『遊戲の理論』における價格分析

山田雄三

本文はノイマン＝モルゲンステルン『遊戲の理論と經濟行動』（一九四四年、第二版一九四七年）中の價格分析に關する一考察を企てたものである。これは本誌昭和二十六年九月號所載の拙稿『價格の確定・不確定』の續篇であり、前の論文はできるだけ忠實に原書を紹介したものであるが、本文ではそのうちの分割財の場合に限つて私自身の解釋を展開したものであり。とくに從來用いられている需要供給曲線のタームとの異同を考えたいというのが私の狙いである。その要點については、昨秋理論經濟學會の報告中に簡單に觸れたのであるが、報告後もう少し詳しい展開が必要であることを感じ、この一文を草した。

本文の最後の數學註は關恒義君の勞作であり、本文におけるディスクリートな數例を連續的な見方から形式化しようとしたものである。本文とはやや一致しない點もあるが、兩者を比較對照されることは有益であると思う。同君の熱意ある御協力に感謝する次第である。

一　問題――微視的分析の一層の徹底

普通に從來の價格理論は微視的分析だと言われている。たしかに或る意味においてはそうであろう。それは經濟行爲における最大利用もしくは最大利潤の追求を前提とし、價格をパラメーターとする個人均衡の成立を說き、そこから市場における需要供給の關係を導くことによって、價格の均衡決定を明らかにしている。個人の經濟行爲から出發

するような分析の仕方を微視的分析と呼ぶならば、このような價格均衡の理論はたしかに微視的であろう。

しかし從來の價格理論では、個人の經濟行爲といつても平均的な經濟人を考え、價格といつても平均的な市場價格を考えるのが普通であつた。そこには複雜な偏差の存在が十分考慮されていない。それは物理學の用法ではむしろ巨視的分析というに近いのではないかと思う。巨視的分析とは、構成要素の複雜な不連續な組立を考えずに、それらの集合の平均狀態に着目するものだからである。人々の評價の仕方や市場の價格の形成について、個別的偏差の存することを無視するならば、それは微視的というよりは巨視的といつた方がよい。もちろん從來といえども、競爭の場合や獨占の場合を分けるようなことはなされていたが、それらも多くはタイプの區別と考えられ、人々の行動のバラバラな偏差を問うものではなかつた。また最近では豫想とか期待とかいうものも導入されて來ているが、それも主として平均人が一樣に或る週日に立つて將來を豫想し計畫するというようなことが考えられていて、個人々々がバラバラに强氣もしくは弱氣の態度をとり、それらが相互に交渉し合うというものではなかつた。言うまでもなく何らかの意味でタイプを構成していかなければ分析は不可能であろうが、しかし常に個別的・偏差的なものの意味を追求するのでなければ、眞に微視的とは稱し難い。從來の價格理論の主流はこの意味でむしろ巨視的というべく、少くとも一步を讓つて巨視的と微視的との中間に立つものというべきであろう。

微視的分析を一層徹底することは今日未決の問題である。これについてノイマン＝モルゲンステルン『遊戲の理論と經濟行動』は一つの有力な手がかりを提供するものではないかと私は思つている。とくにその著の最後の部分（61節乃至64節）にとりあげられている價格分析の問題には多くの暗示がある。本文はこの問題について私自身の解釋を試

みようとするものである。

私はここで『遊戯の理論』の固有のタームを使うことをできるだけ避けている。このことが果して正しいかどうかは讀者の批判に委ねなければならないが、豫め私の意とすることを述べて置くのがよいであろう。問題は價格分析にあるが、私はここで從來の需要供給理論との異同を考えながら『遊戯の理論』の狙うところを解說していきたいのである。もとよりこのことは『遊戯の理論』のオリヂナリティーを否定するのではない。むしろその反對である。普通一般のタームとの交渉を考えることによつて、『遊戯の理論』が從來の理論を一歩押し進める所以のものを明確に出したいというのが私の趣旨である。今日一部の人々は『遊戯の理論』を單に獨占理論や不完全競爭理論にのみ適用し得ると考えているようであるが、革新はもつと一般的なものである。いま私が從來の需要曲線・供給曲線との關連をとりあげ、それを通じて前述の如く微視的分析の一層の徹底を考えようとするのはそのためである。ただし、斷るまでもなく價格分析は『遊戯の理論』の極く一部の問題である。それは既に推測統計學の分野に、また最近では「活動分析」と稱せられる分野に、大きな展開を促しつつある。またそれは恐らく微視的分析にのみ局限される武器でもないであろう。しかしこれらの點の考察は別の問題である。私のいまの關心事は普通にこれまで經濟學の中心問題と考えられて來た價格分析にあり、その限りにおいて『遊戯の理論』と從來の理論との異同を尋ねるにある。

『遊戯の理論』のうちに展開されている價格分析は、一財について賣買が行われる場合をとりあげ、それを一方において當事者が二人、三人、數人の場合などに分かち、他方において財が非分割の場合と分割可能の場合とに分かつて論じている。その大要は私の前の論文で紹介した通りであるが、本文では問題をもつぱら三人（賣手一人、買手二

人）の場合で且つ財が分割可能の場合を中心にして議論を進めたいと思う。三人の場合を考えるのは個人の集りを最も簡單につかむためであり、財の分割可能の場合を考えるのは普通の需要供給の曲線と關連づけるためである。もとよりこのような限定は單純な模型を構成するものに他ならないが、恐らくかかる方法によつてのみ微視的分析の徹底は達し得られるであろうことを私は後に明らかにしたい。

二　限界評價と平均評價との區別

いま簡單な數字例を設けて説明する。ここでは分割可能の一種の財があつて、それが賣手Aと買手B及びCとの間に取引される場合を考える。これをAとB、AとC、AとB及びC、の三つの場合――それぞれⅠ・Ⅱ・Ⅲとす――に分解する。いずれの場合においても、賣手・買手それぞれについてとくに限界評價と平均評價とを區別することとし、次のような數字例（次頁）を設ける。

説明を要する點は限界評價と平均評價との區別である。分割可能な財について限界利用遞減が認められる限り、これを金額で現わした限界評價なるものが成立する。賣手について言えば、一定單位の財のうち最初の一單位を提供する場合は比較的低い評價で甘んじ、一單位づつ增すにしたがい、次第に高い評價を與えるものと考えられる。買手について言えば、始めの一單位を購入する場合は比較的高い評價を附し、一單位づつ增すにしたがい、次第に低い評價を下すものと考えられる。前表の三つの場合のうち、Ⅲを暫く措いてⅠ及びⅡの場合の賣手・買手の限界評價は以上の如くして理解されるであろう。限界評價が成立する限り平均評價も成立する。限界評價は提供され又は購入される

I の場合

賣手 A

單位	限界評價	平均評價
1	4	4
2	6	5
3	8	6
4	10	7

買手 B

單位	限界評價	平均評價
1	16	16
2	12	14
3	8	12
4	4	10

II の場合

賣手 A

單位	限界評價	平均評價
1	4	4
2	6	5
3	8	6
4	10	7
5	12	8

買手 C

單位	限界評價	平均評價
1	22	22
2	18	20
3	14	18
4	10	16
5	6	14

III の場合

賣手 A

單位	限界評價	平均評價
1	4	4
2	6	5
3	8	6
4	10	7
5	12	8
6	14	9
7	16	10

買手 B・C

單位	限界評價	平均評價
1	(C)22	(C)22
2	(C)18	(C)20
3	(B)16	(C)20 (B)16
4	(C)14	(C)18 (B)16
5	(B)12	(C)18 (B)14
6	(C)10	(C)16 (B)14
7	(B) 8	(C)16 (B)12

