二つの自然数概念
——フレーゲと前期ウィトゲンシュタイン——

三　笠　俊　哉

1．はじめに

自然数の定義は数学の哲学において一つの主要なテーマであった。本稿ではフレーゲと前期ウィトゲンシュタインの自然数論を論じる。周知のように前期ウィトゲンシュタインの哲学はフレーゲから多大な影響を受けているが，彼らの自然数に対する見解にはかなりの違いがある。その違いを明らかにし，数学の哲学における二つの立場の源流を探るのが本稿の課題である。

2．フレーゲの自然数の定義

フレーゲの著書『算術の基礎』[(1)] の中心的な問いは，自然数とはなにか，またそれはどのようにして私達に与えられるのか，ということであった。まずフレーゲは個々の数，つまりカーディナル数を論理的な概念を用いて定義し，その定義からペアノの公理に相当するものを導き出そうとした。『基礎』の§18においてフレーゲは個々の数と数の一般概念としてのカーディナル数を区別せねばならないと述べている。なぜなら個々の数は１と１ずつ加えるということから得られるが，「１」と「１ずつ加える」がさらに定義されない限りは，それは数の完全な定義とはいえないからである。これは単にどのようにすれば数列を展開できるか，というように記号法に関する問いを提出するのではなく，数とはなにかという形で数に関する意味論的な問いを提出することである。換言すれば，フレーゲは，数のより一般的な概念の獲得を目指すのである。

こうしたフレーゲの立場は論理主義として知られている。ラムジーは数学の基礎についての他の立場と比較して，論理主義の正当性について次のように述べている[(2)]。ヒルベルトを代表とする形式主義は，２＋２＝４のような数学的

な命題を，恣意的な規則にしたがって操作されるべき無意味な記号列とした。そのように考えれば，算術的対象の存在を問う必要はない。数詞「2」は無意味な式のなかに生じている無意味な記号に過ぎない。したがって，数学が論理学に還元できようができまいが，それ自体たいした問題にはならない。だが，この説明は数学的命題の説明としては説得力があるが，数学的概念の正当性についての疑問が解消しないという点で満足できるものではない。「2」という概念は数式の中だけに現れるのではない。たとえば「家から駅までは2キロメートルである」という命題のなかにあらわれる「2」はけっして無意味な記号ではない。そこで論理主義者は，数という算術的対象を論理的概念のみを用いて定義可能な論理的対象であると見なすのである。すると，論理主義の立場からすれば，「家から駅までは2キロメートルで，駅から学校までは2キロメートルである」から「家から駅を通って学校までは4キロメートルである」を推論するために，$2+2=4$を用いることができるのはなぜかが説明されなければ，数の定義としては不十分であろう。これがまさにフレーゲが問題にしたことであった。

またフレーゲは，数学的真理はアプリオリで分析的であると言う。数学的真理がアプリオリかアポステリオリかあるいは分析的か総合的かの区別は，判断の内容ではなく判断の根拠に関わる。もし証明から基本的真理にまでさかのぼる過程で一般的な論理法則や定義にしか出会わないのならそれは分析的真理である。またアプリオリな真理とはそれ自体の証明が不要であるような一般法則から導かれる真理である。この真理の判断の分類によってフレーゲは算術的言明の真偽を決める際に，物理的対象や心的直観のような算術外のものに訴える必要はないということを示した。いまここでは，これが数の定義にいかに関係するのかを問題にすることにしよう。

『基礎』の§57によれば，個々の数が概念の特性であることは避けるべきであり，「個々の数はそれがあるところのものとして，自身を表す」ような自立的対象である。換言すれば，数とはそれによって他の語の意味を変化させてしまうようなものであってはならない。「私は5つのりんごを買った」という文を考えてみた場合，「5つ」は「りんご」にかかる形容詞ではない。そうではなくてこれは，「私の買ったりんご」と「5つ」を同一性で結んだ，というような構造をしている文なのである。そう考えれば，「5つ」が対象を指すと

