一橋論叢 第二十一卷 第一・二號

可補分配束論の初等的應用

山田欽一

内容

一 はしがき

論理學の領域に數學の形式的方法を應用するいわゆる記號論理學の考えは遠くライプニッツ[一]に發し、ブール[二]によつて基礎付けられ、ジェヴォンス[三]、ピアース、シュレーダー[四]によつて集大成された。他方數學の嚴密な立論を目指して、從來の形式論理學より強度の内容と高度の形式とをもつ新論理學を建設し、舊來の數學を再構成することがフ

レーゲ(五)、ペアーノによつて始められ、ホワイトヘッド(六)、ラッセル(七)によつて一應完成の域にもたらされた。

第一の流れはシュレーダーの主著「論理代數學」の標題からも讀み取られる通り、記號論理學を一つの代數學と見る。即ち記號論理學の基本原則は推理の法則を表現するために立てられたものではあるが、數學の立場である純形式的な觀點から、これら原則を任意の原則の上に立つ一つの代數を定むべき基本的な計算規則と考えるのである。(八)從つて、現今の抽象代數學でいう代數系(九)として、記號論理學を研究する立場といえよう。第二の流れは非ユークリッド幾何學發見を機として起つた數學者の側における數學の論理的性格の反省と(一〇)、集合論における逆理の出現を機とする數學の論理的構成の企圖とに力點をおくものと見ることができよう。

もしこのような考え方が許されるならば、第一のブール・シュレーダー流の記號論理學はいわゆる可補分配束論にその最も現代的な姿を見ることができ、第二のペアーノ・ラッセル流の記號論理學はいわゆるウィーン學團の科學論理學にその最も一般化した形を見ることができるといえよう。

次に記號論理學の現代的な二つの姿である束論(Lattice Theory)(一一)と科學論理學(Logistik)(一二)との應用を見るに、通常述べられるところは、束論については代數系の結合狀態即ち代數系の構造(一三)の研究への應用が主であり、科學論理學については數學、物理學又言語學基礎論(一四)への應用である。これらの應用がカールナップのいう新論理學の(舊論理學に比してはるかに)多面的な實用性(一五)であることを否むものではないが、抽象の基礎であるべき具體性を離れた多分に理論的な應用に偏したものであつて、記號論理學の古典乃至初等的な又實用的な應用が無視されてよい譯のものでもないし、又そのような應用こそ、ある意味で重視せねばならぬことと考える。

筆者は本稿で可補分配束論の古典・初等的應用[一六]へ注意を喚起すると共に、餘り顧られていない可補分配束方程式理論とその實用的應用とを述べ、冪法がないといわれるこの理論でも、方程式乃至函數については通常の代數學における次數に當る概念が構成できることを付け加える。順序として、以後の所論に必要な限度で可補分配束論の諸公式を誘導し（二）、これらによつて可補分配束方程式の解法を說き（三）、函數展開の應用として條件整理、消去法の應用として關係抽出のことに觸れ、これら古典的に有名な應用に加えて、新しく可補分配束多元方程式の集團構成への應用を述べ（四）、群論的考察によつて次數概念の構成を試みたい。（五）

註一　ライプニッツの記號論理學的な考え方については、L. Couturat: La Logique de Leibniz. Paris, 1901. Chap. VIII に詳しい。

註二　G. Boole: An Investigation of the Laws of Thought. London, 1854.

註三　W. S. Jevons: Pure Logic. London, 1864

註四　E. Schröder: Vorlesungen über die Algebra der Logik I–III. Leipzig, 1890–1905

註五　G. Frege: Die Grundlagen der Arithmetik. Breslau, 1884

註六　A. N. Whitehead: A Treatise on Universal Algebra. Cambridge University Press, 1898

註七　B. Russell and A.N. Whitehead: Principia Mathematica. I, II 2nd. ed. Cambridge University Press, 1925, -1927.

註八　L. Couturat: L'Algèbre de la Logique 2e éd. Paris, 1914 p. 3.

註九　正田建次郎、代數學通論　昭和二三年　二八頁。

註一〇　數學と論理學との現代的交涉については L. Couturat: Die philosophischen Prinzipien der Mathematik (deutsch von Siegel) Leipzig 序文参照。

註一一 G. Birkhoff: Lattice Theory. New York, 1940.

註一二 R. Carnap: Abriss der Logistik. Wien, 1929

註一三 正田 前掲書 第三章

註一四 Carnap; a. a. O., S. 70—97.

註一五 Carnap; a. a. O., S. 1.

註一六 J. Venn: Symbolic Logic 2nd ed. New York, 1894 Chapt. XIII

二 可補分配束

ここでは順序集合から始めて、一般束、モーヅル束、分配束と順を追って概念構成することを止め[一一]、直ちにA代數系として可補分配束の定義[一二]を掲げることとする。

集合Bの元[一三]a、b、c、……の間に次の諸條件をみたす二種の演算$\cap$と$\cup$が定義されているとき、Bはこの二つの演算$\cap$と$\cup$について可補分配束をなすという（以下ラテン小文字はBの元とする）。

$C_\cap$　$a \cap b = b \cap a$ はBの確定元である。

$C_\cup$　$a \cup b = b \cup a$ はBの確定元である。

$A_\cap$　$(a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$

$A_\cup$　$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c)$

D$_\cap$ $a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c)$

D$_\cup$ $(a\cup b)\cap(a\cup c)=a\cup(b\cap c)$

B$_\cap$ $a\cap(a\cup b)=a$

B$_\cup$ $a\cup(a\cap b)=a$

E$_\cap$ 凡てのaに對し $a\cap u=a$ となるuがある。

E$_\cup$ 凡てのaに對し $a\cup z=a$ となるzがある。

N 各aにつき $a\cap a'=z$, $a\cup a'=u$ の兩立するa'がある。

右の演算規則を通觀して知られる通り、$\cap$と$\cup$、又zとuとは全く對稱的になつている。從つてこれらだけから導き出される可補分配束の全理論が$\cap$と$\cup$、又zとuに關して對稱的になる。卽ちこの理論の中ではある定理と、その定理中にある$\cap$と$\cup$とを互いに、又zとuとを互いにいれかえて得られる今一つの定理とが必らず對稱的に對をなして現われることとなる。この事實を双對律[四]という。又今のべたような相互關係にある定理は互いに双對的であるという。