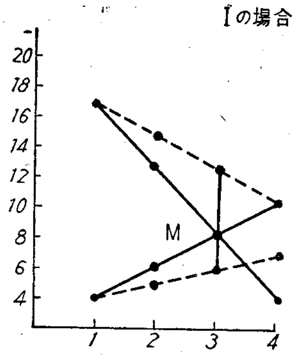
量の増加分即ち限界單位の評價であるが、平均評價は提供され又は購入される全量についての一單位當りの評價である。

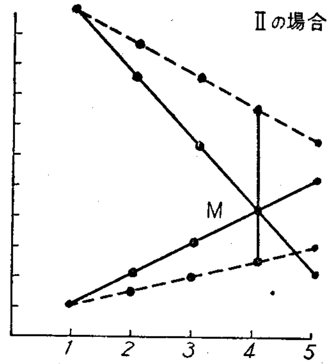
ところでなお説明を要する點はⅢの場合の買手B及びCの評價表である。ここではB及びCが集つて市場全體の買手側となる場合が考えられている。この場合の限界評價は、B及びCのそれぞれの限界評價を、高いものから低いものの順に、入り交ぜて排列される。われわれの例では3單位目でBの限界評價16、4單位目ではCの限界評價14、5單位目ではまたBの限界評價12が現われている。この場合買手側の限界者はBであるかCであるかいずれかであつて、同時に二人が限界者となり得ないと假定する。それはいわば紅白二本の糸を交互に紅白が現われるように編んだ線—— knitting curve ともいうべきもの——に類する。平均評價はどうか。B及びCはその時のそれ

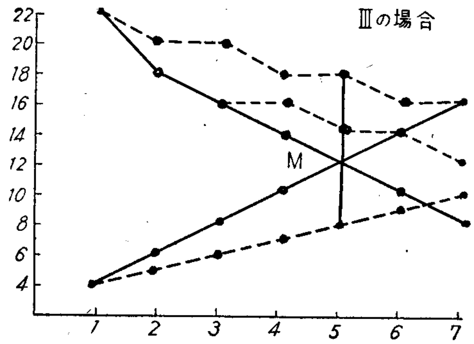
ぞれの購入量に應じて異る平均評價をもつている。われわれの例では市場で5單位が購入される場合、Bは2單位、Cは3單位だけ購入することになるが、それぞれの購入量に應じてBの平均評價は14、Cの平均評價は18である。それ以外に市場全體に通ずる一本の平均評價を考えるのではない。（後の數學註において平均評價の合成函數を考えているが、これはあくまで證明の補助手段であろう。具體的な平均評價は當事者それぞれ異る値をとることを注意しなければならない）。

　こうして限界評價と平均評價とを區別すると、これらは容易にグラフを以て示すことができる。次頁の圖で實線は限界評價を、點線は平均評價を示しているが、直ちに明らかの如く、普通の需要曲線及び供給曲線がここではそれぞれ二曲線に分けられて描かれることになる。即ち需要曲線に限界需要曲線（實線）と平均需要曲線（點線）が分けられ、供給曲線にも限界供給曲線（實線）と平均供給曲線（點線）とが分けられる。しかもⅠ・Ⅱ・Ⅲ三つの場合をそれぞれ考える必要がある。實線で示した限界需要曲線と限界供給曲線との交點はいずれもMと名づけられている。Ⅲの場合に平均需要曲線が二つに分かれているのはBとCとを別々に示したからである。

　從來の價格理論における需要供給のグラフにあつては限界と平均との區別はなされていない。例えば周知の如くマーシァルの圖形においては需要曲線と供給曲線とは一本づつ引かれ、それらの交點に均衡價格が成立するものと說かれている。一體このようなマーシァル曲線は限界的なものか平均的なものか。もし價格をパラメーターとしてこれに應じて提供され又は購入される全數量を考えるならば、それは平均的なものを指す。逆に數量をパラメーターとして、その增加分に對して受取り又は支拂わんとする價格を考えるならば、それは限界的なものを指す。マーシァル自身の







說明においては、同じ圖形を考えながら、これについていずれの解釋も見出され、兩者の區別の明確な意識はない。ボェーム・バヴェルクの馬市の例では各人が一頭ずつ馬を賣り又は買う場合が考えられ、從つて非分割財が取り扱われているので、平均評價と限界評價との區別が問題とならない。分割財の場合はどうか。オーストリア學派の傳統から言えば、處分し得る財の增加分に對する限界利用、從つてここにいう限界評價が出發點とならねばならないのであるが、この學派においても限界評價と平均評價との區別が必ずしも明確でなかつたことは、例えば歸屬決定（ツーレヒヌング）の問題に關するボェームバヴェルクとウィーザーとの間の意見の相違を思い浮べれば明らかであろう。行爲分析における限界利用と市場における價格との橋渡しはなお十分に明らかにされなかつた。この點は最近の文獻でも疑問が殘る。無差別曲線に切する價格線の變化から出發して需要量の變化を導こうとするヒックスの方法においても、始めから限界評價

の問題が避けられてしまっている。要するにこれまでの理論においては需要曲線も供給曲線もただ單線的に考えられていたのである。ただ不完全競爭理論による生產費分析では、周知の如く、平均費曲線と限界費曲線とが明らかに區別されている。（收入曲線にも平均と限界とが分けられる。）ただこの場合でも、一企業の生產費分析から進んで市場の供給曲線を說く段になると、全く單線的に考えられてしまって、供給曲線を以て直ちに企業限界費曲線に對應するものと考えるか、もしくは各企業の限界費と平均費との交點をつなぐ連續線と考えるか、さらに包絡線の如きを考えるか、とにかく一つの曲線に歸着せしめられるのが普通である。

然らば限界評價と平均評價、從って限界曲線と平均曲線とを區別する理由如何。それは個人的行爲とその集りとの關係を深く考える者にとって一つの重要な問題を提出するのであり、以下考察しようと思うところである。

三　取引限界とサープラス

ところでいま一つ準備的な考察が必要である。

限界需要曲線と限界供給曲線との交點（前圖のM）において成立する賣買量を「取引限界」と名づけよう。われわれの數字例でⅠ・Ⅱ・Ⅲの三つの場合の取引限界、竝にそこにおける限界評價・平均評價は次の如くである。

Ⅰの場合　取引限界＝3單位　限界評價格＝8

賣手Aの平均評價＝6　買手Bの平均評價＝12

Ⅱの場合　取引限界＝4單位　限界評價格＝10

賣手Aの平均評價＝7　買手Cの平均評價＝11

Ⅲの場合　取引限界＝5單位（B2單位、C3單位）　限界評價格＝12

賣手Aの平均評價＝8　買手Bの平均評價＝14　買手Cの平均評價＝16

賣手・買手の限界評價の一致する點における數量を取引限界と名づけたが、それは如何なることを意味するか。賣手・買手一人づつの場合を考えよう。

買手の限界評價が賣手の限界評價より大なる限り、賣買が行われていくことはたしかである。賣手は自分の評價より大なる對價を得て賣却し得る可能性があるし、買手もまた自分の評價より小なる對價を支拂つて購入し得る可能性があるからである。賣買の量が増すにしたがい、遂に兩者の限界評價が一致する點がある。しかし、この限界評價が直ちに賣買の行われる對價（兩者の間に成立する價格）ではない。價格がどの高さにおいて成立するかはまだ何とも言い得ないのである。賣手が受取ることを甘んずるギリギリの價格は限界評價よりも低い平均評價である。買手が支拂うことを甘んずるギリギリの價格は限界評價よりも高い平均評價である。實際の價格は兩者の平均評價の開きのどこかで決まるという他はない。平均評價の開きに數量を乘じたものを「サープラス」と呼ぼう。この「サープラス」は、賣手・買手の限界評價の一致する點においてマキシマムに達する。そうして、實際の價格の高さ如何によつてこのサープラスが或は賣手に多く或は買手に多く歸屬するのである。換言すれば賣手買手が目ざすものはこのサープラスの奪い合いであり、奪い合うべき全體のサープラスは限界評價の一致する點でマキシマムになるのである。

