經濟變動の構造分析に關する覺書

荒 憲治郎

一九四九年の論文で、レオンティフは自己の理論體系が、單に靜學的投入産出表の分析に留らず、例えばストックの時間的變化率若しくは變化量をも考慮に入れた動學體系にまで擴張せらるべき可能性を指摘してゐる。(1) これはフリッシュ流の巨視的動學及びサムエルソン流の微視的動學に對して、産業構造の動學分析といふ一つの興味ある問題を示唆してゐる。

ここで分析しようとする問題は、第一に乘數の理論、第二に加速度の理論、第三に此の二つの理論を結合した型の變動理論を、動學的レオンティフ體系の基礎の上に立つて分析することである。第一の問題は既に R. M. Goodwin によつて彫琢され、(2) 違つた形で J. S. Chipman によつて分析されてゐる。(3) 第二の問題は、微分方程式の體系で D. Hawkins によつて採上げられ、有意義な歸結が與えられた。(4) 以下の分析は、此れらの所論を跡付け、更に構造的變動理論に對する一つの覺書を提示することを目的とするものである。

(1) W. Leontief, "Recent Developments in the Study of Interindustrial Relationships," Ame. Eco. Review, May, 1949, pp. 211—240.

(2) R. M. Goodwin, "The Multiplier as Matrix", Eco. Journal, Dec., 1949, pp. 537—555.
〃 , "Does the Matrix Multiplier oscillate ?" Eco. Journal, Dec., 1950, pp. 764—770.

(3) J. S. Chipman, "Professor Goodwin's Matrix Multiplier" Eco. Journal, Dec., 1950, pp. 754—763.
〃 , "The Multi-Sector Multiplier", Econometrica. Oct., 1950, pp. 355.—374.

(4) David Hawkins, "Some Conditions of Macroeconomic Stability" Econometrica, Oct., 1948, pp. 309—322.
〃 and H. A. Simon, "Note: Some Conditions of Macroeconomic Stability" Econometrica, Oct., 1949, pp. 245—248.

第一章　動學的乘數の構造理論

無時間的でありマクロ的であるケインズの乘數理論は、動學化の方向に對して幾多の展開が行はれて來た。しかし動學化の過程を辿りながら、更にこれを產業間の構造理論に結付けようとする試みは、極めて最近のことにしか過ぎない。吾々は主としてグッドウインの所論に從つて分析を進めるが、マクロ的乘數理論では解明することの出來ない重要な歸結が、構造的乘數理論によつて始めて明白にせられ得ることを知るであろう。

今、政府及び國際貿易を捨象した n 個の產業部門を想定し、各部門は夫々單一の財を生產し販賣するものと假定す

る。但し第 n 部門は家計部門である。部門を示すに添字を以ってし、更に記號を次の樣に定めよう。

y_i ＝第 i 部門における賣上高

y_{ij} ＝第 j 部門の第 i 部門への支出高

a_{ij} ＝第 j 部門の第 i 部門への限界支出係數

b_{ij} ＝第 j 部門の第 i 部門への定常的支出高

以下において吾々は、考察せらるべき期間に亙つて凡ての限界支出係數が不變であり、更に凡ての對外支出係數が非負であり（$a_{ij} \geqq 0$）、對內支出係數に關しては（$1-a_{ii}>0$, $a_{ii} \geqq 0$）が成立すると前提する。

假て、或る期における各部門の賣上收入が、一期前の他部門からの總收入額に等しいものと假定すれば、次の連立方程式を得る。

$$(1.1)\qquad y_i(t+1)=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j(t)+\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \qquad (i=1.2.\cdots\cdots n)$$

簡單の爲に、マトリックス及び列ヴェクトルを次の樣に定義しよう。

$$[a]=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad y(t+1)=\begin{pmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \\ \vdots \\ y_n(t+1) \end{pmatrix} \quad y(t)=\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{pmatrix} \quad b=\begin{pmatrix} \sum_{j=1}^{n} b_{1j} \\ \sum_{j=1}^{n} b_{2j} \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^{n} b_{nj} \end{pmatrix}$$

かくして (1.1) 式は次の樣に略記せられる。

(1.2)　$y(t+1)=[a]y(t)+b$

これは非同次線型の一階定差方程式である。所で、一般に非同次定差方程式の解は、その同次方程式の一般解と特殊解の和として規定される。従つて先ず、$y_i(t+1)=y_i(t)=\bar{y}_i$ なるが如き特殊解を求めるならば、クラマーの公式より