考えることに何の抵抗もないだろう。ただし，これは物理的な対象のような現実的なものや主観的対象というような心理的なものと解してはならない。数はそれらとは別種の抽象的対象なのである。そしてこうした抽象的対象の探求のために，フレーゲは文脈原理を必要としたのである。

例えば「木星は4つの月を持つ」という文を考えてみよう。フレーゲによれば，数は物理的対象でもなければ心的対象でもないものであった。その時，もし私達が数についての観念や直観をなんら持ちあわせていないとしたら，どのようにして数は把握されるのだろうか。『基礎』の§62によれば，私達は特定の数を把握する手段とその数を再認する手段を確定して初めて，その数を固有名として用いることができる。もし「4つの月」の場合と「4人の人」の場合とで「4」の指す事柄が違っていたとしたら，それは数としての用をなさない。もしこの「4」が「月」の特性であるとすれば，「4人」の「4」と「4つ」の「4」とではその意味が異なるということになってしまうだろう。よって上の文の「4つの」の意味を問うためにはまず，「4」という数の獲得と再認の基準を得なければならないのである。だが，「木星は4つの月を持つ」という文ではその基準は与えられない。ではどのようにすればその基準が得られるのであろうか。§55によれば，「木星は4つの月を持つ」という文は「木星の月という概念にはカーディナル数4が付属する」と書き換えることができる。この文は「木星の月」という概念に関する主張であり，やはり数字がなにを指しているのか，つまり数字の指示対象を定義しない。「概念に付属するカーディナル数」というものは自立的対象ではあるが，やはり数字が指示する対象の再認の手段を提供しているわけではない。フレーゲによれば，再認を表現しているのは等式である。従ってカーディナル数の概念を獲得するためには，例えば「概念Fに属する数は，概念Gに属する数と同一である」という等式の形の言明の意味を定義しなければならないのである。ただし，それをするためには「概念Fに属する基数」という曖昧な表現は避けて，もっと論理的な表現をしなければならない。そうすることで，同一性の一般的な基準を得ることができるのである。

では数のような抽象的対象の同一性はいったいどのようにして定義すればよいのか。フレーゲは正当にも，数において同一性は「同数の」ということと同じであると述べた。したがって定義されるべきは「同数の」ということである。

数の一般概念であるカーディナル数を定義することで自然数を定義しようとしたフレーゲは，カーディナル数の中心概念が「同数の」という概念であることを『基礎』の§57で指摘した。なぜなら，あるものが他のものと同数であることは，当のものが何個あるかを知らなくてもわかるからである。また「何個のFが存在するか」という問いに対する答えは，「基準となる種類のものと同数」というのと同じことである。「1＋1＝2」の「＝」は「同値である」ということを意味しているのであり，「1足す1は2」の「は」にあたる主語－述語関係を示す単なる連結詞ではない。そしてフレーゲは「同数の」を一対一対応という関係が存在することとして論理的に定義しようとした。そうすれば個々の数という概念に訴えずに，「同数の」を定義できると考えたのである。しかしこの定義も十分とは言えない。なぜなら，いまだ「個数」という無定義の用語をその中に含んでいるからである。もし「概念Fと概念Gは同数である」というものの中のFが数ではなく線分であったなら，上の言明は全くナンセンスである。フレーゲはこのように考えて別の方法を模索したのである。

このためにフレーゲが採用したのは「概念の外延」を導入するという方法である[3]。これは「抽象的対象の措定」のための定義をすることである。そしてフレーゲは，これによってカーディナル数とは何かを定義しようとしたのである。

まずカーディナル数を「概念の外延」として定義する。つまり「概念Fに属するカーディナル数＝DF『概念Fと同数』という概念の外延」と定義するのである。これを用いて「FとGが同数」ということを定義すると，「《Fと同数》という概念の外延が《Gと同数》という概念の外延と一致する」または「《Fと同数》という概念の外延が《Gと同数》という概念の外延と一対一に対応する」ということと同値である，ということになる。