再び數字例をあげて說明しよう。いまここではまず賣手一人、買手一人の場合を考え、從つてわれわれの數字例の

三つの場合のうちIとⅡとが問題になる。これについていわゆるサープラスを計算すると次の如くである。即ちここではIの場合は3單位において限界價格8が一致し、サープラス18である。Ⅱの場合は4單位において限界價格10が一致し、サープラス36である。表中の太字はそれを示す。われわれの數字ではサープラスのマキシマムの點が一義的

I の場合

單位	買手B		賣手A		サープラス
	限界評價	平均評價	限界評價	平均評價	平均評價差×量＝サープラス
1	16	16	4	4	12×1=12
2	12	14	6	5	9×2=18
3	**8**	12	**8**	6	6×3=**18**
4	4	10	10	7	3×4=12

II の場合

單位	買手C		賣手A		サープラス
	限界評價	平均評價	限界評價	平均評價	平均評價差×量＝サープラス
1	22	22	4	4	18×1=18
2	18	20	6	5	13×2=26
3	14	18	8	6	12×3=36
4	**10**	16	**10**	7	9×4=**36**
5	6	14	12	8	6×5=30

に現われていないが、理論的にはここがマキシマムの點であることは容易に證明されるであろう。

Ⅲの場合、即ち賣手A、買手B・C、の場合については少しく說明を補充しなければならない。ここでは取引量のうちB及びCの參加し得る量がその時々において異り、兩者の平均評價も異る。これらのことを考慮してサープラスが計算されねばならない。その算式については次表のサープラスの欄を注目されたい。要するにCとAとの平均評價の開きとBとAとの平均評價の開きとを別々に計算し、そこから全體のサープラスを出すのである。ここでは限界評價12、取引限界の賣買量5において、サープラス42がマキシマムである。

以上I・Ⅱ・Ⅲの場合をグラフで描けば次の如くなり、

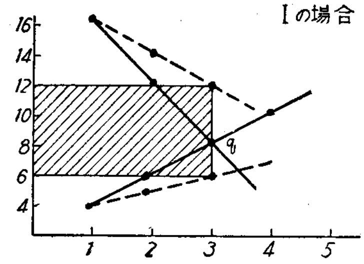
III の場合

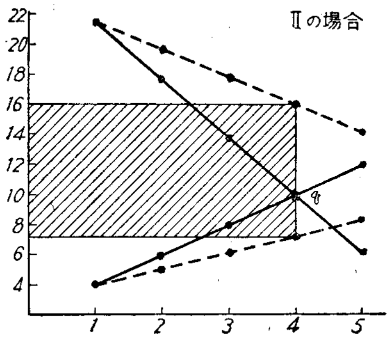
單位	買手 B		買手 C		賣手 A	
	限界評價	平均評價	限界評價	平均評價	限界評價	平均評價
1	—	—	22	22	4	4
2	—	—	18	20	6	5
3	16	16	—	—	8	6
4	—	—	14	18	10	7
5	**12**	14	—	—	**12**	8
6	—	—	10	16	14	9
7	8	12	—	—	16	10

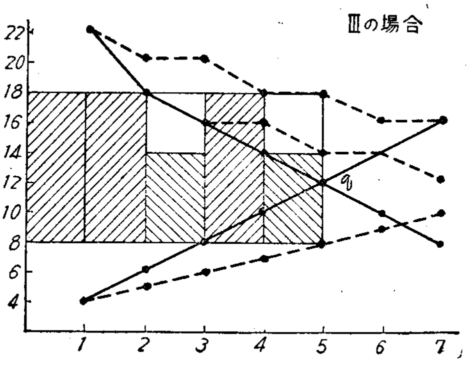
單位	サープラス
	(Cの平均評價－Aの平均評價)×Cの取引量＋(Bの平均評價－Aの平均評價)×Bの取引量＝サープラス
1	(22－4)×1 ＝18
2	(20－5)×2 ＝30
3	(20－6)×2＋(16－6)×1＝38
4	(18－7)×3＋(16－7)×1＝42
5	(18－8)×3＋(14－8)×2＝**42**
6	(16－9)×4＋(14－9)×2＝38
7	(16－10)×4＋(12－10)×3＝30

それぞれの影線の部分が取引限界におけるサープラスを示す。Ⅲの場合は買手が二人であつて、サープラスも二部分に分かれ、凹凸が出てくる。(次頁參照)

以上について原著ではやや異る說明が與えられている。これによれば賣買の行われないうちは、賣手は財の既存量sをもち、買手は全くこれをもたない。賣手の既存量sに對する評價をu_sで示す。いまt量が賣買されたとする。賣手は手元に$s-t$量を殘し、買手はt量をもつことになる。この場合賣手の殘量に對する評價はu_{s-t}、買手の取引量全部に對する評價はv_tである。兩者の評價の合計u_{s-t}＋v_tが、賣買以前の兩者の評價の合計u_s+0より大ならば、賣買を行う可能性がある、と原著では說くのである。限界利用遞減が前提される限り、取引量が增して賣手の殘量が減ずるにしたがい、その增加分に對する評價の減じ方は益々大となるし、また買手の入手量が增すにしたがい、その增加分に對する評價の增し方は益々小となる。從つて兩







者の評價の合計——賣手の殘部評價と買手の全部評價との合計——は或る點でマキシマムに達し、それ以上は減退していく。これが原著の説明の仕方である。（拙稿「價格の確定・不確定」前掲箇處、六二頁以下參照）。

これは私の説明と異るが、マキシマムの位置は同じである。數式的に言えば

買手の取引量の全部評價＋賣手の殘部評價

＝（買手の平均評價×數量）＋（既存量の評價－賣手の平均評價×數量）

＝（買手の平均評價－賣手の平均評價）×數量＋既存量の評價

Iの場合

單位	買手B 限界評價	買手B 取引量の全部評價 v_t	賣手A 限界評價	賣手A 取引量の全部評價	賣手A 既存量の評價 − 取引量の全部評價 ＝ 殘部の評價 u_{s-t}	合計 v_t+u_{s-t}
1	16	16	4	4	70−4＝66	82
2	12	28	6	10	70−10＝60	88
3	8	36	8	18	70−18＝52	88
4	4	40	10	28	70−28＝42	82

となるから、原著の計算の結果は私自身の計算に既存量の評價（これは一定數）を加えたものに他ならない。マキシマムの決定については當然二つの計算は一致することになる。いま前の數字例をそのまま用い、原著の計算の手續をIの場合のみについて示すと上の表の如くなる。ここで賣手の既存量評價は70と假定されている。原著の計算と私の計算との比較において重要な一つの點は、私のサープラスというのは賣手・買手の平均價格の差から導かれるものであつて、賣手のサープラスと買手のサープラスの「合計」ではない。結果は同じであつても、私の説明の方がよいと思う。

四　サープラスの歸屬と價格決定圏

これまでの準備を經て、いまや中心の問題に入る。價格の高さはどのように決まるか、價格の高さの決定如何によつてサープラスの歸屬はどのように左右されるか。逆に言えば、サープラスの奪い合いから、價格が或は高く或は低く決まるのであり、しかもサープラスの奪い合いは常にAとB、AとC、AとB及びCの三つの場合を比較しつつ行われるのであり、いまこれらの點について考察を進める。