(1.3)　$\bar{y}_i=\Delta_i/\Delta$ 　　　　$(i=1.2.\cdots\cdots n)$

によつて與えられる。玆に、Δはマトリックス $[\mathrm{I}-a]$ の行列式であり、Δ_iはΔの第i列をヴェクトルbで置換して得られる行列式を示してゐる。(1.3)式を再びマトリックス記號で表示するならば

(1.4)　$\bar{y}=[\mathrm{I}-a]^{-1}b$

に略記せられる。次に、同次方程式の一般解は、一應形式的には

(1.5)　$Y_i(t)=\sum_{j=1}^{n}h_{ij}\,u_j{}^t$ 　　　　$(i=1.2.\cdots\cdots n)$

の形で與えられる。ここにh_{ij}は初期條件によつて決定せられる常數であり、u_jは(1.2)式の右邊を零ヴェクトルとした場合に $y(t+1)=uy(t)$ として得られる特性行列の行列式

(1.6)　$$\Delta(u)\equiv|\mathrm{I}u-a|=\begin{vmatrix} u-a_{11} & -a_{12} & \cdots\cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & u-a_{22} & \cdots\cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots\cdots & u-a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

によつて決定される根である。再び(1.5)式をマトリックス記號で示すならば、

(1.7)　$Y(t)=[h]u^t$

で與えられる。かくして(1.2)式の完全な解は

$$(1.8)\qquad y(t)=[\mathrm{I}-a]^{-1}b+[h]u^{t}$$

となる。茲に$[I]$はn次の單位行列である。

仍て、一見して明かな樣に、時間tに對してu^{t}なる型の運動は、uの絶對値が一より小である時には安定である。若し此の條件がみたされてゐるとすれば、(1.8)式の右邊の第二項は、時間の經過と共に漸次零に收斂するであろう。從つて$|u|<1$なるが如き條件を與えることが問題になる。

今、比較的緩やかな制限として、凡ての部門における總支出係數$\sum_{i=1}^{n}a_{ij}=\alpha_j\ (j=1.2\cdots\cdots n)$が悉く一より小であると假定しよう。此の場合には

「uが行列$[a]$の固有値であり、αが列の元素の絶對値の和の最大のものであり、且つβが行の元素の絶對値の和の最大のものであるならば、

$$(1.9)\qquad |u|\leqq min(\alpha.\beta)\qquad max_{i}\sum^{n}|a_{ij}|=\alpha\qquad (j=1.2\cdots\cdots n)$$

$$max_{j}\sum^{n}|a_{ij}|=\beta\qquad (i=1.2\cdots\cdots n)$$

が成立する」(1)

ことが知られてゐるから、總支出係數が凡て一より小であるといふ假定（グッドウインの假定）の下では、體系は必ず安定である。

然し吾々は、更に條件を强め、高々一個の部門の總支出係數にして一より小ならば、依然として上述の安定條件が滿足されることを示すことが出來るであろう。此れを示すために、先ず初期條件 $y(0)$ から出發し、逐次反復的に $y(1)$, $y(2)$, …… の運動を求めるならば、

$$(1.10)\qquad y(t)=[I+a+a^2+\cdots\cdots+a^{t-1}]b+[a]^t y(0)$$

を得る。若し、$t\to\infty$ と共に $[a]^t\to[0]$ となるならば、命題は證明せられたこととなる。今、$[a]^t=[a_{ik}^{(t)}]$ としよう。これを任意の i 列について展開すれば $\sum_i^n a_{ik}^{(t)}=(\sum_i^n a_{i1}^{(t-1)})a_{1k}+\cdots\cdots+(\sum_i^n a_{in}^{(t-1)})a_{nk}$ となる。所で、各列の總和のとり得る上限値を α とすれば、少くとも一つの列について α よりも小なる總和が存在する。從つて $\sum_i^n a_{ik}^{(t)}<\alpha(\sum_i^n a_{ik}^{(t-1)})$ が成立しなければならない。然るに $\alpha\geqq 1$ なる故、$\sum_i^n a_{ik}^{(t)}<\sum_i^n a_{ik}^{(t-1)}$ 從つて $[a]^t<[a]^{t-1}$ が成立する。t は任意の數値をとり得るから、吾々の命題も亦證明せられた。(2) かくして次式を得る。

$$(1.11)\qquad \lim_{t\to\infty} y(t)=[I-a]^{-1}b$$

これはマクロ的乘數理論において、限界消費性向の一より小なることが、經濟體系の安定條件であることと對應する。而も一見して明かな様に、(1.11)式は乘數理論に周知の「新支出の繼續的注入の乘數效果」と著しい類似性を持つてゐるから、吾々は行列 $[I-a]^{-1}$ を動學的行列乘數 dynamical matrix multiplier と名付けることが出來るであろう。

