交換均衡価格選択とワルラス均衡*)

金 子 浩 一

1. 序

理論経済学においては，企業は利潤の最大化を図り消費者は効用水準の最大化を図るということが，合理的な経済主体がとる行動に関する一つの前提となっている．そしてその結果として完全競争経済において実現する需要と供給が一致するような価格ベクトルと総生産計画の組み合わせ，いわゆるワルラス均衡（完全競争均衡）が理論経済学における重要な分析対象の一つであり，それに関連したさまざまな命題が証明され，主張されている．

不完全競争経済においては企業は市場価格に対する影響力を認識しながら利潤最大化行動をとるようになるが，均衡においてはやはり需要と供給が一致しなければならず，交換均衡であることが要請されることは不変である．しかしながら，一つの総生産計画に対して複数の交換均衡価格が存在する場合には，クールノー均衡の定義において企業の利潤最大化を考える際，市場で成立すると企業が考えるのはどの価格であるかということを決定しなければならない．つまり交換均衡価格選択が定義される必要が生じるわけであり，これらの選択理論は不完全競争企業の一般均衡理論研究の発展に大きな役割を果たした．交換均衡価格が一意に決まるという仮定を用いていた Gabszewicz and Vial (1972)のモデルを，Roberts (1980)は交換均衡価格が所与の総生産計画に対して複数存在する場合にまで拡張したため，その分析において一つの交換均衡価格選択を定義する必要が生じた．それは決定的選択であり局所的に定義されるものであるが，臨界交換均衡においては連続性が

保証されないという短所をもちあわせていた[1]. そこでAllen (1985)は，確率の概念を利用して期待価格の形成を図り，大域的に定義可能な連続確率選択を構築した[2]. さらに一般均衡モデルにおける不完全競争企業の行動に取り入れ，Roberts (1980)と平行した分析を行った（Allen (1994)）.

ワルラス均衡に関わる命題の中で，不完全競争経済における主要な定理の一つとしてクールノーの極限定理が挙げられるが，もちろん彼らも一般均衡理論の枠組みにおいてその証明を成し遂げている[3]. 前者では，クールノー均衡の極限点が正則交換均衡であるならば，その極限はワルラス均衡であるということを主張した. さらに後者では，連続確率選択が大域的に定義可能である点を利用して一般性を高め，正則性の仮定がなくても同様の定理が成り立つことを証明した.

彼らのモデルにおいては交換均衡価格選択が異なるために，ワルラス均衡も同一であるとは限らない. しかしながらAllen (1994)は，それらの選択にしたがって定義される二つのワルラス均衡の相違については言及していない. そこで本稿では，それぞれの選択のもとで定義される二つのワルラス均衡を比較し，その差異及び共通性を分析する.

本稿の構成は以下の通りである. まず第2節で経済を構成する消費者と企業の特性が設定され，交換均衡，その正則性，そしてワルラス均衡が定義される. 第3節では，決定的選択とその連続性に関する命題が主張され，また連続確率選択及び期待ワルラス均衡が定義される[4]. 第4節では，正則経済におけるワルラス均衡はある連続確率選択のもとで期待ワルラス均衡になることが証明されるとともに，臨界経済におけるワルラス均衡については期待ワルラス均衡との明確な関係を主張できるわけではないことが例示される.

2. モデル

まず我々は標準的な一般均衡モデルを設定する．経済 E には，m 人の消費者と n 社の企業が存在し，$l+1$ 種類の財の取引を行う．財の集合を $H := \{0, 1, ..., l\}$ で表す．第 0 財は価値基準財であり，その価格は 1 であると仮定される．$l+1$ 種類の財の価格の集合は $S :=\{1\}\times R^l_{++}$ と標準化され，価格ベクトルは $p = \{1, p_1, ..., p_l\}\in S$ によって与えられる[5]．

生産部門は n タイプの企業からなる．各企業 j（$j=1, ..., n$）は生産集合 $Y_j \subset R^{l+1}$ から生産計画 $y_j = (y_{j0}, ..., y_{jl})$ を選ぶ．企業 j の利潤は $\pi_j := p \cdot y_j$ によって定義される．また，すべての企業の総生産計画を $y := (y_1,...,y_n) \in R^{n(l+1)}$ によって表示する．

生産集合 Y_j は以下のような諸条件を満たす．まず各企業は生産活動の停止を選択することができるので，$0 \in Y_j$ であるが，生産要素をまったく投入することなく生産物を産出することは不可能であり，$Y_j \cap R^{l+1}_+ \subset \{0\}$ である．また Y_j は閉集合で上に有界である．このことは実行可能な生産計画の点列の極限値は各企業にとって実際に生産可能であり，また無限に生産物を産出することは不可能であることを意味する．さらに Y_j は厳密に凸であり，Y_j の境界は厳密なガウス曲率をもつと仮定する．前者は生産技術が規模に関して収穫逓減であることを表す．後者については本稿の分析において深く論及しないが，企業の供給関数が連続になるために必要な仮定である．