Iの賣手A、買手Bの場合には、3單位の取引が行われ、賣手の平均評價は6、買手の平均評價は12であるから、兩者の開きは6、從つてサープラスは18である。いま

價格が6から12までの間のいずれかの高さ（但し便宜上端數のある場合を除く）において決まるとすれば、サープラスはAB間に様々に歸屬する。一般には價格が高ければ高い程賣手Aに利、買手Bに不利、逆に價格が低い程賣手Aに不利、買手Bに利である。これを一覧表を以て示せば上の如くである。

I の場合

價　格	賣手A—買手B
12	18—0
11	15—3
10	12—6
9	9—9
8	6—12
7	3—15
6	0—18

II の場合

價　格	賣手A—買手C
16	36—0
15	32—4
14	28—8
13	24—12
12	20—16
11	16—20
10	12—24
9	8—28
8	4—32
7	0—36

IIの賣手A、買手Cの場合には、4單位の取引が行われ、賣手の平均評價は7、買手の平均評價は16であるから、兩者の開きは9、従つてサープラスは36(9×4)である。いま價格が7から16までの間のいずれかの高さにおいて決まるとすれば、サープラスはACの間に様々に歸屬すること、前のIの場合と同じである。

IIIの賣手A、買手B及びCの場合は少しく複雑している。この場合は5單位の取引が行われるが、そのうち買手Bは2單位、買手Cは3單位だけ参加している。賣手Aの平均評價は8であるが、買手側は二つに分かれ、買手Bの平均評價は14、買手Cの平均評價は18である。平均評價の開きは8と14の場合と8と18の場合とある。即ち價格が14以下の場合と14以上の場合が區別されねばならない。サープラスは前に示した算定式即ち（Bの平均評價−Aの平均評價）×Bの取引量＋（Cの平均評價−Aの平均評價）×Cの取引量に従つて42となる。42のサープラスは如何に分けられるか。價格が14以下ならば、Aは5單位を賣り、Bは2單位を買い、Cは3單位を買うものとして、それぞれ42のサープラスが分割される。價格が14以上ならば、B

III の場合

	價格	賣手A—買手B—買手C
3單位	18	42—0—0
	17	39—0—3
	16	36—0—6
	15	33—0—9
5單位	14	30—0—12
	13	25—2—15
	12	20—4—18
	11	15—6—21
	10	10—8—24
	9	5—10—27
	8	0—12—30

は参加せず、Cのみ3單位を賣ることになるが、このことは賣手AがBと「結託」し、Bには廉く賣ることを約して、價格を吊りあげることを意味する。もし必要ならば賣手Aは若干の「手附」をやつてBを抱き込むことが可能である。とにかく、かくの如くして42のサープラスは價格の高さによつて上の如く歸屬される。

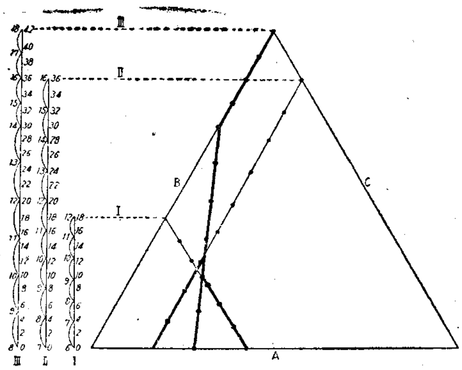
これらの三つの場合においてA・B・C三人の歸屬の大さがいろいろと異つて現われるが、そのすべての場合が成立可能なのではない。例えば價格12においてAとBとの歸屬關係を見ると、Ⅰの場合にはA18とB0、Ⅲの場合にはA20とB4であつて、明らかにA・B兩者にとつてⅢの場合が有利であるから、Ⅰの場合は成立しない。（これをⅢはⅠを「支配」するという。）同様に價格12においてAとCとの歸屬關係を見ると、Ⅱの場合にはA20とC16、Ⅲの場合にはA20とC18であつて、これまたAC兩者とももしくは少くともCはⅢの場合を選び、Ⅱの場合は成立しない。（これをⅢはⅡを「支配」するという。）しかし價格がそれ以下に下れば、Ⅲの場合は當事者にとつて共に不利となり、ⅠによつてAとBとで取引するか、ⅡによつてAとCとで取引するかする。（これをⅠ又はⅡがⅢを「支配」するという。）

このような關係を一目瞭然たらしめるために、高さ42の正三角形を描いて見るとよい。この三角形（邊を含む）の各點からそれぞれの邊A・B・Cに下した垂線の長さは、A・B・Cの歸屬分を示し、その合計は42である。これは

われわれのⅢの場合に應ずる。またこの正三角形には高さ36の正三角形と高さ18の正三角形との二つが重ねられている。これらはわれわれのⅡ及びⅠの場合に應ずる。いま前にあげたⅠ・Ⅱ・Ⅲの歸屬關係をこれら三つの三角形の上に點を以て示すと上表の如くであり、即ち

Ⅰの場合　高さ18の三角形の右邊の各點（Cの歸屬分は零）
Ⅱの場合　高さ36の三角形の左邊の各點（Bの歸屬分は零）
Ⅲの場合　高さ42の三角形の頂點から左邊を通り、途中で曲つて底邊に至る各點

となる。



ところでⅢの線は途中でⅡの線及びⅠの線と交るが、それぞれの交點に至るまでの上部においてはⅢの場合が同一價格の下に當事者のいずれにとつても有利となり、Ⅱの場合及びⅠの場合は成立しない。ところが、交點から下部においてはⅢもⅡもⅠもそれぞれ當事者の間の利害が交叉し、いずれの場合がとくに有利ということはない。かくてわれわれの圖において太線を以て示した

という雷電のような形の線上の各點がこの場合の價格の成立領域となるのである。（後にかかげる數學註では連續性の假定からⅢの場合のみが支配的であるような結論になつているが、「遊戲の理論」の立場から見てそこにはもう少し問題が殘つていることを注意されたし。）いずれにせよ、價格は一點において成立するのではなく、一

定線上の點集合として成立するということが注意されねばならない。

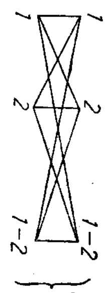
五 結び

以上われわれは賣手一人、買手二人が一財を取引する場合のみを考えて來た。しかもそこでは簡單な數字例を設けて論じて來た。從來の需要供給理論では常に合計された需要供給のみをとりあげて來たのに對し、ここでは賣手・買手間の樣々な結合關係が問題となつて、例えば買手二人の合計の場合の他に、一人づつの場合も考え併せなければならない。取引者の人數が增せば、分析は益々複雜してくる。多人數の場合に分析を擴張していくことは理論的要求には違いないが、その形式化は決して容易でない。恐らく『遊戲の理論』の分析は少人數に限つてのみ意義をもつようなものであり、そこに却つて微視的分析の徹底が現われるのであると私は解する。市場全體もしくは國民經濟全體をつかむというならば、微視的分析を擴張していくのではなく、むしろそれとは違つた、最近の所得接近の如き巨視的方法がとらるべきであろう。微視的分析に徹底する者は同時に最もよくその限界を知る者でなければならない。

ここで私が結びとして考えて見たいことは、以上の分析を多人數の場合や多數財の場合に擴張する形式化ではない。それも或る程度可能であろう。(後の數學註はその試みである)。だが、私はむしろここで以上の分析が一般に何を示すのかを要約するという意味で一般化をして置きたいのである。