所で、乘數のマクロ分析において想定されてゐる様に、$y(t)$ が常に單調に monotonically 定常水準に接近する可能性は保證されるであろうか。吾々は二つの面から、此のことが不可能であることを知る。

第一に、任意の初期條件に對して、(1.6)式の特性根 u の中に負根又は複素根の存在する時には、$y(t)$ の時間徑路は振動

するかも知れない。今、行列$[a]$の各元素が凡て正であるとしよう（行列の或る元素が0なる時には、正になる様に産業部門を統合すれば可能である）。此の場合にはフロベニュスの定理が適用され[(3)]、優根は正の實數で單根である。勿論、吾々の場合では一より小なる數である。從つて、或る時期を超えると劣根の作用は無視することが出來るであろう。然しながら、0時點に近い段階では、負又は複素數の劣根が、あるひは$y(t)$の單調運動を破壞するかも知れない。これはマクロ的乘數理論では解明することの出來ない、そして構造的乘數理論により始めて可能とせられる命題である。

二つの産業部門の場合について、數字例によつて檢討しよう。(1.2)式に次の形を與える。

$$\begin{pmatrix} Y_1(t+1) \\ Y_2(t+1) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.4 \\ 0.6 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} Y_1(t) \\ Y_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

今、定常支出を $B_1=80$ $B_2=20$ と置けば、

$$Y_1(t)=225+C_1(0.742)^t+C_2(-0.242)^t$$

$$Y_2(t)=194+C_1(1.105)(0.742)^t-C_2(1.355)(-0.242)^t$$

が求められる一般解である。C_1C_2にして決定されれば、吾々は所望の$Y(t)$の運動を求めることが出來る。例えば$C_1=10$ $C_2=2$ としたる場合の$Y(t)$の系路を示せば

$$\text{(I)}\quad \begin{array}{cccccccccc} t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \infty \\ \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 233 \\ 208 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 233 \\ 201 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 230 \\ 200 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 229 \\ 198 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 228 \\ 197 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 227 \\ 196 \end{pmatrix} & \cdots\cdots & \begin{pmatrix} 225 \\ 194 \end{pmatrix} \end{array}$$

となり、單調に運動は定常解に收斂する。然し乍ら例えば $C_1=2,\ C_2=10$ としたる場合の運動は、

$$
\text{(II)}\quad
\begin{array}{cccccccccc}
t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \infty \\
\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}225\\212\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}232\\197\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}228\\199\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}228\\197\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}227\\196\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}226\\195\end{pmatrix} & \cdots\cdots & \begin{pmatrix}225\\194\end{pmatrix}
\end{array}
$$

の型をとる。卽ち初期條件の如何によつて、若干の期間に亙つて振動を示す。而も初期條件は負の數値もとり得るから、例えば $C_1=1,\ C_2=-50$ に對しては、

$$
\text{(III)}\quad
\begin{array}{cccccccccc}
t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \infty \\
\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}276\\128\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}214\\211\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}228\\191\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}225\\195\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}226\\194\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}225\\194\end{pmatrix} & \cdots\cdots & \begin{pmatrix}225\\194\end{pmatrix}
\end{array}
$$

の如き可成りの期間に亙る振動の可能性が存在する。

第二に、より重要なことは、體系が既に均衡にあり、定常的支出のマクロ的總量には變化がない場合にも、尙振動の可能性が存在する。それは支出構成の比率に變動の生ずる場合である。例えば(I)の場合について、$B_1=80\ B_2=20$ の下に、既に均衡水準に到達してゐたと假定しよう。今、その總額には變化がなく、$B_1=70\ B_2=30$ にその構成が變化したとする。その時の系列は次の樣になる。

$$
\text{(IV)}\quad
\begin{array}{cccccccccc}
t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & \infty \\
\begin{pmatrix}Y_1\\Y_2\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}225\\194\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}215\\204\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}216\\200\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}215\\200\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}215\\199\end{pmatrix} & \begin{pmatrix}214\\199\end{pmatrix} & \cdots\cdots & \begin{pmatrix}212\\191\end{pmatrix}
\end{array}
$$