次節以下への準備として、簡單な定理を導き出しておこう。E$_\cap$のuは一意的である。それは別にかような元u_1があるとして $u\cap u_1$ を作り、C$_\cap$をつかえば $u\cap u_1=u_1\cap u$ となり、この左邊はu_1の性質からuとなり、この右邊はuの性質からu_1となり、$u=u_1$が結論されるからである。これと双對的にE$_\cup$のzも一意的となる。以下u、zはそれぞれ1、0とかく。

Nのa'も各aに對し一意的である。別にかような元a'_1があるとすれば $a\frown a'_1=0$ $a\smile a'_1=1$ から $a\frown a'_1=a\frown a'$, $a\smile a'_1=a\smile a'$ となる。第二式から $a'_1\frown(a\smile a'_1)=a'_1\frown(a\smile a')$、左邊に$\hat{B}$右邊に$\hat{D}$をつかえば $a'_1=(a'_1\frown a)\smile(a'_1\frown a')$。全く同様に $a'=(a'\frown a)\smile(a'\frown a'_1)$。この二式の右邊はさきの $a\frown a'=a'_1\frown a$ によって等しく、$a'=a'_1$ となる。Nのa'をaの補元という。

なお $a\frown b$ をaとbの交、$a\smile b$ をaとbの結という。(五)

Nのaとa'の對稱から $(a')'=a$ となる。

$\hat{E}$、$\hat{N}$、$\hat{D}$によって $a=a\frown 1=a\frown(b\smile b')=(a\frown b)\smile(a\frown b')$ 即ち

$$a=(a\frown b)\smile(a\frown b') \qquad (1)$$

$\hat{E}$によって $1\frown 0=0$、$\hat{E}$によって $1\smile 0=1$、即ち

$$1'=0 \qquad 0'=1 \qquad (2)$$

$\hat{B}$のbに $a\frown b$ を入れて $a\frown(a\smile(a\frown b))=a$、この括弧内に$\hat{B}$をつかえば $a\frown a=a$、これと双對的なものとをあわせて、

$$a\frown a=a \qquad a\smile a=a \qquad (3)$$

この二式を冪等律という。この式によって「可補分配束には冪も倍數もない(六)」ということがある。(もっともこれは、$\frown$を乗法、$\smile$を加法とみてのいい方である。)

$\hat{B}$のa、bに0、aを入れて $0\frown(0\smile a)=0$ この括弧内に$\hat{E}$をつかえば $0\frown a=0$、これと双對的なものとをあわせて、

$$a\frown 0=0 \qquad a\smile 1=1 \qquad (4)$$

Bの兩邊に $a'\cap b$ を結んで $a\cup(a\cap b)\cup(a'\cap b)=a\cup(a'\cap b)$、左邊の第二第三項に(1)をつかえば左邊は $a\cup b$ となり、

$$a\cup(a'\cap b)=a\cup b \qquad (5)$$

次に有名なド・モルガンの定理をのべる。

$(a\cap b)\cup(a'\cup b')=((a\cap b)\cup a')\cup b'$ (5)によつて右邊は $(b\cup a')\cup b'=(b\cup b')\cup a=1\cup a$ (4)によつて右邊は1、即ち $(a\cap b)\cup(a'\cup b')=1$。

$(a\cap b)\cap(a'\cup b')=(a\cap b\cap a')\cup(a\cap b\cap b')=(b\cap 0)\cup(a\cap 0)$ (4)によつて右邊は $0\cup 0=0$、即ち $(a\cap b)\cap(a'\cup b')=0$、かようにして $(a\cap b)'=a'\cup b'$ これと双對的なものとをあわせて

$$(a\cap b)'=a'\cup b' \qquad (a\cup b)'=a'\cap b' \qquad (6)$$

これがド・モルガンの定理である。

$a=a\cap b$ ならば、b'を交えて $a\cap b'=(a\cap b)\cap b'=a\cap(b\cap b')=a\cap 0$、右邊は(4)によつて0 即ち $a\cap b'=0$。逆に $a\cap b'=0$ ならば、(1)に入れて $a=(a\cap b)\cup 0$ 右邊はEによつて $a\cap b$、即ち $a=a\cap b$、従つて次のことがいえる。

$$a=a\cap b \text{ と } a\cap b'=0 \text{ とは同値である} \qquad (7)$$

Bの元と記號xとに $\cup$、$\cap$、′、1を有限回用いて得られる記號を函數といい $f(x)$ とかく。この記號に現われる凡てのxにBの元aを入れた結果を $f(a)$ とかき、aをxの値、$f(a)$ をその時の $f(x)$ の値という。xのとる値がBの元に限るときについては、xはBの元とあわせてBと同一演算法則に従うのであるから $f(x)$ は交若干個の結となる。次に各交のうちxを含むもの全體の結はDによりまとめて、$A\cap x$ となる。又各交のうち、x′を含むものはまとめて