第一、需要供給の全體は單に一つの纒つた合計としてではなく、買手賣手の人數の排例の樣々な結合として考えられねばならない。

買手１・２の二人……
賣手１・２の二人……



九つの結合關係あり。普通の需要供給理論では買手の合計と賣手の合計とを考えるのみ。

第二、需要供給それぞれについて限界曲線が考えられる。二人以上の場合の限界曲線は買手（もしくは賣手）がそれぞれ交替的に限界地位を占めるものをつないで得られる。

買手１の限界曲線……10＞8＞6、買手２の限界曲線……9＞7＞5ならば、

買手１・２を併せた限界曲線……10(1)＞9(2)＞8(1)＞7(2)＞6(1)＞5(2) となる。

第三、需要供給それぞれについて平均曲線が考えられる。平均曲線は二人以上の場合には別々の高さをもつものと考えねばならない。

買手１の平均曲線……10＞9＞8、買手２の平均曲線……9＞8＞7 ならば、それぞれ3單位に對して平均評價は買手1が8、買手2が7というように二通りある。

第四、それぞれの結合關係について、限界需要曲線と限界供給曲線との交點に取引限界が決まる。それは平均需要曲線と平均供給曲線との開きに取引量を乘じたもの、即ちサープラスが最大となるところである。このサープラスは決定さるべき價格の高さ如何によつて取引者間に分割歸屬される。

第五、それぞれの結合關係について價格は取引限界における平均需要供給と平均供給曲線との開きの間で決まり、一義的に決定されることはない。さらに種々なる結合關係が互に關連していて、それを地盤として價格成立は一定の點集合の如きものになる。

かくて需要供給の關係は普通考えられるような、$\mathbf{D=f(p)}$, $\mathbf{S=\phi(p)}$, $\mathbf{f(p)=\phi(p)}$ とはならない。このような形のものは合計的な限界需要曲線と限界供給曲線との交點を示すものであるが、『遊戯の理論によれば、取引量及び價格はこの交點の上下左右の一定の範圍の點集合として理解されねばならないのである。

數學註（關　恒　義）

一　賣手一人・買手一人の場合

ある財 x 單位目の限界評價を p とすれば、賣手・買手に關して次の如き限界評價函數が定義される。

$$p=f(x),\quad p=g(x) \qquad \cdots\cdots(1)$$

こゝに $f(x)$ は x の單調增加函數、$g(x)$ は x の單調減少函數とする。平均評價函數は

$$p=\frac{\sum_{i=1}^{x} f(i)}{x},\quad p=\frac{\sum_{i=1}^{x} g(i)}{x} \qquad \cdots\cdots(2)$$

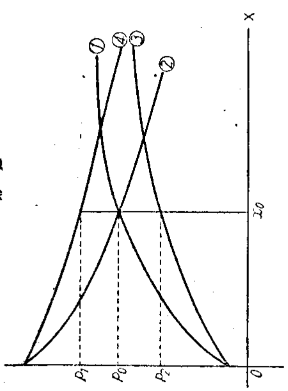
x はディスクリートな自然數の領域をその變域とするのであるが、こゝでは數式的な取扱いを簡單にする爲に x を連續な正の實數値をその變域とするものと一應近似的に考えておこう。そのとき(2)は

$$p=\frac{\int_0^x f(x)dx}{x},\quad p=\frac{\int_0^x g(x)dx}{x} \qquad \cdots\cdots(3)$$

となる。次の性質は定義により明かである。

$$\frac{\int_0^x f(x)dx}{x}>f(x),\quad \frac{\int_0^x g(x)dx}{x}>g(x) \qquad \cdots\cdots(4)$$

第一圖



それを圖示すれば第一圖の如くなる。①②は夫々賣手・買手の限界評價曲線、③④は夫々賣手・買手の平均評價曲線である。（本文二節の表及び圖參照）。遊戯の理論に從つて利得函數を次の如く定義する。先ず賣手・買手は夫々取引せんと希望する財量と一單位當りの價格を提示する。それ等が一致する時に交換が成

立する。賣手の財量・價格をベクトル (p', x') であらわし、買手のそれ等をベクトル (p'', x'') であらわせば、交換成立の可能な點は④より上③より下には存在し得ない。各人の歸屬ないし利得は、次の函數

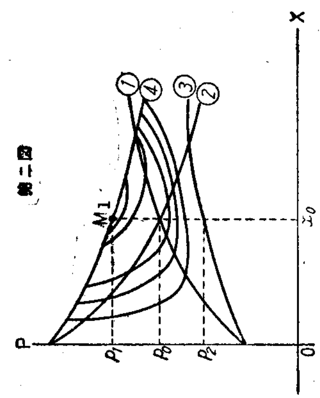
$$\left.\begin{array}{l} (p', x') = (p'', x'') \text{ の場合} \\ p'x' - \int_0^{x'} f(x)dx = \Omega_1((p', x'), (p'', x'')),\ \int_0^{x''} g(x)dx - p''x'' \\ \quad = \Omega_2((p', x'), (p'', x'')) \\ (p', x') \neq (p'', x'') \text{ の場合} \\ o = \Omega_1((p', x'), (p'', x'')),\ o = \Omega_2((p', x'), (p'', x'')) \end{array}\right\} \cdots\cdots(5)$$

で表示される。[註] 二人取引はこの場合非零和二人遊戯となる。サ1ゲプラスは $\int_0^x (g(x) - f(x))\,dx$ として與えられる。更に遊戯の理論に從つて安定解を次の如く定義しよう。交換の成立する場合（以下かゝる場合のみを問題とする）の賣手・買手の利得を r_1・r_2 と表わし、それを矢張りベクトル (r_1, r_2) と示す。二つの利得のベクトル (r_1, r_2), $(\overline{r_1}, \overline{r_2})$ に對して $(r_1, r_2) \geqq (\overline{r_1}, \overline{r_2})$ となるならば（こゝに $\geqq$ の記號は $r_1 > \overline{r_1}$, $r_2 > \overline{r_2}$ か $r_1 > \overline{r_1}$, $r_2 = \overline{r_2}$ か $r_1 = \overline{r_1}$, $r_2 > \overline{r_2}$ かのどれかが成立する事を示す）、利得 (r_1, r_2) は利得 $(\overline{r_1}, \overline{r_2})$ を支配するという。今ベクトル (p, x) の集合においてそのある部分集合Sに含まれるベクトルに對する利得は相互に支配され得ないが、Sに屬しない如何なるベクトルに對する利得もSに屬するある適當なベクトルに對する利得によつて支配せられ得ることが認められる場合、かかる部分集合Sを安定解と稱する。實際に起り得る可能性のある取引のうちで安定解に屬するものが有利な交換として決定せられ得るわけであるが、それは必ずしも一意的には決定せられない。安定解を導出する爲の準備として次の如き利得無差別曲線を定義しよう。賣手（ないし買手）に對して一定の利得 r を與える如きベクトル (p, x) の軌跡を賣手（ないし買手）の利得無差別曲線といゝ、次式で示す。

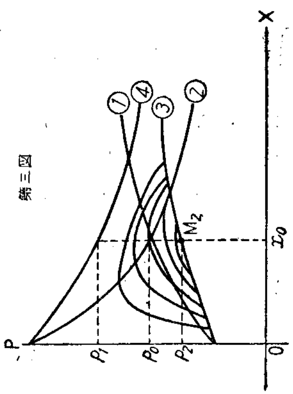
$$r = px - \int_0^x f(x)dx \quad \left[r = p\int_0^x g(x)dx - px\right] \cdots\cdots(6)$$

その形狀は次の如くなる。その微係數 $\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{f(x) - p}{x}$ $\left[\dfrac{dp}{dx} = \dfrac{g(x) - p}{x}\right]$ は $f(x)$ の單調增加性（$g(x)$ の單調減少性）より賣手(買手)の限界評價曲線との交點で零その左側で負