此の歸結は、一般に總體分析では解決することの出來ない經濟の變動が、構造そのものの變化によつて生じ得ること

を明示してゐる様に思はれる。

仍て上述の分析が、多くの單純化された假定のモデルに依據してゐることは承認せられねばならないであろう。第一に全ての係數が不變であるといふこと、第二に全ての部門における支出ラッグが均齊であること、などがそれである。然し、それらの單純化にも拘らず、少くともマクロ的乘數分析に對する構造的分析の優位性は主張し得ると考える。

(1) 此の命題の所在は、學部學生江口英一君によつて提示された。その他多くの點で同君の御示唆を受けた。
W. V. Parker, "Characteristic Roots and Field of Values of a Matrix," Bulletin of the American Mathematical Society, March, 1951, p. 105.

(2) 此の意味で、グッドウインの假定は餘りにもルウズである。而も論證の過程にも誤りがある。

(3) フロベニウスの定理「若しマトリックスAの元素が悉く正の實數であるならば、その特性方程式は正の一つの單根を持ち、その絶對値は他の凡ての根よりも大きい。」
Goodwin, "Does the Matrix Multiplier Oscillaite?" p. 766.

第二章　加速度原理の構造理論

經濟變動の時間構造に對して、乘數波及の效果よりも、生産水準の時間的變化率に伴ふ資本財の需給が、遙かに大なる效果を持つことは、巨視的動學理論に一般に承認された見解である。前章で吾々は、定常的支出bを時間からは全く獨立なものとし、何等の積極的分析を加えなかつた。然し一度生産所得の時間的變化率を考察の對象とするなら

ば、經濟體系は最早、生産所得の時間的變化率、從つて加速度因子の作用からは獨立たり得ない。此の章では一應、乘數の時間構造、從つて支出ラッグを問題の視野の外におき、加速度原理に伴ふ産業間の結合關係を檢討しよう。

記號については前章のまゝにして置き、定常支出bに關し次の方程式を假定する。

$$(2.1)\qquad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = \sum_{j=1}^{n} k_{ij} + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \qquad (i=1.2.\cdots\cdots n)$$

玆にk_{ij}は第j部門の生産所得の變化率に應ずる第j部門から第i部門への支出高、(從つて第i部門から第j部門への資本財の供給額)を示し、d_{ij}は前章におけるb_{ij}と同様に、時間を通じてコンスタントなる支出高を示してゐる。今、$c_{ij}=k_{ij}/y_j$とすれば、(1.1)式に對して次の方程式が得られる。

$$(2.2)\qquad y_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, y_j(t) + \sum_{j=1}^{n} c_{ij}\, \dot{y}_j(t) + \sum_{j=1}^{n} d_{ij} \qquad (i=1.2.\cdots\cdots n)$$

新らしく行列及び列ヴェクトルを

$$[C] = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots\cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots\cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \cdots\cdots & c_{nn} \end{pmatrix} \quad \dot{y}(t) = \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \\ \vdots \\ \dot{y}_n(t) \end{Bmatrix} \quad d = \begin{Bmatrix} \Sigma d_{1j} \\ \Sigma d_{2j} \\ \vdots \\ \Sigma d_{nj} \end{Bmatrix}$$

と規定すれば、(2.2)式は次の様に略記される。

$$(2.3)\qquad y(t) = [a]y(t) + [c]\dot{y}(t) + d$$

此れは非同次線型の一階微分方程式である。

仮て問題の處理方法は、大體定差方程式系と同様になし得るから、先ず(2.2)式より $y_i(t)=0$ なるが如き特殊解 $\bar{y}_i$ を求めるならば、クラマーの公式に從つて

$$(2.4)\qquad \bar{y}_i=D_i/D \qquad (i=1.2.\cdots\cdots n)$$

を得る。玆に D は $[I-a]$ の行列式であり、D_i は D の第 i 列をヴェクトル d で置換して得られる行列式である。(2.4)式を再びマトリックス記號で表示すれば、次の如くなる。

$$(2.5)\qquad \bar{y}=[I-a]^{-1}d$$

次に、同次方程式の一般解は

$$(2.6)\qquad Y_i=(t)\sum_{j=1}^{n}k_{ij}\,e^{\lambda_j t} \qquad (i=1.2.\cdots\cdots n)$$