以上のようにカーディナル数についての考察をしたうえで，自然数を定義する。まず0は

　　《自分自身と同一でない》という概念に属するカーディナル数

と定義される。そして1は，

　　《0と同一》という概念に属するカーディナル数

と定義できる。また「nはmの後継者である」は

　　ある概念Fとある対象aが存在して，aはFであるものの一つ，nはF

の個数で，mはFであるものからaを除いた対象の数である

と定義される。要するにこれは，「n＝m＋1」であるということである。よってどのようなカーディナル数も後継者を持つことから，すべてのカーディナル数が定義できるのである。

フレーゲによって導入された「概念の外延」そのものについては『基礎』ではそれ以上解明はなされていない。しかし現代的な用語で言い直せば，それは集合と同じものといってよい。概念Fの外延とは，F(x)を真とするxをすべて集めた集合である。これは今でいう二階の集合，つまり「集合の集合」にあたる。

このフレーゲによる数の定義によれば，一見数学を論理学に還元できそうに見える。しかし，集合論がどこまで論理的概念といえるかはこの段階ではまだ問われていない。それが言えるためには，集合論を展開するための無限に多くの対象の存在を論理的な方法で保証する必要がある。この問題をフレーゲは次のような方法で解決しようとした[4]。

> 他になにが存在しようが，少なくとも空集合，つまりいかなる要素も持たない集合は存在しなければならない。このとき，その空集合のみを要素とする集合もまた存在する。それゆえにまた，これら2つの空集合のみを要素とする集合も存在する。こうして，無限に続けられる。したがって，無限に多くの事物が存在する。

だが後に，これを更に綿密に展開した『算術の基本法則』に，パラドックスがあることが，ラッセルによって指摘されたのは周知のことである[5]。

結局フレーゲは，論理主義のプログラムのためには確実な論理法則を必要とするのだが，それにこだわると算術を論理学から導出することができない，というジレンマに陥ったのである。

3．前期ウィトゲンシュタインの自然数論

前期ウィトゲンシュタインの主著『論理哲学論考』[6] の数学論は，極めて簡潔に述べられており，そしてそれは『論考』の論理学に大きく依存している。ウィトゲンシュタインによれば，命題の一般形式，あるいはそこから導かれる移行の一般形式から数の概念を導くことができる。命題の一般形式は，$\bar{p}$を

すべての要素命題の集合, $\bar{\xi}$ をすべての命題の集合, $N(\bar{\xi})$ をすべての命題の否定連言とすれば, $[\bar{p}, \bar{\xi}, N(\bar{\xi})]$ という形で表すことができる。これは「いかなる命題も要素命題に操作 $N(\bar{\xi})$ を繰り返し適用した結果であること」(6.001) を語っている。そして「数は操作の冪である」(6.021) として定義されるのであるから, 自然数列の場合は数を真理函数の一般形式に当てはめて, $[x, \xi, \Omega'\xi]$ とおける。これは

$$x,\ \Omega'x,\ \Omega'\Omega'x,\ \Omega'\Omega'\Omega'x,\ \cdots\cdots\ (6.02)$$

という操作Ωの繰り返しとして自然数を定義するということである。これは指数を用いると,

$$\Omega^{0\prime}x,\ \Omega^{0+1\prime}x,\ \Omega^{0+1\prime}x,\ \Omega^{0+1+1\prime}x,\ \cdots\cdots$$

と書ける。そしてこの指数が自然数を定義しているものとすれば,

「0=0」Def

「0+1=1」Def.