$B\frown x'$ となる。最後に x も x' も含まぬ交の結を C とまとめて $f(x)=(A\frown x)\smile(B\frown x')\smile C$ となる。C を(1)によつて $(C\frown x)\smile(C\frown x')$ とかけば、$f(x)=((A\smile C)\frown x)\smile((B\smile C)\frown x')$ 結局 $f(x)=(a\frown x)\smile(b\frown x')$ となる。この兩邊で $x=1$ とおけば $f(1)=(a\frown 1)\smile(b\frown 1')=a\smile(b\frown 0)=a\smile 0=a$、$x=0$ とおけば $f(0)=(a\frown 0)\smile(b\frown 0')=0\smile(b\frown 1)=b$ となり

$$f(x)=(f(1)\frown x)\smile(f(0)\frown x') \qquad (8)$$

この右邊を左邊の展開(七)という。

$f'(x)$ についても同様に

$$f'(x)=(f'(1)\frown x)\smile(f'(0)\frown x') \qquad (9)$$

が成立つ。

交、結又補元と共に補助的な考えとして、二元 a、b の對稱差(八)とよばれるものがある。それは $(a\frown b')\smile(a'\frown b)$ のことで $a+b$ とかく。この考えは、筆者の研究によれば可補分配束論の或種の問題については著しい應用をもつ様で(九)あるが、ここには本稿に必要な限度でその初等的な性質に觸れておこう。

C_+

$(\smile)$ と $(\frown)$ について交換律 $C_\smile$、$C_\frown$ があるから

$$a+b=b+a$$

$$(a+b)+c=(((a\frown b')\smile(a'\frown b))\frown c')\smile(((a\frown b')\smile(a'\frown b))'\frown c)$$

$$=(a\frown b'\frown c')\smile(a'\frown b\frown c')\smile(((a'\frown b')\smile(a\frown b))\frown c)$$

$$=(a\frown b'\frown c')\smile(a'\frown b\frown c')\smile(a'\frown b'\frown c)\smile(a\frown b\frown c)$$

31

$$=(a\smallsmile((b'\smallsmile c')\smile(b\smallsmile c)))\smile(a'\smallsmile((b\smallsmile c')\smile(b'\smallsmile c)))$$

$$=(a\smallsmile((b\smallsmile c')\smile(b'\smallsmile c))')\smile(a'\smallsmile((b\smallsmile c'')\smile(b'\smallsmile c)))=a+(b+c)$$ 即ち結合律

A_+. $(a+b)+c=a+(b+c)$ が成立つ。

$$(a\smallsmile b)+(a\smallsmile c)=(a\smallsmile b\smallsmile(a\smallsmile c)')\smile((a\smallsmile b)'\smallsmile a\smallsmile c)$$

$$=(a\smallsmile b\smallsmile(a'\smile c'))\smile((a'\smile b')\smallsmile a\smallsmile c)=(a\smallsmile b\smallsmile c')\smile(a\smallsmile b'\smallsmile c)$$

$$=a\smallsmile((b\smallsmile c')\smile(b'\smallsmile c))=a\smallsmile(b+c)$$ 即ち $\smallsmile$ と＋の間に一種の分配律

D_+. $a\smallsmile(b+c)=(a\smallsmile b)+(a\smallsmile c)$ が成立つ。

＋自身の著しい性質としては

$$a+a=(a\smallsmile a')\smile(a'\smallsmile a)=0\smile 0$$

$$a+a=0 \qquad (10)$$

$$a+1=(a\smallsmile 1')\smile(a'\smallsmile 1)=(a\smallsmile 0)\smile a'$$

$$a+1=a' \qquad (11)$$

$$a+0=(a\smallsmile 0')\smile(a'\smallsmile 0)=(a\smallsmile 1)\smile 0$$

$$a+o=a \qquad (12)$$

$(a+b)'$ は(11)によって $(a+b)+1$ A_+によってこれは $a+(b+1)$ 再び(11)によって $a+b'$ 即ち

$$(a+b)'=a+b'=a'+b \qquad (13)$$

註一 Birkhoff; op. cit. 參照。

註二 完全な公理ではない。例えば獨立でないD、も列擧しておいた。むしろ可補分配束の全貌をみせるつもりで列擧した。

註三 集合とは範圍の確定した物の集りと考えてよい。その個々の物をその集合の元（ゲン）という。

註四 現代束論ではなお一般的な形で理解されているが、この形のものは Couturat; l'Algèbre p.21 Loi de dualité にみられる。

註五 英語の meet, join を譯したもの。

註六 Couturat; ibid. p. 13.

註七 Schröder; a. a. O., S 411 では微積分學のマクローリン展開との類似を説明している。

註八 英語の symmetric difference を譯したものである。

註九 本稿六參照。

三 可補分配束方程式（一）

可補分配束Bの二つの函數 $f(x)$, $g(x)$ の値を等しからしめるxの値がBの元中にあるとき、方程式

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

はBで可解であるといい、かような元をその根という。

(1)は $g(x)$ を加えて

$$f(x)+g(x)=g(x)+g(x)$$

33

となり、右邊に二の(10)をつかえば

$$f(x)+g(x)=0 \qquad (2)$$

となる。逆に(2)は $g(x)$ を加えて

$$(f(x)+g(x))+g(x)=0+g(x)$$

となり、左邊にA、二の(10)、(12)をつかえば $f(x)$ となり、右邊に二の(12)をつかえば $g(x)$ となるから $f(x)=g(x)$ となる。即ち(1)と(2)とは同値となる。換言すれば普通の代數と同じく、可補分配束でも方程式の右邊は0になおせるのである。