第二図



第三図



(正)その右側で正（負）となる。rを變動することにより第二圖（賣手）・第三圖（買手）の利得の無差別曲線群が得られる。賣手（買手）の利得無差別曲線は $M_1(M_2)$ を中心とする同心曲線群であり、それは④よりも上に出ず③よりも下には出ない。その極小點（極大點）の軌跡が賣手（買手）の限界評價曲線①（②）の上にあり、曲線が次第に上方（下方）へ移動するにつれて利得は增加し、$M_1(M_2)$ で最大となる。賣手（買手）の最大の利得は $px_0-\int_0^{x_0} f(x)dx=(p_1-p_2)x_0$ $\left[\int_0^{x_0} g(x)dx-px_0=(p_1-p_2)x_0\right]$ となる。かゝる無差別曲線の考え方によつて安定解を次の如く導出する。(p,x) なるベクトルを賣手ならびに買手の利得無差別曲線上の點と考えれば、兩者の利得無差別曲線が交つている場合にはより有利な方向へ價格ないし財量を移動せしめることによつて、(p,x) に對する利得は適當な他のベクトルに對する利得によつて支配される。從つて安定解となる爲には兩者の利得無差別曲線が接していなければならない。即ち $\dfrac{f(x)-p}{x}=\dfrac{g(x)-p}{x}$。故に $f(x)=g(x)$ とならねばならず、これは兩者の限界評價曲線の交點のX座標の値 x_0 によつて滿される。又そのときに成立し得る價格の範圍は $p_2=\dfrac{\int_0^{x_0} f(x)dx}{x}$，$p_1=\dfrac{\int_0^{x_0} g(x)dx}{x_0}$ の間にある。即ち安定解となる財量及び價格はベクトル (x_0, p)，$p_1 \geqq p \geqq p_2$ とならねばならぬ。又賣手・買手の利得無差別曲線の增加の方向が逆であることより、安定解はかゝるベクトル以外に存在しない。從つて

定理　安定解はベクトル (x_0,p)，$p_1 \geqq p \geqq p_2$ によつて與えられる。そのとき歸屬（ないし利得）は賣手・買手各々に對して、$px_0-\int_0^{x_0} f(x)dx$．從つて $(p-p_2)x_0$，$\int_0^{x_0} g(x)dx-px_0$ 從つて $(p_1-p)x_0$ となり、その合計卽ちサープラスは $(p_1-p_2)x_0$ となる（三節圖參照）。

註　遊戯の理論に關する數式上の諸概念については、關書評「遊戯の理論と經濟行動」（一橋論叢昭和二十六年二月）を參照されたい。その書評に若干のミス・プリントがある。この機會に訂正する。十八頁上段二行目の式は $\xi_{\tau 1} \geqq 0$，$\eta_{\tau 2} \geqq 0$。十九頁下段二行目の式は $p_1 \geqq u$，$p_2 \leqq v$，$p_x \leqq v$。同じく四行目以上の不等式はすべて不等號が逆である。

二　賣手一人・買手二人の場合

この場合①ならびに③は

$$p=f(x),\ p=g_1(x),\ p=g_2(x) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

$$p=\frac{\int_0^x f(x)dx}{x},\ p=\frac{\int_0^x g_1(x)dx}{x},\ p=\frac{\int_0^x g_2(x)dx}{x} \quad \cdots(8)$$

それらは夫々賣手・買手1買手2の限界ならびに平均評價を示す。利得函數は次の如く定義される。賣手及び買手側が夫々價格及び取引量を提示し、それが一致するとき交換が成立する。卽ち p・p'・p''を夫々賣手・買手1・賣手2のつけ値、x・x'・x''を賣手・買手1・買手2の取引量とすれば、

$(p,x)=(p',x'+x'')=(p'',x'+x'')$ の場合、

$$\left.\begin{array}{l} px-\int_{0}^{x} f(x)dx=\Omega_1((p,x),(p'x'),(p'',x'')),\\ \int_{0}^{x'} g_1(x)dx-px'=\Omega_2((p,x),(p',x'),(p'',x''))\\ \int_{0}^{x''} g_2(x)dx-px''=\Omega_3((p,x),(p',x'),(p'',x''))\\ \text{右以外の場合}\\ O=\Omega_1,\ O=\Omega_2,\ O=\Omega_3 \end{array}\right\}\cdots(9)$$

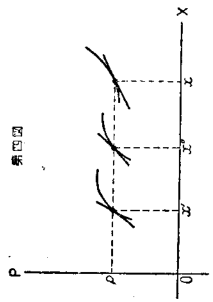
これは非零和三人遊戯である。サープラスは $\int_{0}^{x'} g_1(x)dx+\int_{0}^{x''} g_2(x)dx-\int_{0}^{x} f(x)dx$ となる。安定解は次の如くして導出せられる。安定解となる爲には、ベクトル $(p,x),(p,x'),(p,x'')$ がより有利な利得を求めて移動し得ないことが必要である。從つて⑧の利得の微分（r_1・r_2・r_3 は各交換者の利得を示す）

$$dr_1=(p-f(x))dx+xdp,\ dr_2=(g_1(x')-p)dx'-x'dp$$
$$dr_3=(g_2(x'')-p)dx''-x''dp \cdots\cdots\cdots(10)$$

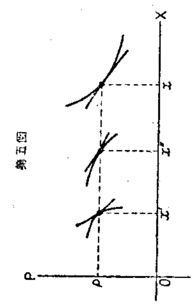
の少くとも一つが必ず負とならなければならぬ。先ず x・x'・x'' の變動のみを考えれば（この場合 $dp=0$ となる）$p\leqq f(x)$, $g_1(x)\leqq p$, $g_2(x)\leqq p$ あるいは $p\geqq f(x)$, $g_1(x)\geqq p$, $g_2(x)\geqq p$ でない限り、適當に x'・x'' を微少變動させて（そのとき常に $dx=dx_1+dx_2$ である）各人の利得をより增加せしめ得る。從つて吾々はこの場合のみを考えておけばよい。更に利得無差別曲線を用いて⑩のうちの少くとも一つが必ず負となり得る爲にはもし $g_1(x')\neq p$, $g_2(x'')\neq p$, $f(x)\neq p$ であるとすれば次の關係が滿足されなければならない。

$$\frac{dx'}{dp}+\frac{dx''}{dp}=\frac{x'}{g_1(x')-p}+\frac{x''}{g_2(x'')-p}=\frac{dx}{dp}$$
$$=\frac{x}{f(x)-p}\cdots\cdots\cdots(11)$$

その證明の概要は次の如くである。x・x'・x'' を利得無差別曲線上の點として示せば、第四圖・第五圖となる。すでに述べた如くこの二つの場合のみを考察すれば十分である。



第四図



第五図

(p,x'), (p,x'') は無差別曲線の下方へ移動することによつて更に利得を增し、(p,x) は無差別曲線の上方へ移動することによつて更に利得を增す。從つて⑪は (p,x'), (p,x'') における p 座標に關する方向係數の和が (p,x) における p 座標に關する方向係數に等しいことを示している故、$dx=dx'+dx''$ を滿しつつ (p,x), (p,x'), (p,x'') に如何なる微少移動を與えてもその少くとも一つのベクトルに對する（ある交換者の）利得は減少

する。又⑪以外の場合には適當な微小移動を與えることによつて利得のより有利な組合せを得ることが可能である。從つて安定解となる爲には、⑪が滿されねばならぬ。又 $g_1(x_1)=p$ のとき、$f(x)\neq p$ であるならばより有利な利得への移動が可能となり、安定解となる爲には $f(x)=p$ とならねばならない。即ち

$$g_1(x')=p,\ f(x)=p \text{ 又は } g_2(x'')=p,\ f(x)=p\cdots(12)$$

從つて安定解となる爲には⑪あるいは⑫を滿していなければならない。これが十分條件であることも無差別曲線の性質より容易に證明せられ得る。

定理一　安定解は⑪ないし⑫を滿すベクトル (p,x), (p,x'), (p,x'') によつて與えられ、その場合の歸屬（ないし利得）は⑨によつて與えられる（四節三角形圖參照）