「0+1+1=2」Def

「0+1+1+1=3」Def

・・・

と自然数を定義できる[7]。

フレーゲは「集合の集合」として数を定義していた。これに対して, ウィトゲンシュタインは「クラスの理論は数学では全く余計である。このことは, 数学で私達が必要とする一般性は, 偶然的なものではないことと連関している」(6.031) と述べている。

このようなウィトゲンシュタインの数論への, ラッセルの反応は以下のようなものであった。

> 私の思うには, ウィトゲンシュタイン氏の理論はいくつかの点でかなりの技術的な開発を必要としています。このことはとりわけ彼の数論に当てはまります。彼の数論は現在のままでは有限数しか扱うことができません。論理学は, それが超限数を扱い得ることを示さない限り, 適切なものとはみなされません。私はウィトゲンシュタイン氏の体系にこの脱落を埋めることを不可能にするものがあるとは思いません。[8]

この前半の個所でラッセルが指摘しているのは, ウィトゲンシュタインの数論の欠陥としてしばしば指摘されてきたものである。フレーゲやラッセルの自然

数の定義は，有限領域はもちろんのこと，無限領域も覆うことのできる理論を目指して構築された。ラッセルが無限公理という問題の多い公理を「プリンキピア」に持ち込まざるを得なかったのも，無限領域を扱う数論のためである。むしろ無限をどのように扱うかの方が当時の数学においては重要な問題であっただろう[9]。ラッセルはこの『論考』の序文において，まるで将来技術的な改良がなされるなら，ウィトゲンシュタインの考えた方法でもって無限領域を扱う数論を作り出すことができると考えているかのようである。これについてフォーゲリンは著書『ウィトゲンシュタイン』において以下のように述べている。

> ここでのラッセルはあまりに楽天的すぎると私は思う。なぜなら数は操作の冪である，ということはウィトゲンシュタインの立場の本質であり，そしてこの操作の繰り返しは，有限を越えたところへ私達を連れてはいかないだろうから[10]。

フォーゲリンがこのように考える理由は，真理関数の理論に対する彼の指摘と密接に関係している。ウィトゲンシュタインの真理関数についての彼の批判は主に次の点にある

(1) オペレーターNはそれに割り当てられた仕事（要素命題の否定連言からすべての命題を導出すること）をこなすのに十分ではない。

(2) 真理操作の体系は，要素命題から第一階の関数計算のすべての式を導出するのに十分ではない[11]。

この難点は，特に量化文において顕著に現れる[12]。彼の批判は，複数個の違う種類の量化子を扱う場合，つまり$(\forall x)(\exists y)\,f(x)(y)$のような場合，これを真理関数で扱うことはできないということである。このように複数個の違う種類の量化子が現れる命題をオペレーターNを用いて構成しようとすれば，その過程で操作Nの無限回の適用を行わなければならない。しかし，操作の無限回の適用はすでに5.32においてウィトゲンシュタイン自らが禁じているのである[13]。

ではなぜ彼はこの有限と無限の差異を無視することができたのだろうか。ウィトゲンシュタインは有限と無限の違いを意図的に無視したのだろうか。

ここで『論考』の中心的な概念である「語る/示す」の区別が効いてくる。A.W.ムーアは著書『無限』の中で，『論考』の「語る/示す」の区別について次のように述べている。

> 全体としての世界の特徴は，適切に言葉にすることはできない。すべて

> の事実をひとまとめにしている枠組み自身は，そのものとしては一個の事実ではない。全体としての世界の特徴，つまり全体にわたる形や形式は，それがどのような（*how*）ものであるかという問題ではなくて，それがいかなるものであろうと（*however*）という問題であるといえよう。それは語られ得るものの問題ではなくて，いかなるものについて語ろうとも，その語ることの中に含まれているものについての問題なのであり，それはただ示されることのみが可能なものなのである[14]。

ウィトゲンシュタインにとって，「語られずに示され得るもの」とは世界の枠組みに関する事柄である。そしてウィトゲンシュタインは語り得ぬもののなかに論理学を入れている。なぜなら，論理学は言語の枠組みであるから。そしてその言語は世界を映す鏡であった。したがって，世界の枠組みと言語の枠組みは一致しているはずである。それが「論理は世界を満たす。世界の限界は論理の限界でもある」(5.61) の含意するところのものである。