次に右邊が0である二つの方程式

$$f(x)=0 \quad g(x)=0 \qquad (3)$$

があれば、これを結んで右邊に $0\cup 0=0$ をつかえば

$$f(x)\cup g(x)=0 \qquad (4)$$

となり、逆に(4)があれば、$f(x)$ を交えて

$$f(x)\cap(f(x)\cup g(x))=f(x)\cap 0$$

左邊にB、右邊に二の(4)をつかえば、

$$f(x)=0$$

となる。即ち(3)と(4)とは同値となる。換言すれば普通の代數學とは異つて可補分配束では數個の一元方程式は一個に

まとめることができるのである。

以上の所論により、以後右邊が0の一元方程式一個

$$f(x)=0 \qquad (5)$$

だけを扱う。

(5)が可解でその根をαとすれば、

$$f(\alpha)=0$$

二の(8)によつて

$$(f(1)\frown\alpha)\smile(f(0)\frown\alpha')=0$$

$f(1)$、$f(0)$ を交えて、右邊に二の(4)をつかえば、

$$(f(1)\frown f(0)\frown f(1)\frown\alpha)\smile(f(1)\frown f(0)\frown f(0)\frown\alpha')=0$$

左邊に $f(1)\frown f(1)=f(1)$, $f(0)\frown f(0)=f(0)$ をつかえば、

$$(f(1)\frown f(0)\frown\alpha)\smile(f(1)\frown f(0)\frown\alpha')=0$$

$$f(1)\frown f(0)\frown(\alpha\smile\alpha')=0$$

$$f(1)\frown f(0)\frown 1=0$$

$$f(1)\frown f(0)=0 \qquad (6)$$

を得る。逆に(6)が成立てば、(5)の左邊のxに $f(0)$ を代入して

35

$$f(f(0))=(f(1)\smile f(0))\smile(f(0)\smile f'(0))$$

右邊第一項は(6)によって0、第二項はNによって0となり、

$$f(f(0))=0$$

を得、(5)が可解となる。即ち(6)は(5)の可解完全條件である。

又(6)は $f(\alpha)=0$ から α を消去した終結式とみることもできる。

次に(6)がみたされているとして、(5)の根の一般型、或いは(5)の解とでも名付くべきものを求めよう。

(5)は　$(f(1)\smile x)\smile(f(0)\smile x')=0$

となるが、$a\smile b=0$ の場合、$a\smile b=a+b$ であるため[三]

$$(f(1)\smile x)+(f(0)\smile x')=0$$

となる。x' に $1+x$ を入れて

$$(f(1)\smile x)+(f(0)\smile(x+1))=0$$

$\overset{+}{D}$ によって

$$(f(1)\smile x)+(f(0)\smile x)+f(0)=0$$

第一項第二項に $\overset{+}{D}$ をつかい

$$(f(1)+f(0))\smile x+f(0)=0$$

$f(0)$ を加えて

$$(f(1)+f(0))\frown x=f(0) \tag{7}$$

(6)によって

$$(f(1)+f(0))\frown f(0)=f(0) \tag{8}$$

(7)(8)相加えて

$$(f(1)+f(0))\frown(x+f(0))=0 \tag{9}$$

他方一般に

$$a\frown x=0 \tag{10}$$

ならば、両邊の補元をとり、

$$(a\frown x)'=1$$

左邊にド・モルガンの定理をつかえば

$$a'\smile x'=1$$

xを交えて

$$x\frown(a'\smile x')=x\frown 1$$

$$a'\frown x=x$$

即ち(10)のxは $a'\frown u$ の形でなければならぬ。逆に $a'\frown u$ なるxはuの如何によらず、(10)をみたす。即ち $a'\frown u$ は(10)のいわば一般解である。

37

従って(9)から

$$x+f(0)=(f(1)+f(0))'\cap u$$

$$x=(f(1)+f(0))'\cap u+f(0)$$

が(5)の一般解となる。

$f(1)\cap f(0)=0$ の故 $f(1)+f(0)=f(1)\cup f(0)$、従って $(f(1)+f(0))'=f'(1)\cap f'(0)$ となり

$$x=(f'(1)\cap f'(0)\cap u)+f(0)$$

$(f'(1)\cap f'(0)\cap u)\cap f(0)=0$ の故

$$x=(f'(1)\cap f'(0)\cap u)\cup f(0)$$

となる。この右邊は更に二の(5)によって

$$x=f(0)\cup(f'(1)\cap u) \tag{11}$$

となる。

逆にかようなxを(5)のxに入れれば

$$(f(1)\cap(f(0)\cup(f'(1)\cap u)))\cup(f(0)\cap(f(0)\cup(f'(1)\cap u))')$$

$$=(f(1)\cap f(0))\cup(f(1)\cap f'(1)\cap u)\cup(f(0)\cap(f(0)\cup(f'(1)\cap u))')$$

ここで第一項は(6)により、第二項は $f(1)\cap f'(1)=0$ によって0、第三項はド・モルガンの定理によって $f(0)\cap f'(0)\cap(f'(1)\cap u)'$ となるから0となる。即ちuの如何によらず(11)は(5)をみたす。

以上を總括して

方程式　$f(x)=0$

の可解完全條件は　$f(1)\smile f(0)=0$

で一般解は　$x=f(0)\smile(f'(1)\smile u)$

である。但しuは任意常元である。

數個の二元方程式が右邊の0である唯一個の二元方程式になおせること一元方程式のときと同様である。

二元方程式

$$f(x,\ y)=0 \tag{12}$$

が可解ならば、これがyについて可解となるような、即ち

$$f(x,\ 1)\smile f(x,\ 0)=0 \tag{13}$$

となるxが存在する。それは(13)がxについて可解であることに他ならぬ。(13)のxについての可解完全條件は

$$f(1,\ 1)\smile f(1,\ 0)\smile f(0,\ 1)\smile f(0,\ 0)=0 \tag{14}$$

であるから、これが(12)可解の必要條件である。逆に(14)が成立てば(13)となるxが存在する。かように定めたxについては、(12)のyについての可解完全條件(13)が成立っているから、そのようなxに應ずるyが(12)によって求められる。

