mathop{Max}_{\lambda}\mathop{Min}_{\mu,\nu}K_1(\lambda,\mu,\nu)&=\mathop{Min}_{\mu,\nu}\mathop{Max}_{\lambda}K_1(\lambda,\mu,\nu)\\ \mathop{Max}_{\mu}\mathop{Min}_{\lambda,\nu}K_2(\lambda,\mu,\nu)&=\mathop{Min}_{\lambda,\nu}\mathop{Max}_{\mu}K_2(\lambda,\mu,\nu)\\ \mathop{Max}_{\nu}\mathop{Min}_{\lambda,\mu}K_3(\lambda,\mu,\nu)&=\mathop{Min}_{\lambda,\mu}\mathop{Max}_{\nu}K_3(\lambda,\mu,\nu)\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

が、$-\infty<\lambda<\infty$,　$-\infty<\mu<\infty$,　$-\infty<\nu<\infty$ で同時に成立するためには、各遊戯者の任意の二組づつの手段を基準にとつて、（１）（２）（３）式を導いたとき、その係數の間に、

$$k_1k_2k_3\neq0,\quad e_1=a_1b_1,\quad f_1=b_1c_1,\quad d_2=a_2c_2,\quad f_2=b_2c_2,\quad d_3=c_3a_3,\quad e_3=a_3b_3\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

の關係があることを要する。また逆に、（６）の關係が成立する時にのみ（５）の式を滿す有限なる實數 λ、μ、ν が存在する。