さてここで，なぜウィトゲンシュタインは数学において有限と無限の違いを無視し得たのか，という問いに戻ろう。フォーゲリンは次のように述べている。

> ウィトゲンシュタインの数学において，まったく余計なものとしてのクラス理論の拒否は，明らかにカントール，フレーゲ，ラッセルなどの業績への攻撃である。言いかえれば，それは数学の基礎への古典的なアプローチに対する攻撃なのである。

ウィトゲンシュタインの有限と無限の差異の無視も，この文脈で理解されるべきである。

数学を論理学に還元するという論理主義のプログラムを遂行しようとしたフレーゲの体系がジレンマに陥る，ということは先に述べた。パラドクスを回避しようとする企ては，それを指摘したラッセル，そして『プリンキピア・マテマティカ』の共著者であるホワイトヘッドによってなされた。彼らは集合を細心の注意を払って取り扱った。そして導入されたのがタイプ理論である 。しかしこの時ラッセルは論理学に，それ自体，とうてい論理的とは言えないような公理を採用しなければならなくなった。その一つが無限公理である。それによれば，「nを任意のカーディナル数とすれば，n個の項を有する個体の集合は少なくとも一つある」，換言すれば，世界には無限に多くの対象が存在しなければならないことになるのである。しかし，これは明らかに存在論的なもの

である。ラムジーは『プリンキピア』の改良を提案し，ラッセルが導入したやはり問題のある還元公理を除去したが，無限公理をなしで済ますわけにはいかなかった[16]。一方，論理学は形式にのみ関わる学である。したがってウィトゲンシュタインは，数学は論理学と同一のものとはみなせないとして両者を引き離したのである。

だからといって，私達には数学が物理学などのような経験科学と同列には置けないことは確実と思われる。なぜなら，経験科学の命題は常に修正の可能性に対して開かれているのに対して，数学の命題は修正不可能であるからである[17]。例えば7個のボールと5個のボールを目の前にして，それを改めて数えてみたとき11個という答えが得られたとする。そのとき，これをもって「「7+5＝12」は反証された」というだろうか。おそらくいわないだろう。このような事態に直面してまず考えるのは，「数え間違ったのではないか？」というものだろう。あるいは，いつのまにか誰かがボールを一個隠したのではないかと考えるかもしれない。また，7個のボールに5つのボールを足したときに1個のボールが消滅する，という現象が起こることが発見された，と考えるかもしれない。これは「7+5＝12」の修正を提案しているのではなく，新しい物理現象の発見を提案していると考えるべきである。

このように，数学は観察や実験によって帰結を導くものではない，ということはウィトゲンシュタインも自覚していた。それは『論考』の次の一節に見出される。

> 6.2321 数学の命題が証明可能であるということは，その命題の正しさが理解され得るものであり，命題が表現することを事実と比較して命題の正しさを決定することは不要である，ということに他ならない。

論理学でもなくまた自然科学でもない数学は，その基盤をどこに置けばよいのだろうか。この問いに対して，ウィトゲンシュタインはある回答を用意している。それは「数学は論理の一方法である」(6.234) というものである。数学の基盤をなすのは集合や抽象的対象や，もちろん物理的対象でもなく，操作を繰り返すことであり，これは論理的なものの中には常にある原始的なものである[18]。単なる操作の繰り返しである数学は「思想を表現しない。(6.2)」したがって，数学には「クラスの理論は全く余計」(6.031) なのである。

このような数学観は構成主義的なものに見える[19]。特に，彼の自然数論にお

いてはそうである。この構成主義的な自然数論こそ，ウィトゲンシュタインの古典数学批判の現われである。ウィトゲンシュタインは数学の基礎づけよりも，その応用に強調を置いているのである。

> 6.211 生活において私達が必要とするのは決して数学の命題ではない。私達が数学を用いるのは，もっぱら数学に属さない命題からこれまた数学に属さない他の命題へと推論するためだけである。(『私達はその語，その命題を一体何のために使用するのか』という問いは，哲学では常に価値のある洞察に導くのである。)