三元以上の方程式についても[三]同様のことが論ぜられる。

註一　本節の所論は拙稿「Booléan Algebra に於ける方程式」(大塚數學會誌第八卷第一號所載)の一部を對稱差の考えで

整理し、束論の記號になおしたものである。

註二 $a\cap b=0$ ならば二の(1)により $a=a\cap b'$、$b=a'\cap b$、從つて $a+b=(a\cap b')\cup(a'\cap b)=a\cup b$ となる。

註三 なお考えられる純數學的な問題については大塚數學會誌拙稿參照。

四 應用

前二節に亙つて述べた可補分配束理論の應用を試みるには、まず無定義でとりあげたBの元と、二つの演算$\cup$と$\cap$とに具體的意味を付與し、それに伴つて記號0、1、′等が獲得する意味を明かにし、それらの意味に於て第二節にかかげた公理C⌒——Nがみたされているか否かを檢討せねばならぬ。

この代數學には論理學の中ですでに二通りの意味を付與することができる[一]。一つは現代いう集合算的意味付であり[二]、一つは命題算的意味付である[三]。數學基礎論の見地からはどちらがより始原的な意味付でなければならぬかという重要な問題もあろう、又その問題が假りに確定したとしても、元の意味を定め、$\cup$や$\cap$の意味を定め、公理C⌒——Nを確かめるについて種々の方式が問題としてのこることとなる[四]。然し今はそれらのことよりは、形式的に話をすすめ、端的にBの元に意味を付與し、0、1、′等の意味を定め、公理C⌒——Nを確かめ、それを具體的な方面に應用することに急ぎたい。

まずある集合Mをとる。次にMの元若干個の集り、いわゆる部分集合を考える。あらゆる仕方で部分集合を考え、その一々をBの元とみる。即ちMの部分集合全體の集合をBと考えるのである。次に、Bの二元a、bについてa、b

とはa、bに共有なMの元全體がなすMの部分集合であるとする。又 $a \smile b$ とはa、bを一括めにしたMの部分集合であるとする。この意味付の下で0はいわゆる空集合となり(五)、1はM自身となり、a′はaの元でないMの元全體がなすMの部分集合となる。Bのかような意味付について公理C――Nがみたされていることは一々検討すれば容易に明かとなる。そしてaがbに含まれること（或いは「aは凡てbである」こと）が $a=a \frown b$ で、又aとbに共通な元のないこと（或いは「aは凡てbでない」こと）が $a \frown b=0$ で表わされることとなる。この意味付の下に集合の包含關係――從つて外延的にみた概念の包攝關係――は完全に可補分配束論として處理されることとなる。これが集合算的解釋である。

次にBの元を形式論理學上の命題とみる。二つの命題a、bについて $a \frown b$ とはa、bが共に成立つとき又そのときに限つて成立つような命題であるとする。又 $a \smile b$ とはa、bが共に不成立のとき又そのときに限つて不成立となるような命題であるとする。(六)（$\frown$は言語の「且」、$\smile$は言語の「又は」に當るといえよう(七)）このように定めた（や）がC――Bをみたすことは＝の兩邊について成立、不成立の分布表を作つてみれば検證される。この意味付の下で、0がつねに不成立、1がつねに成立を意味するに至ることとそれに伴つてa′がaの否定を表わすに至ることは説明を要すまい。そしてaからbの從うこと（或いは「aならばb」ということ）(八)が $a=a \frown b$ で、又a、bの決して兩立せぬこと（或いは「aならばbでない」こと）が $a \frown b=0$ で表わされることとなる。この意味付の下に命題の從屬關係――從つて條件の歸結關係――は完全に可補分配束論として處理されることとなる。これが命題算的解釋である。

イ　條件整理

ここに條件整理というのは概念乃至命題に關して呈示された若干の條件と同値な條件でなるべく簡略なものを求めるという意味である。これは束論的には、それら條件を方程式の形にまとめること、それを右邊が0であるような一つの方程式にまとめること、左邊を函數展開によつてなるべく少い項にまとめること、最後にこれを適宜分割して條件を列擧することに歸する。次に條件整理の具體例を掲げる。

(1) aは凡てbでない。
(2) bでない限りaでありcであることは許されぬ。
(3) bは凡てa又はcである。
(4) dは凡てc又はbである。
(5) cは凡てa又はdである。

の五條件を整理することを考える。

(1)は $a \frown b = 0$

(2)は $a \frown c = a \frown c \frown b$ 二の(7)によつて

$a \frown c \frown b' = 0$

(3)は $b = b \frown (a \smile c)$ 二の(7)とド・モルガンの定理によつて

$b \frown a' \frown c' = 0$

(4)は $d \frown c' \frown b' = 0$

(5)は　$c\frown a'\frown d'=0$

となる。これら五つは一つにまとめて

$$(a\frown b)\smile(a\frown c\frown b')\smile(a'\frown b\frown c')\smile(b'\frown c'\frown d)\smile(a'\frown c\frown d')=0$$