によつて與えられる。玆に、k_{ij} は初期條件によつて決定される適當な常數であり、λ_i は(2.2)式に $y_i(t)=k_i e^{\lambda t}$ を代入して得られる特性方程式

$$(2.7)\qquad \Delta(\lambda)\equiv|I-a-\lambda c|=\begin{vmatrix} 1-a_{11}-\lambda c_{11} & -a_{12}-\lambda c_{12}\cdots\cdots & -a_{1n}-\lambda c_{1n} \\ -a_{21}-\lambda c_{21} & 1-a_{22}-\lambda c_{22}\cdots\cdots & -a_{2n}-\lambda c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1}-\lambda c_{n1} & -a_{n2}-\lambda c_{n2}\cdots\cdots & 1-a_{nn}-\lambda c_{nn} \end{vmatrix}=0$$

から決定される特性根である。再び(2.6)式をマトリックスで表示すれば、

$$(2.8)\qquad Y(t)=[K]e^{\lambda t}$$

の形に略記される。かくて(2.3)式の一般解は、

$$(2.9) \qquad y(t)=[I-a]^{-1}d+[K]e^{\lambda t}$$

となるであろう。

偖て、前章の定差方程式系とは異り、微分方程式系に立つ本章では、(2.9)式の右邊第二項が零に收斂する爲には、凡てのλが必ず負の實數部を持たねばならない。何故ならば、時間tの經過に對し$e^{\lambda t}$なる型の運動は、指數λが負の實數部を持つ時においてのみ安定であるからである。そして此の條件を規定するものが、周知のフルウイッツの條件に外ならない。(1) 即ち、λに關するn次の多項式

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0 \quad (a_0>0)$$

の根の實數部が凡て負となる必要且つ充分な條件は、n個の判定行列式

$$D_1=a_1,\ D_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\cdots\cdots,D_n=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 & \cdots\cdots 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & \cdots\cdots 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & \cdots\cdots 0 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \cdots\cdots & a_n \end{vmatrix}$$

が凡て正となることである。以下において、吾々は二部門の產業構造における此の條件の經濟的意味を尋ねよう。

先ず二つの產業の場合の特性方程式(2.7)を展開すれば次の如くである。

$$(2.10) \qquad |I-a-\lambda c|=\begin{vmatrix} 1-a_{11}-\lambda c_{11} & -a_{12}-\lambda c_{12} \\ -a_{21}-\lambda c_{21} & 1-a_{22}-\lambda c_{22} \end{vmatrix}=0$$

$$\therefore\quad \lambda^2\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}+\lambda\left\{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}\right\}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}=0$$

但し　$a_{ii}-1=b_{ii}<0$　$a_{ij}=b_{ij}\geqq 0$

今、λ^2の係數を常に正ならしめる爲に、兩邊を$\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}$で除しておくならば、經濟が安定である爲の必要且つ充分なる條件は、

$$(2.11)\qquad D_1=\left\{\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}\right\}\Big/\begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix}>0$$

が成立することである。前提によりb_{11}及びb_{22}は必ず負であるから分子は負、從つて又、分母も負でなければならない。

即ち

$$(2.12)\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22}\end{vmatrix}<0$$

所で、任意の行又は列の各元素に、對應する他の行又は列の各元素を加えて出來た行列式は、元の行列式と等値であるから、

$$(2.13)\qquad \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{11}+c_{12} & c_{12}+c_{22}\end{vmatrix}<0$$

が成立する。$c_{11}+c_{21}=c_1$, $c_{12}+c_{22}=c_2$　とすれば

$$(2.14)\qquad c_{12}/c_2-c_{11}/c_1>0,\quad c_{ij}/c_j-c_{ii}/c_i>0$$

となる。此の不等式の意味する所は、各部門の資本支出は、自己内資本財に對する支出よりもより多い比率で、他部門の資本財に對する支出として現はれるといふことである。かかる状態をホーキンスに從ひ[2]、資本財需給の tightly coupling と名付け、その逆を loosely coupling と名付けるならば、二部門構造における經濟の動學的安定性は、二つの産業の間に、資本財需給に關する tightly coupling の存在する時において滿たされ、逆にその不安定性は、二つの産業の間に loosely coupling が存在する時において生ずると言ひ得るであろう。その意味において、二つの部門の間に資本の交流を考えないマルクス再生産表式は[3]、本來的には不安定な基礎の上に立つてゐると言ひ得る。