ウィトゲンシュタインは数学を論理学に還元したいという欲求も，数学に確実に基礎を与えたいという欲求も持ちあわせていなかった。そして数学をその応用に力点をおいた操作の繰り返しとみなすなら，集合論に基づいて導出された有限と無限の差異は無視し得るのである。

4．結語

フレーゲの数の定義は，数学を論理学に還元するという論理主義プログラムの中核をなすものであった。そこでフレーゲは二階の概念として数を定義しようとしたが，これはラッセルのパラドクスを回避できない。また，パラドクスを避けるためには，無限公理を用いなければならないが，これについては論理的概念とみなすのは無理がある。つまり，「アプリオリで分析的な」数学という立場に固執すると，自然数を論理学から導出することができないのである。

これに対してウィトゲンシュタインは，数とは操作を繰り返すことであると考える。このような数からなる数学は集合などの抽象的対象やましてや物理的対象を扱う学ではない。

こうした対照的な二種類の数の定義を前にして，私たちは何を得ることができるだろう。前者によって得られる数は，現代数学を展開するのに十分なほど強力であろう。他方で，後者の立場をとれば，現代数学の多くの部分を不確かなものとして犠牲にしなければならないかもしれない。だがそのかわり，後者は前者が陥ったようなパラドクスとは無縁であるだろう。また後者は古典数学に異議を唱えるという点で急進派であり，数学に大きな変革を迫るだろう。それに対して前者は古典数学の多くをそのまま保持しようとする意味で保守派で

ある。こうした数学における保守派 vs 急進派の対立は舞台を数学の他の分野に移して今なお見られる[20]。私たちは未だプラトニズムと構成主義の「蛙と鼠の戦い」のまっただ中にいるのである。

参考文献

Dummett. M.(1978), *Truth and Other Enigmas,* Duckworth, 1978, (『真理という謎』藤田 晋吾訳 勁草書房 1986 年).

Dummett. M.(1991), *Frege Philosophy of Mathematics,* Harverd.U.P, 1991.

Dummett. M.(1993a), *The Seas of Language,* Oxford, 1993.

Dummett. M.(1993b), 'What is Mathematics about?', in *The Seas of Language,* Oxford, 1993.

Fogelin. R. J.(1987), *Wittgenstein : second edition,* Routledge, 1987.

Frege. G.(1884), *Die Grundlagen der Arithmetik*, Breslau 1884.

Gasking. D.(1955), 'Mathematics and the World', in *Logic and Language, Second Series,* Flew. A. ed,. 1955.

Geach.P and Black.M.(1952). edited. *Philosophical Writings of Gottlob Frege*, Blackwell, 1952.

藤田 晋吾(1994),「論理学は科学にあらず」,(『哲学・思想論集』 1994 年 所収).

飯田 隆(1989),『言語哲学大全Ⅱ』, 勁草書房, 1989 年.

Ishiguro. H.(1981), 'Wittgenstein and the Theory of Types', in edited by Block.I, *Perspectives on the Philosophy of Wittgenstein,* MIT Press, 1981.

Mellor. D.H.(1990), *F.P.Ramsey Philosophical Papers,* Cambridge U.P, 1990.

Moor. A.W.(1990), *The Infinite,* Routledge, 1990.

Ramsey. F.(1990), 'Foudations of Mathematics'. in edited by Mellor. D.H, *F.P.Ramsey Philosophical Papers,* Cambridge U.P, 1990.

Rassell. B.(1966), *Introduction to Mathematical Philosophy,* Routledge 1995. (『世界の大思想 26 ラッセル』, 中村 秀吉. 市井 三郎訳, 河出書房新社, 1966 年).

佐々木 力(1990),『科学革命の歴史構造 下』, 講談社, 1990 年。

佐々木 力(1995),「数学基礎論論争」,(『岩波講座 現代思想 11 精密科学の思想』, 岩波書店, 1995 年).