となる。左邊を二の(8)によりdについて展開すれば

$$[\{(a\frown b)\smile(a\frown b'\frown c)\smile(a'\frown b\frown c')\smile(b'\frown c')\}\frown d]\smile[\{(a\frown b)\smile(a\frown b'\frown c)\smile(a'\frown b\frown c')\smile(a'\frown c)\}\frown d']=0$$

d、d′の係數をcについて展開すれば

$$\{[\{((a\frown b)\smile(a\frown b'))\frown c\}\smile\{((a\frown b)\smile(a'\frown b)\smile b')\frown c'\}]\frown d\}$$

$$\smile\{[\{((a\frown b)\smile(a\frown b')\smile a')\frown c\}\smile\{((a\frown b)\smile(a'\frown b))\frown c'\}]\frown d'\}=0$$

c、c′の係數をbについて展開すれば

$$\{[(a\frown c)\smile\{(b\smile b')\frown c'\}]\frown d\}\smile\{[\{(a\smile a')\frown c\}\smile(b\frown c')]\frown d'\}=0$$

$$[\{(a\frown c)\smile c'\}\frown d]\smile[\{c\smile(b\frown c')\}\frown d']=0$$

d、d′の係數を二の五によつて簡單にすれば

$$\{(a\smile c')\frown d\}\smile\{(c\smile b)\frown d'\}=0$$

$$(a\frown d)\smile(c'\frown d)\smile(c\frown d')\smile(b\frown d')=0$$

これは分割して

$$a\frown d=0\quad (c'\frown d)\smile(c\frown d')=0\quad b\frown d'=0$$

43

の三つとなる。第二式は $c+d=0$ 即ち $c=d$ 第三式は二の(7)によつて $b=b,d$ となり上の五條件はまとめられて

(甲) aは凡てdでない。

(乙) cとdとは同一である。

(丙) bは凡てdである。

の三條件となる。

ロ 關係抽出

ここにいう關係抽出とは數個の概念乃至命題に關して與えられた若干個の關係から指定された概念乃至命題だけに關する關係を抽き出すという意味である。かような技術が舊い形式論理學の中で扱われなかつた譯ではない。三段論法はその好個の例である。然し餘りにも單純な一例にしかすぎない。又かようなことが記號論理學の中で扱われなかつた譯でもない。然しそれはすでに知られている推理法の記號を用いた證明による再確認、分つている結論の記號による再構成[九]を出でぬうらみがある。ここでは結果を予想することなく、又予め知ることなく、所與の關係から指定されたもの同士だけの關係をもつと自然に抽き出したい。これは束論的には、それら所與の關係を右邊0の方程式にまとめること、次に指定されたもの以外に關する可解條件を求めて不要なものを消去することに歸する。次に關係抽出の具體例を掲げる。

(1) aからbが導かれる。

(2) cからdが導かれる。

(3)　a、cは考えうる凡ての場合をつくしている。

(4)　bとdは相容れない。

これら四關係から

（一）　aとcとの關係

（二）　aとbとの關係

を抽出することを考える。

(1)は　$a=a\cap b$　即ち　$a\cap b'=0$

(2)は　$c=c\cap d$　即ち　$c\cap d'=0$

(3)は　$a\cup c=1$　補元をとり　$a'\cap c'=0$

(4)は　$b\cap d=0$

となる。これら四つは一つにまとめて

$$(a\cap b')\cup(c\cap d')\cup(a'\cap c')\cup(b\cap d)=0$$

となる。左邊を $f(a, b, c, d)$ とみて、二の(6)によりdを消去すれば

$$f(a, b, c, 1)\cap f(a, b, c, o)=0$$

$$\{(a\cap b')\cup(a'\cap c')\cup b\}\cap\{(a\cap b')\cup(a'\cap c')\cup c\}=0$$

Dによつて

$$(a \cap b') \cup (a' \cap c') \cup (b \cap c) = 0$$

左邊を $g(a, b, c)$ とみて、bを消去すれば

$$g(a, 1, c) \cap g(a, 0, c) = 0$$

$$\{(a' \cap c') \cup c\} \cap \{a \cup (a' \cap c')\} = 0$$

D∪により

$$(a \cap c) \cup (a' \cap c') = 0$$

$$a + c' = 0$$

$$a = c'.$$

これで

（一） aはcの否定命題である。

ことになる。次にaとbの關係を抽き出すには

$$g(a, b, c) = 0$$

からcを消去する。

$$g(a, b, 1) \cap g(a, b, 0) = 0$$

$$\{(a \cap b') \cup b\} \cap \{a' \cup (a \cap b')\} = 0$$

D∪により $(a \cap b') \cup (a' \cap b) = 0$

これで

$$a+b=0$$

$$a=b$$

（二）　aとbは同義である
ことになる。即ち「aからbが導かれる」という所與の關係に加えて「bからaが導かれる」という關係が新たに抽出されたのである。

ハ　集團構成

條件整理と關係抽出とはいずれも簡單な形では古くから、記號論理學で扱われた問題である。(一〇) 次に殆ど顧みられぬ可補分配束（論理）方程式の一般解の應用について述べよう。

標題に用いた集團構成という言葉は呈示された若干の條件をみたす集合を既知集合から作り上げて行く手順という意味である。これは束論的には、それら條件を方程式にまとめること、求むべき未知數を順次一般解の公式によつて求めることに歸する。次に集團構成の具體例を掲げる。

或る集團で委員を選んでa委員會を構成した。新たに委員を選んでb、c、d三つの委員會を構成する。それについては次の四條件が要求決定されたとする。即ち

(1)　a、b、c三委員兼任は許さぬ。

(2)　c委員でない限りb、d委員兼任は認めぬ。

(3)　c、a委員兼任はその人がd委員であるときに限る。

(4)　d委員はa、b委員いずれかを兼任すべきである。

この條件の下で、構成ずみであるa委員會に對しb、c、d委員會をどの様な手順で構成すればよいかを考える。

(1)は　$a \cap b \cap c = 0$

(2)は　$b \cap d = b \cap d \cap c$　即ち　$b \cap c' \cap d = 0$

(3)は　$c \cap a = c \cap a \cap d$　即ち　$c \cap d' \cap a = 0$

(4)は　$d = d \cap (a \cup b)$　即ち　$d \cap (a \cup b)' = 0$

或いは　$d \cap a' \cap b' = 0$

となる。これら四つは一つの方程式

$$(a \cap b \cap c) \cup (b \cap c' \cap d) \cup (c \cap d' \cap a) \cup (d \cap a' \cap b') = 0$$