仍て、吾々は同様の手續によつて、産業が三つ以上に區分される場合についても考察を進めることが出來るであろう。然し、それを一般的に意味ある定理として提出することは殆ど不可能である。その場合々々に應じた特殊の限定を附した上で、特性根の決定を計らなければならない。併し乍ら、その故を以つて、上述の構造分析が無意味である、とは論斷し得ない。少くとも、總量としての資本がどの部門に流れるかによつて經濟の安定性が左右される以上、單に總量だけで滿足する立場に對しては、尙検討されるべき多くのものが殘されてゐると考えられる。

(1) 安井琢磨「經濟的均衡の動學的安定條件」經濟思潮第九集十三頁。

(2) 尙 Coupling の問題については、
Goodwin, "Dynamical Coupling with Especial Reference to Markets having Production Lags," Econometrica, July, 1947, pp. 181—204.

(3) 都留重人「國民所得と再生産」二五一頁。

仮て最後に、吾々は、經濟變動の理論を完結させる爲に、第二章において保留しておいた問題、即ち支出にタイム・ラッグを持つた體系での加速度原理の作用について檢討しなければならない。この爲に吾々は、例えばヒックスの方法に倣つて、加速度原理の作用を定差方程式の體系に切換える。このことは必ずしも必要なことではないが、定差微分の混合形態に伴ふ困難な問題——特に特性方程式が超越函數になるといふ問題——を回避するためにも有用な方法であると考えられる。かくして吾々の出發となる基本的方程式は

(3.1)　$y(t+1)=[a]y(t)+[c]\,\Delta y(t)+d$

の形によつて與えられるであろう。定差法に從ひ、

(3.2)　$\Delta y(t)=y(t)-y(t-1)$

であるから、(3.1)式は次の樣に書換えられる。

(3.3)　$y(t+1)=[a+c]y(t)-[c]y(t-1)+d$

此れは非同次線型の二階定差方程式である。先ず、$y(t+1)=y(t)=y(t-1)=\bar{y}$ なるが如き定常解を求めるならば、クラマーの公式により

(3.4)　$\bar{y}_i=\Delta^i/\Delta$　　　$(i=1,2,\ldots\ldots n)$

或ひは、此れをマトリックス記號で

(3.5)　$\bar{y}=[I-a]^{-1}d$

によって與えられる。玆に$\varDelta$は行列 $[I-a]$ の行列式であり、$\varDelta_i$は$\varDelta$の第i列をヴェクトルdにより置換したる行列式である。但し$[I]$はn次の單位マトリックスを示す。

次に、一般解を求める爲に、$d=0$ としたる場合の同次方程式

(3.6)　$Y(t+1)-[a+c]Y(t)+[c]Y(t-1)=0$

或ひは $Y(t+1)=\rho Y(t)=\rho^2 Y(t-1)$ と置いて、

(3.7)　$[I\rho^2-(a+c)\rho+c]Y(t)=0$

より$Y(t)$を決定しなければならない。$Y(t)\neq 0$ であるから、特性方程式が0となる。即ち

(3.8)
$$\varDelta(\rho)\equiv|I\rho^2-(a+c)\rho+c|=\begin{vmatrix}\rho^2-(a_{11}+c_{11})\rho+c_{11} & -(a_{12}+c_{12})\rho+c_{11}\cdots\cdots & -(a_{1n}+c_{1n})\rho+c_{1n}\\ -(a_{21}+c_{21})\rho+c_{21} & \rho^2-(a_{22}+c_{22})\rho+c_{22}\cdots\cdots & -(a_{2n}+c_{2n})\rho+c_{2n}\\ \vdots & \vdots & \vdots\\ -(a_{n1}+c_{n1})\rho+c_{n1} & -(a_{n2}+c_{n2})\rho+c_{n2}\cdots\cdots & \rho^2-(a_{nn}+c_{nn})\rho+c_{nn}\end{vmatrix}=0$$