以下若干安定解に關する性質を列擧しておこう（證明略）。

1　安定解は次の關係式のどれかを滿す。

i　$\frac{\int_0^{x''}g_2(x)dx}{x''}\geqq p>g_1(x')>f(x)>g_2(x'')$, $g_1(x')>f(x)>$

$g_2(x'')>p\geqq\frac{\int_0^x f(x)dx}{x}$, $\frac{\int_0^{x'}g_1(x)dx}{x'}\geqq p\geqq g_2(x'')>f(x)>$

$g'(x)$, $g_2(x'')>f(x)>g_1(x')>p\geqq\frac{\int_0^x f(x)dx}{x}$.

ii　$p=g_1(x')=f(x)>g_1(x_0')=f(x_0')$, $p=g_2(x'')=f(x)>$

$g_2(x_0'')=f(x_0'')$

iii　$g_1(x_0')\geqq p\geqq\frac{\int_0^{x_0'}f(x)dx}{x_0'}$, $g_2(x_0'')\geqq p\geqq\frac{\int_0^{x_0''}f(x)dx}{x_0''}$

iv　$f(x)=g_1(x')=g_2(x'')$, $\frac{\int_0^x f(x)dx}{x}\leqq p\leqq\frac{\int_0^{x'}g_1(x)dx}{x'}$

$=\frac{\int_0^{x''}g_2(x)dx}{x''}$

こゝに x_0' (x_0'') は買手1（2）と賣手との限界評價曲線の交點である。

最後のivについて更にくわしく述べるならば、買手1・2の限界評價曲線を、p座標に關して合成した曲線（$p=g_1(x)$, $p=g_2(x)$ の x の値を夫々 x_1・x_2 とすれば新たに x_1+x_2 なる變數を x と考えて $p=g(x)$ とする）と賣手の限界評價曲線との交點をベクトル（p_0, x_0）で表し同じく買手側の平均評價曲線を p 座標に關して合成した曲線の x_0 に對する p の値を p_1 とするとき、$f(x_0)=g_1(x')=g_2(x'')=g(x_0)=p_0$, $p_2\leqq p\leqq p_1$ となる（p_2 は一、にて定義した値）。かゝる安定解は一、における安定解と形式的には同樣の性格のものであるが、これはこゝでは極めて特別な安定解の一種に過ぎない。

2　(p,x), (p,x'), (p,x'') を安定解とし、p を一定としておけば、x'・x'' を共に增加（ないし減少）させる方向には安定解は存在し得ない。安定解の存在し得る方向は x' 減少・x'' 增加ないしは x' 增加・x'' 減少の方向である。

3　性質1のiにおける場合には價格は

$$p=\frac{x'g_2(x'')f(x)+x''g_1(x')f(x)+xg_1(x')g_2(x'')}{x'g_2(x'')+x'f(x)+x''g_1(x')+x''f(x)+xg_1(x')+xg_2(x'')}$$

となる。

4　安定解のうちで賣手に最大の利得を與え得る點は(p_1,x_0)で利得は$(p_1-p_2)x_0$となる。それは取引におけるサープラスの最大値に一致する。又買手1に最大の利得を與える點は(p,x_0')，$p=\frac{\int_0^{x_0'}g_1(x)dx}{x_0'}$である。買手2に對しても同樣。

以上吾々は結托の存在しない場合を考察したが更に結托の存在を考慮して安定解を導出しよう（本文四節參照）。結托はその仕方により又その程度により種々ある。遊戯の理論においては非零和三人遊戯は、虚構的な一人の遊戯者を假定して零和四人遊戯に變換される。その場合三人の結托は虚構的な遊戯者に對して爲されるものとされる。この場合各人の利得の合計即ちサープラスを最大ならしめようとする結托が考えられよう。このときは殆んど一、と同樣の證明により、安定解の性質1、にのべたivの場合のみが安定解となる、即ち

定理二　交換者すべてが結托する場合には、安定解は(p,x_0)，(p,x'_1)，(p,x'')，$p_1\geqq p\geqq p_2$と與えられる。こゝにx_0は買手側の合成された限界評價曲線と賣手の限界評價曲線との交點のX座標であり、そのP座標をp_0としてp_0における$g_1(x)$・$g_2(x)$，のX座標の値をx_1'・x_1''とする。賣手への歸屬は$(p-p_2)x_0$，買手1・2への歸屬は$(p_1-p)x_1'$，$(p_1-p)x_1''$となり、サープラス即ち歸屬の合計は$(p_1-p_2)x_0$となる。

定理の後半については$\frac{\int_0^{x_1'}g_1(x)dx}{x_1'}=\frac{\int_0^{x_1''}g_2(x)dx}{x_1''}=p_1$により、賣手に對しては$px_0-\int_0^{x_0}f(x)dx=(p-p_2)x_0$　買手1・2に對して夫々$\int_0^{x_1'}g(x)dx-px'=(p_1-p)x_1'$　$\int_0^{x_1''}g_2(x)dx-px_1''=(p_1-p)x_1''$となるからである。この場合には結托することによつて安定解の範圍が縮小される。買手間に結托が存在し、買手側の利得の合計を大ならしめようとして結托するときにも結局定理二、に歸着し安定解の範圍が縮小される。この場合提示せられた價格に對して買手側の利得を最大ならしめようとすると考えれば、安定解は定理二、の如くは與えられない。その時、

定理三　1　價格pが買手側の合成せられた限界評價曲線と賣手の平均評價曲線との交點のP座標の値より大ならば、賣手のベクトルは常に買手側の合成せられた限界評價曲線の上方にあり、買手1・2のベクトル(p,x')，(p,x'')は夫々の限界評價曲線上にある。又小ならば(p,x)は平均評價曲線上にあり、x'・x''は$g_1(x')=g_2(x'')$を滿足する。

しかしながらこれは必ずしも安定解とはならない。即ち、定理三、における解は結局は結托の存在し得ない場合における安定解によつて支配される。結托が本質的な意味を持つのは結托の存在しない場合における安定解によつても支配せられ得ない

ような解が導出せられ得る如き場合である。即ち安定解が更に擴張せられる場合である。例えば買手1から買手2へ手附aを與えることによつて、2に交換を斷念させる如き結托の場合には、

定理三　2　取引は賣手と買手1との間に行われ、その考察は一、において與えたものと同じになる。たゞし安定解となるための條件は、性質1のiiiと異り、$g_1(x_0')-\frac{a}{x_0'}\geqq p\geqq\frac{\int_0^{x_0'}f(x)dx}{x_0'}$と與えられ、買手1の歸屬は$a$だけ減り、買手2の歸屬は$a$だけ増加する。又手附$a$のとり得る範圍は$0<a<\int_0^{x_0'}(g_1(x)-f(x))dx$である。

aそのものの決定は一般的には買手間の强氣・弱氣によつて決定せられる。もし買手2が極めて强氣であるならば、結托の存在しない場合において2が取得し得るであろう最大の利得以上を要求するであろう。從つてこの時$\int_0^{x_0''}(g_2(x)-f(x))dx\leqq a$となる。かゝる手附$a$を與え得る爲には買手1は2よりも取引においてより支配的な立場になければならぬ。

この場合の外に買手2をして取引量の一部を斷念せしめる如き結托も考えられ得るがこゝでは省略する。次に賣手と買手の間に例えば買手1との間に結托が行われる場合、もし提示せられた價格の下に利得をより大ならしめようとして結托するならば、次の如き定理が成立する。