にまとめられる。ここに既設委員會として、aは常元であり、b、c、dが未知元である。左邊をdで展開して、かきなおせば

$$[\{(a \cap b \cap c) \cup (b \cap c') \cup (a' \cap b')\} \cap d] \cup [\{(a \cap b \cap c) \cup (c \cap a)\} \cap d'] = 0 \qquad (1)$$

となる。従ってdに關する可解條件は

$$\{(a \cap b \cap c) \cup (b \cap c') \cup (a' \cap b')\} \cap \{(a \cap b \cap c) \cup (c \cap a)\} = 0$$

Dによつて

$$(a\frown b\frown c)\smile[\{(b\frown c')\smile(a'\frown b')\}\frown(c\frown a)]'=0$$

〔 〕の中は $c'\frown c=0$　$a'\frown a=0$ によつて0となり

$$a\frown b\frown c=0 \qquad (2)$$

となる。これが同時にb、cを定めるための方程式ともなる。(2)の左邊を $f(b,\ c)$ とかけば

$$f(b,\ 0)=0$$

であるため、(2)のcに關する可解條件はa、bの如何によらず成立している。即ちbは全く任意に定めてよいのである。從つてbを定めた上で、cは(2)をみたすように定めさえすればよい。(2)のcの一般解は第三節によつて

$$c=0\smile\{(a\frown b)'\frown u\}$$

$$c=(a'\smile b')\frown u \qquad (3)$$

である。(3)によつてcを定めれば(2)が成立つから(1)はdについて可解となる。又その形はなお簡單に

$$[\{(b\frown c')\smile(a'\smile b')\}\frown d]\smile[(c\frown a)\frown d']=0 \qquad (4)$$

となる。(4)のdの一般解は第三節によつて

$$d=(a\frown c)\smile[\{(b\frown c')\smile(a'\frown b')\}'\frown v]$$

vの係數をbで展開して

$$d=(a\frown c)\smile[\{(c\frown b)\smile(a\frown b')\}\frown v] \qquad (5)$$

である。

まず既に述べた通りb委員の選び方については何の制限もない。(3)はc委員がa委員でない者（$\bar{a}$）と（　）b委員でない者（$\bar{b}$）との中から何等かの規準（u）によって選ばるべきことを示している。最後に(5)はd委員がb、c、兼任者（$c \smile b$）とb委員でないa委員（$\bar{b} \smile a$）から何らかの規準（v）によって選んだ者とa、c委員兼任（$a \smile b$）の者全員とからなることを告げている。

以上の計算の結果を委員會構成手順として成文化（二）すれば、

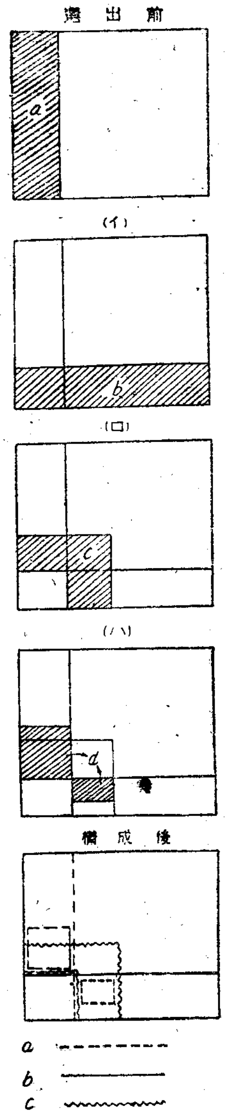
（イ）　b委員を適當に選ぶ。

（ロ）　a委員でない者とb委員でない者とから數人選んでc委員とする。

（ハ）　b委員を兼ねぬa委員と、b、c兼任委員とから數人選び、これにa、c兼任委員全體を加えてd委員とする。

ことになる。

右の構成手順を圖解すれば左の樣になろう。



註一 Couturat; l'Algèbre. p. 3.

註二 Couturat のいう interprétation conceptuelle である。

註三 Hilbert u. Ackermann Grundzüge der theoretischen Logik, Berlin 1928 S. 3

註四 ブール・シュレダー流では公理としての基本的な演算規則から、通常の代數學の場合と同様に、定理が等式又は不等式として證明される。これに對しペアーノ・ラッセル流では定理は常に「眞」という値をとる函數として確立される。
Carnap, a. a. O. S. 8 參照。

註五 空集合については岩村聯 束論 昭和二十三年 九頁参照。

註六 Hilbert u. Ackermann; a. a. O. S. 3.
Carnap; a. a. O. S. 6.

註七 Couturat; l'Algèbre p. 11.

註八 Couturat; ibid. p. 7.

註九 Hilbert u. Ackermann; a. a. O. S. 37.

註一〇 Venn; op. cit. pp 331—359.

註一一 この成文化で「數人」としたところは式で任意常元 u や v が交えてあるところである。これをどのように定めるかは、外數學上の問題である。
物理學の問題を微分方程式として解いた時現われる任意常數を確定するものは、いわゆる初期條件であることと通ずる。

五 可補分配束函數の次數

51

冪等律があつて冪法がないため、可補分配束函數については一見、通常の次數の考えは不必要かに見える。然し本節の所論が示す如く與えられた $f(x)$ にはそれ特有のカーヂナル數が定め得るし、それはある意味で通常の函數の次數にあたるものと考えるべきものである。

可補分配束Bについて對稱差法＋を考えると二のA^+が示す通り $(a+b)+c=a+(b+c)$ である。又二の(10)によつてBの任意の元xについて $x+x=0$ であるため、$a+b=c$ についてa、b、cのどの一つを未知元と考えても、それを一意的に求めることができる。これは

「可補分配束が對稱差法に關して群をなしている」[一]