此れはρに關する$2n$次の多項式である。よって(3.7)式の一般解は

(3.9)　$Y_i(t)=\sum_{j=1}^{2n}h_{ij}\,\rho_j^{\,t}$　　　$(i=1.2\cdots\cdots n)$

或ひは、マトリックス記號で表示すれば

(3.10)　$Y(t)=[h]\rho^t$

である。玆にh_{ij}は初期條件によって決定される任意の常數である。かくて(3.3)の一般解は、

(3.11)　　$y(t)=[I-a]^{-1}d+[h]\rho^t$

となる。

仍て、既に明かにした様に、$t\to\infty$ と共に(3.11)式の右邊第二項が零に接近することが、此の場合の安定條件である。それは特性根 ρ の絶對値が凡て一より小であることによつて確保される。そしてその條件は既にシューアによつて與えられた。[1] 即ち(3.8)式の展開式

(3.12)　　$\Delta(\rho)=\rho^{2n}+a_1\rho^{2n-1}+\cdots\cdots+a_{2n-1}\rho+a_{2n}$

の係數より作られる判定行列式、

$$D_1=\begin{vmatrix}1 & a_{2n}\\ a_{2n} & 1\end{vmatrix},\quad D_2=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_{2n} & 0\\ 0 & 1 & a_{2n-1} & a_{2n}\\ a_{2n} & a_{2n-1} & 1 & 0\\ 0 & a_{2n} & a_1 & 1\end{vmatrix},\quad D_3=\begin{vmatrix}1 & a_1 & a_2 & a_{2n} & 0 & 0\\ 0 & 1 & a_1 & a_{2n-1} & a_{2n} & 0\\ 0 & 0 & 1 & a_{2n-2} & a_{2n-1} & a_{2n}\\ a_{2n} & a_{2n-1} & a_{2n-2} & 1 & 0 & 0\\ 0 & a_{2n} & a_{2n-1} & a_1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & a_{2n} & a_2 & a_1 & 1\end{vmatrix},\cdots\cdots$$

が凡て正であることである。然しここでシューアの條件を持出しても、一應形式的のことだけであつて、二階定差方程式の現在では、高々二つの産業構造においてさえその經濟的意味を一般的に求めることは、殆ど不可能であろう。但し、構造的視點を持たない巨視的立場に立てば、その特性方程式は

(3.13)　　$\rho^2-(a_{11}+c_{11})\rho+c_{11}=0$

となる。此れは吾々の體系では、一行一列の行列式である。シューアの條件によつて、二根の絶對値が共に一より小

なる條件は、

$$(3.14)\qquad \begin{vmatrix} 1 & c_{11} \\ c_{11} & 1 \end{vmatrix} = 1 - c_{11}^2 > 0 \quad \therefore |c_{11}| < 1$$

となることである。これはヒックスが、中間點以下の場合と名付けたる條件に相應ずる。その意味では、ヒックス流の巨視的動學理論は、ここで考察せる動學的レオンティフ體系の一つの極限の場合にしかすぎない。

似て、乗數の場合におけると同様に、(3.1)式を行列の冪級數に展開すれば、次式を得る。

$$(3.15)\begin{cases} y(1) = [a]y(0) + [c]\,\Delta y(0) + d \\ y(2) = [a]^2 y(0) + [a][c]\,\Delta y(0) + [c]\,\Delta y(1) + [a]d + d \\ y(3) = [a]^3 y(0) + [a]^2[c]\,\Delta y(0) + [a][c]\,\Delta y(1) + [c]\,\Delta y(2) + [I + a + a^2]d \\ y(t) = [a]^t y(0) + [I + a + a^2 + \cdots + a^{t-1}]d + \sum_{s=1} [a]^{t-s}[c]\,\Delta y(s-1) \end{cases}$$

既にみた様に、$t\to\infty$ と共に $[a]^t\to 0$ となり、從つて右邊第一項は零に收斂し、第二項は $[I-a]^{-1}d$ に收斂する。若し第三項が、t の無限大と共に0に收斂するか、或ひはある確定した水準に漸近するならば、體系は安定的であるだろう。以下において吾々は、二部門構造における $y(t)$ の變動につき、具體的數字例によつて檢討しよう。

(3.1)式の乗數行列に次の數字を代入する。

$$(3.16)\qquad \begin{Bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.4 & 0.2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta y_1(t) \\ \Delta y_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