定理四　1　賣手と買手1の限界評價曲線の交點のP座標をp_0''とし、$p_0''>p$とすれば、一、における安定解がこの場合の取るべきベクトルである。そのとき買手2の取引量は零となる。又$g_1(x')=\frac{\int_0^{x''}g_1(x)dx}{x''}=f(x)\geqq p>p_0''$であるならば賣手、買手1のベクトルは夫々の限界評價曲線上にある。これ迄は安定解となり得る。これ以上の價格に對しては、$g_1(x')=f(x)$で買手2のベクトルは平均評價曲線上にある。これは必ずしも安定解ではない。たゞ$g_1(x')=g_2(x'')=f(x)$の場合、即ち賣手に最大利得を與え得るベクトルに對しては安定解となる。

次に買手1が賣手へ手附aを與えて買手2を取引から排除する如き結托の場合は　定理三の2と殆んど同樣の定理が成立する。更に買手1が賣手へ手附aを與えて自己の取引に對する價格を買手2に對する價格よりもより低からしむる如き結托も考えられよう。この場合には必ずしも從來の如き一物一價の法則が認められない。從つて利得函數の定義も若干異つてくる。くわしい考察は省略するが安定解の條件として次の定理が成立する。

定理四　2　買手1の價格が2の價格より一定のqだけ結托により低くなる時、安定解は次の二條件のどちらかを滿す$x\cdot x'\cdot x''\cdot p$によつて與えられる。

$p-q\frac{x'}{x}=f(x)$, $p=g_1(x)$ 又は $p-q\frac{x'}{x}=f(x)$, $p-q=$

$$g_2(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

右以外の場合 $\dfrac{x''}{g_2(x'')-p}+\dfrac{x'}{g_1(x')-(p-q)}$

$$=\frac{x(g_2(x')-(p-q))-qx'}{(f(x)-p)(g_2(x'')-(p-q))} \cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

このとき賣手への歸屬は $px''+(p-q)x'-\int_0^x f(x)dx+a$、買手1への歸屬 $(p-q)x'-\int_0^{x'} g_1(x)dx-a$、買手2への歸屬は $px''-\int_0^{x''} g_2(x)dx$ である。こゝに a は買手1より賣手への手附を示す。

以上結托の存在する場合について若干考察したのであるが、更に程度の種々に異る結托を考えることも可能であろう。かゝる結托により明かに（例えば 定理三の2あるいは 定理四の2の如く）結托の存在しない場合におけるものとは異つた新たな安定解の集合を導出し得た。更に一般的にいつて取引を有利とする價格ないし財量の組合せは無數に成立して交換は極めて複雜な様相を提示する。[註]

註 この學註においては、變數に對して連續性が假定されている。遊戯の理論においても又本文においても變域はすべてディスクリートな有限の領域である。連續性の假定はもとよりその近似的な表現であつて、本質的な面については何等變る所がない。しかし若干異同はある。從つて連續を假定することによつて有限分析の内のあるものがネグレクトされるであろう。しかし連續性の假定の中には大きな長所がある。利得無差別曲線の形態ないし以下に展開される一般論の究明等にあたつてそれが明かとなろう。

三 多數人交換

賣手を m 人、買手を n 人とし、その限界評價函數及び平均評價函數を夫々、

$$\left.\begin{aligned} &p=f_i(x),\ p=q_j(x), \\ &p=\frac{\int_0^x f_i(x)dx}{x},\ p=\int_0^x g_j(x)dx,\ \begin{matrix} i=1,\cdots,m \\ j=m+1,\cdots,m+m \end{matrix} \end{aligned}\right\}\cdots(15)$$

とする。これは非零和 $(m+n)$ 人遊戯即ち一般遊戯である。その利得函數は次の如く與えられる。

$\sum_{i=1}^{m} x_i=\sum_{j=m+1}^{m+n} x_j$ のとき、

$$\int_0^{x_j} g_j(x)dx-px_j=\Omega_j((p,\ x_1),\ (p,\ x_2),\ \cdots(p,\ x_{m+n}))$$

$$px_i-\int_0^{x_i} f(x)dx=\Omega_i((p,x_1),\ \cdots,(p,x_{m+n}))\cdots\cdots(16)$$

賣手・買手の合成せられた限界評價函數を夫々 $p=f(x)$, $p=g(x)$ とする。その合成の方法は $p=f_i(x)$ を滿す x の値を夫々 x_i とし、$\Sigma x_i=x$ としてこの x と p との關係を $p=f(x)$ とすればよい。賣手ならびに買手の平均評價函數を夫々合成すれば、

$p=\dfrac{\int_0^x f(x)dx}{x}$, $p=\dfrac{\int_0^x g(x)dx}{x}$ となる。以下證明を省略するが次のような定理が成立する（證明の方法は本質的には 二によ る）。

定理一　安定解となる爲の必要且つ十分條件は（結托が存在しないとして）次の二つの條件のどちらかをみたす。

$$\sum_{j=m+1}^{m+n} \frac{x_j}{g_j(x_j)-p} = \sum_{i=1}^{m} \frac{x_i}{f_i(x_i)-p} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

少くとも一つの i、同時に少くとも一つの j に對して、$f_i(x)=g_j(x_j)=p$ ……………………………………(18)

そのとき買手に對する歸屬は $\int_0^{x_j} g_j(x)dx - px_j$、賣手に對する歸屬は $px_i - \int_0^{x_i} f_i(x)dx$ である。

結托が存在する場合には取引は更に複雜となり、安定解の領域も擴張せられ得るが、こゝでは買手側全部が結托し、賣手側全部が結托する場合を定理として示しておく。

定理二　賣手側及び買手側の合成せられた限界評價曲線の交點を (x_0, p_0) として、$p_0=f_i(x)$, $p_0=g_j(x)$ の根を夫々 x_{0i}・x_{0j} とすれば、それ等が各交換者の安定な取引量となる。又そのときの賣手の歸屬は $(p-p_2)\,x_{0i}$ であり、買手の歸屬は $(p_1-p)x_{0j}$ となる。又歸屬の合計卽ちサープラスは $(p_1-p_2)\,x_0$ となる。

今迄の所では一財の取引が問題とされていた。二財以上になると事情は極めて複雜してくる。この場合もとより財の代替性・補完性・獨立性が考慮せられねばならないが、[註] 取引せられる財がすべて獨立財である場合は次の如く考えればよい。こゝに獨立財とは一財の取引量の變化が他財の評價に何等變化を及ぼさないような財として定義される。この場合には財の種類別に夫々獨立に一財市場を考察し、今迄考究して來た方法を適用すればよい。卽ち交換者を1・2・……・lとし、財をI・II・……・Mとすれば、α 財に對する限界評價函數は

$$p_\alpha = f_{\alpha i}(x_\alpha),\quad p_\alpha = g_{\alpha j}(x_\alpha) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (19)$$

となる。こゝに i……j は α 財に關して夫々賣手・買手となる人々を表わす。これは多人數一財交換の場合である。その安定解を求め、それをすべて合わせればよい。但し結托の存在が認められる場合においては更に一層その複雜さは增大する（本文五節參照）。

註　財が獨立でない場合には各財間の評價の相互關係を考慮しなければならぬ。近代經濟學においてはそのような財評價の相互關係の問題は、效用函數の立場のもとでは無差別曲線の方法を用いて考究せられている。遊戲の理論においても效用の問題が特に對象とされ、若干考究せられている。それはもとより遊戲の理論の本論から若干離れるテーマではあろうが、矢張り評價の問題はかゝる面からの考究に待つ所が大であろう。更にもし效用函數ないし無差別曲線の立場を考慮するとすれば、サープラスを貨幣タームで表現する方法は特殊なものであるとも云えようし、手附の附與が評價そのものには影響しないという暗默の前提（二、參照）も未だ不十分なものであろう。しかしこゝではそこに極めて大きな困難（例えば效用可測性の如き）が含まれていることを指摘するに止めよう。