ことを示す。なお二の(12)によつて、この群の單位元は0であり、二の(10)によつて、Bの元aの逆元はa自身である。[二]

次にBの與えられた函數を $f(x)$ とし、Bの二元a、bにつき $f(a)=f(b)$ であるとき、aはbに同値であるといい、それを

$$a \sim b \ (f(x))$$

と記することにすれば、この關係は明白に、抽象代數學でいう同値關係[三]である。從つてこの關係によつて、Bの元全體を同値級に分類することができる。

この同値級がどのように定まるかを明かにするのが第一の問題である。

そのため、Bの二元が同値であるための完全條件を求めよう。

今a、bが $f(x)$ に關して同値であるとすれば

$$f(a)=f(b) \qquad (1)$$

交が0である二元については）と＋が同義であることから

$$(f(1)\frown a)+(f(0)\frown a')=(f(1)\frown b)+(f(0)\frown b')$$

$$(f(1)\frown a)+(f(o)\frown a')+(f(1)\frown b)+(f(0)\frown b')=0$$

D＋によつて

$$(f(1)\frown(a+b))+(f(o)\frown(a'+b'))=0$$

二の(13)によつて $a'+b'=(a+b')'=a+b''=a+b$ 従つて上式は

$$(f(1)\frown(a+b))+(f(o)\frown(a+b))=0$$

再びD＋によつて

$$(f(1)+f(o))\frown(a+b)=0 \qquad (2)$$

となる。右の計算はどれも逆が利くから、(2)から(1)が導き出される。即ち

「二元a、bが $f(x)$ について同値であるための完全條件は

$(f(1)+f(0))\frown(a+b)=0$ である。」

ことになる。

特に0と同値な元nとは $o+n=n$ であるから

$$(f(1)+f(o))\frown n=0$$

53

となる元nのことである。かような元n全體の集合をNとかこう。Nの二元n、$\bar{n}$をとれば

$$(f(1)+f(o))_{n}=0$$

$$(f(1)+f(o))_{\bar{n}}=0$$

相加えて

$$(f(1)+f(o))_{(n+\bar{n})}=0$$

これはn、$\bar{n}$と共にn+$\bar{n}$もNに屬することを示す。ここで$\bar{n}$を$\bar{n}$自身とみず、$\bar{n}$をnの逆元とみれば、Nは對稱差法に關してBの部分群(四)をなすこととなる。

BをNで剩餘級(五)に分けたものを

$$B=N+Na+Nb+\cdots\cdots$$

とする。

Bの二元k、lが$f(x)$に關して同値であるとすれば(2)によつて

$$(f(1)+f(0))_{(k+l)}=0$$

これはk+lがNに屬することを意味する。ここでlをlの逆元とみれば、k、lがNに關する同じ剩餘級に屬することになる。これらのことはいずれも逆が利くから

「Nに關する剩餘級がそのまゝ$f(x)$に關する同値級になる」のである。

Nに關する剩餘級各はBの部分集合として等しいカーヂナル數[六]を有つている。これは f(x) によつて一意的に定まるカーヂナル數である。そしてそれは

$$f(x)=f(0)$$

ならしめるxの集合のカーヂナル數であると共に

$$f(x)=c$$

(が可解であるとき)の根の集合のカーヂナル數である。この意味で通常の函數の次數に當るものとみてよかろう。

右はやや純粹數學的な問題でもあり、純粹數學的な立論でもあるが、强いてこの結論に命題算的解釋を下すならば、

「變元を含む命題函數に或る意味をもたしむべき變元の値の多さ(嚴格にはカーヂナル數)はその意味とは無關係に命題函數だけによつて定まる」

といつてもよかろう。

註一　群の定義は抽象代數學のどんな著書にもみられるが、ここでは正田　前掲書　五六頁によつた。

註二　單位元、逆元については正田　同書　五四頁參照。

註三　正田　同書　八頁參照。

註四　正田建次郎　抽象代數學　昭和七年　一五頁。

註五　正田　同書　一六頁。

註六　自然數の相等關係を擴張してえられる數概念の擴張で、「物の多さ」を無限の場合についても表わすものであると考えてよい。

六　む　す　び

以上節を追つて、可補分配束の見地から記號論理學の諸定理を見なおし、その初等的應用（他の理論への應用でなく實用への應用という意味で）を古典に例をとつて解說し、新たな應用と思われる集團構成を付加した。

可補分配束自身として、まだまだ扱うべき問題も殘つているし、興味ある結論も出て來る。例えば、與えられた函數 $f(x)$ による同値級と必らず唯一元を共有するような同値級をもつ函數 $g(x)$ を構成することができる。この同値級で0を含むものを $f(x)$ についてN、$g(x)$ についてMとすれば、Bの元は一意的にNの元とMの元の對稱差として表わされることが證明できる。そしてこの立論にも對稱差の考えを活用することができる。なお右は群論の立場からは、直積分解の一例となる。又方程式 $f(x)=0$ が可解條件をみたしていないとBの中ではとけぬが、方程式可解化その他を目指してBを元對集合に擴大することも問題となり得よう。その場合許される相等の定義が十四種に限られることは筆者が、かつて大塚數學會誌第八巻第二號（Boolean Algebra 元對の對等）で示した處である。體の擴大に相當する事項が可補分配束でどのように行われるかも考えられ、可補分配束Bの自可補部分束Sの擴大については、對稱差群としてのBのSに關する剩餘級が重要な役割を演ずることが明らかとなつている。この立論にも對稱差の考えが役立つ。

右はあくまで、純粹數學の問題であり、結論である。これらが命題算的にどのように解釋されるか又集合算的にどのような實用問題に應用されるかも意味のない問ではなかろう、又機を得て觸れたいと思う。（四八・一一・二〇）