或ひは此れを書換えるならば次の形をとる。

$$\text{(3.17)}\quad \begin{Bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3+c_{11} & 0.5+c_{12} \\ 0.4+c_{21} & 0.2+c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t-1) \\ y_2(t-1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

右邊第一項の行列を超乘數行列、第二項のそれを加速度行列と名付けよう。簡單な計算によつて、定常解は夫々 $\bar{y}_1=33$, $\bar{y}_2=27$ である。

case I. 超乘數行列の列の和が、一若しくはそれ以下の場合。

$$\text{(3.18)}\quad \begin{Bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.3+0.1 & 0.5+0.2 \\ 0.4+0.2 & 0.2+0.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.1 & 0.2 \\ 0.2 & 0.1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t-1) \\ y_2(t-1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$\text{特性方程式} = \rho^4 - 0.7\rho^3 - 0.1\rho^2 - 0.33\rho - 0.03 = 0$$

これより $y(t)$ の系路を求むれば、任意の初期條件 $y(0)=\{y_1(0)=23\ \ y_2(0)=18\}$ $y(1)=\{y_1(1)=25\ \ y_2(1)=19\}$ より

$$\begin{array}{ccccccccccc} t & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & & \infty \\ \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} & \begin{pmatrix} 23 \\ 18 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 25 \\ 19 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 27 \\ 22 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 30 \\ 24 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 32 \\ 26 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 33 \\ 26 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix} & \cdots\cdots\cdots & \begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix} \end{array}$$

が得られる。これは明かに減衰指數運動である。一以下の場合も同樣に妥當する。從つて超乘數行列の列の和が、一又はそれ以下であれば、シューアの條件は滿足される。

case II. 加速度行列の列の和が一以下であつて、且つ超乘數行列の列の和が一以上の場合。

$$\text{(3.19)}\quad \begin{Bmatrix} y_1(t+1) \\ y_2(t+1) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.8 & 0.9 \\ 0.8 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} 0.5 & 0.4 \\ 0.4 & 0.5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t-1) \\ y_2(t-1) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 10 \\ 8 \end{Bmatrix}$$

$$\text{特性方程式} = \rho^4 - 1.5\rho^3 + 6.84\rho^2 - 1.43\rho + 0.09 = 0$$

これより$y(t)$の系路を求むれば、

t	0	1	2	……	5	6	7	……	10	11	……	16	17	……	∞
$\begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix}$	$\begin{pmatrix} 23 \\ 18 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 25 \\ 19 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 28 \\ 23 \end{pmatrix}$	……	$\begin{pmatrix} 41 \\ 33 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 41 \\ 33 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 39 \\ 31 \end{pmatrix}$	……	$\begin{pmatrix} 26 \\ 20 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 26 \\ 20 \end{pmatrix}$	……	$\begin{pmatrix} 37 \\ 30 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 36 \\ 29 \end{pmatrix}$	……	$\begin{pmatrix} 33 \\ 27 \end{pmatrix}$

即ち此の運動は減衰週期運動を示してゐる。同様の經過は超乘數行列の一つの列が、一又は一以下であつても妥當する。從つて、此の場合にも、シューアの條件がみたされてゐるであろう。

偖て、吾々は、ここではなし得ない様な更に多くの數字例を追求することによつて、尙幾つかの有意義な歸結を導き出し得るかも知れない。勿論、二つの産業の歸結が、三つ若しくはそれ以上の部門構成にもそのまゝ妥當し得るかについては、一般的論斷はなし得ないであろう。恐らくや、A部門とB部門の間には、單に兩部門の間の直接的關係だけではなく、更にC部門を媒介とする關接的若しくは循環的結合關係が存在すると考えられる。然し、それらは凡て、一行一列の乘數行列と一行一列の加速度行列に立脚せる巨視的動學理論には解明することの出來ない問題である。經濟變動の過程を、例えば乘數行列や加速度行列の如き構造理論によつて把握しようとする試みは、既にしてケネーの經濟表以來、問題の意識としては古い歴史を持つてゐる。吾々は更に、經濟發展の問題、生産力の問題、資本蓄積の問題等に對しても、上述の産業構造分析が如何にして適用せられ得るかを示さなければならない。然しこれらは、レオンティフ體系の分析に殘されたる將來の課題である。

(1)　安井琢磨、前掲論文、二十七頁。