田中 一之 編・監訳(1999),『数学の基礎をめぐる論争』, シュプリンガー・フェアラーク東京, 1999年。

Wittgenstein. L.(1981), *Tractatus Logico-Philosophicus,* Routledge, 1981 (『ウィトゲンシュタイン全集1』, 奥 雅博訳, 大修館書店, 1975年)

---

(1) 以下,『基礎』と略記する。

(2) Ramsey. F.(1990), p165

(3) Frege.G.(1884), §68

(4) Moor.A.W.(1990), p115, および Frege.G.(1884), §§82-83, フレーゲが実際に展開したのは「集合」という語を使わないものであるが, ここではムーアの表現を引く。

(5) ラッセルのパラドックスについて形式的なエッセンスだけ言うと, 次のようなものである。外延を取り扱う際, 許される論理法則として

Fの外延=Gの外延 $\Leftrightarrow$ $\forall$x (F(x) $\equiv$ G(x))

を公理としなければならない。しかしこれから以下のようなパラドックスが導かれる。

$\boxed{1}$ $y \in \{x \mid F(x)\} \Leftrightarrow F(y)$ そこでF(x)の代わりに $x \notin x$, F(y) の代わりに $y \notin y$ を代入すると

$\boxed{2}$ $y \in \{x | x \notin x\} \Leftrightarrow y \notin y$ が得られる。yは任意の対象なので, $r = \{x | x \notin x\}$ としてyに代入すれば

$\boxed{3}$ $r \in r. \Leftrightarrow r \notin r$ が導かれる。このようにパラドックスが導かれてしまう以上, 上の公理は論理法則とは言えない, ということが帰結する。

(6) 以下,『論考』と略記する。

(7) Wittgenstein. L.(1981), 6.02.

(8) Wittgenstein..L.(1981), Introduction

(9) 佐々木 力 (1995a), 佐々木 力(1995b)。

(10) Fogelin. R. J.(1987), pp83-85

(11) Fogelin. R. J.(1987), p83

(12) Fogelin. R. J.(1987). pp78-82, 飯田 隆(1989), p170, 藤田 晋吾(1994), pp24-25 参照。

(13) Wittgenstein. L.(1981),「5.32 すべての真理関数は, 要素命題に真偽操作を繰り返し有限回適用することによって得られる。」

(14) Moor.A.W.(1990), p188

(15) 石黒 ひで氏は Ishiguro. H.(1981), で命題関数との関係でウィトゲンシュタインのタイプ理論に対する考察を細かく展開している。そこで石黒氏は「命題関数が命題のなかでどのように同定され, ことなるタイプに構成されるか, ということについての『論考』の見解に従うならば, ラッセルのパラドックスは回避される」と述べている。

(16) 還元公理とは,「与えられた対象xの関数にたいして, これと形式的に同値な一階の述語関数が存在する」という公理である。ラッセルは『プリンキピア』でパラドックスを回避するために分岐タイプ理論を考えた。タイプ理論によれば, 例えばあるxについて, その性質も種々のタイプのものに分岐し,「xのすべての性質」について語ることができなくなる。そこでラッセルは「xのすべての性質」といった扱いを実質的に保証することを公理として要請した。しかしこれは無限公理と同じように明らかに存在公理である。ウィトゲンシュタインはこの公理に対して『論考』の6.1232および6.1233で異議を唱えている。ラムジーは集合論に生じるパラドックスを意味論的パ

ラドックスと論理的パラドックスに区別した上で，数学で本質的なのは論理的パラドックスであるとし，それの解決のためには分岐タイプ理論のような複雑なものは必要ではなく，それより簡単な単純タイプ理論で十分であるとした。

(17) Gasking. D.(1955).

(18) Ishiguro. H.(1981).

(19) この点はフォーゲリンによっても指摘されている。フォーゲリンによれば，このウィトゲンシュタインと構成主義数学との類似性は，彼の「後期哲学へと長い影を落としている」。Fogelin. R.(1987), p 85

(20) 田中 一之(1999)，pp65-75。