消費部門は m タイプの消費者からなる．消費者 i（$i = 1, ..., m$）は $\omega_i \in R^{l+1}_{++}$ の初期保有ベクトルを保有し，企業 j が得た利潤を分配率 $\theta_{ij} \geq 0$ にしたがって受け取る．ただし，各 j に対して $\sum_{i=1}^{m} \theta_{ij} = 1$ が成り立つ．消費者 i は予算制約 $p \cdot x_i \leq p \cdot w_i$ のもと，自己

の選好にもとづいて最適な財バンドル $x_i \in R^{l+1}$ を選ぶ．ただし，$w_i := p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} \pi_j$ は利潤分配後の消費者 i の所得である．

これらの条件のもと，消費者 i は需要関数 $\xi_i(\cdot,\cdot): S \times R^{n(l+1)} \to R^{l+1}$ をもつと仮定する．ただし，$\xi_i \in C^{\infty}(S \times R^{n(l+1)}, R^{l+1})$ である[6]．さらにその選好は局所非飽和性と境界条件を満たすと仮定する．前者は，任意の消費者は均衡においては常に所得をすべて使い切る，つまり予算制約式は等号で成り立つことを意味する．後者は，任意の価格 p_h が 0 に収束する際，あるタイプの消費者の需要量は非有界となることを意味し，そのような価格のもとでの均衡の存在を排除する．

企業と消費者の特徴を定義したので，我々は以下で二種類の均衡及び正則性について定義できる．交換均衡はすべての市場が均衡する価格と総生産計画の組み合わせを表す．

定義 2.1（交換均衡）：　経済 E における交換均衡は，次の条件を満たすような組み合わせ $(p^*, y^*) \in S \times R^{n(l+1)}$ である：

$$\sum_{i=1}^{m} \xi_i\left(p^*, p^* \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p^* \cdot y_j^*\right) = \sum_{i=1}^{m} \omega_i + \sum_{j=1}^{n} y_j^* .$$

ここで，所与の総生産計画 $y \in R^{n(l+1)}$ に対し，交換均衡を構成するような価格ベクトル p を指定する対応 $\psi(\cdot): R^{n(l+1)} \to S$ を，交換均衡価格対応として定義する[7]：

$$\psi(y) := \{ p \in S \mid (p, y) \text{は交換均衡である} \}.$$

もちろんある y に対しては，$\psi(y)$ は空集合になるかもしれないし，あるいは複数の価格ベクトルの集合であるかもしれない．$y = 0$ である純粋交換経済においては交換均衡が存

在することが知られている．詳しくは Debreu (1970)を参照されたい．生産経済においても，すべての企業が非負の利潤を得ている場合には，任意の総生産計画に対して交換均衡価格ベクトルが存在すると考えてよい．簡潔に言えば，各 j に対して $p \cdot y_j \geq 0$ が成り立つような場合には，各 i に対して $w_i > 0$ が成り立ち，需要関数の連続性と境界条件によりその対応 $\psi(y)$が上半連続になるからである．本稿ではこれ以上の論及は避けるが，$0 \in Y_j$ の仮定より，合理的な企業は負の利潤で操業するくらいなら操業停止を選択するので，すべての企業の利潤が非負であるという仮定は現実的な仮定である．

ここで我々は交換均衡の正則性を定義する．まず総超過需要関数 $\hat{\zeta}(\cdot,\cdot): S \times R^{n(l+1)} \to R^{l+1}$ が以下の式によって定義される[8]：

$$\hat{\zeta}(p, y) := \sum_{i=1}^{m} \xi_i \left(p, p \cdot \omega_i + \sum_{j=1}^{n} \theta_{ij} p \cdot y_j\right) - \sum_{i=1}^{m} \omega_i - \sum_{j=1}^{n} y_j .$$

さらに，$\hat{\zeta}$ の像から第 0 要素（価値基準財）を除いた l 個の値を写す関数として，$\zeta(\cdot,\cdot): S \times R^{n(l+1)} \to R^{l}$ を定義する．このときワルラス法則により，$\zeta(p, y) = 0$ は $\hat{\zeta}(p, y) = 0$ を導き，(p, y)が交換均衡であることを意味する．

以上を踏まえて，交換均衡の正則性を定義できる[9]．正則性は，後に交換均衡価格選択の性質を考慮する際，重要な要素となる．

定義 2.2（正則交換均衡）： もし $\zeta(p^*, y^*) = 0$ でありかつヤコビアン行列 $D_p\zeta$ が正則行列（特異行列）であるならば，$(p^*, y^*) \in S \times R^{n(l+1)}$ は正則（臨界）交換均衡である．

p に関する微分は実際には{ $p_1, p_2, ..., p_l$ }に関する微分であることに注意されたい．ζ は第0財を除いた財の価格空間への関数なので，正則性は $D_p\zeta$ の階数が l であることを意味する．よって任意の交換均衡は，この定義に従って正則均衡と臨界均衡とに区別できる．

$y \in R^{n(l+1)}$ を所与としたとき，もしすべての交換均衡が正則であるなら，その経済を正則経済と定義する．Debreu(1970)は臨界経済が生じるような初期保有量の集合のルベーグ測度は0であることを証明している．このことは，ルベーグ測度の意味においては，ほとんどすべての交換均衡が正則であると考えてよいことを意味している．

次に我々は交換均衡の定義に加え，完全競争企業による利潤最大化を要請するワルラス均衡を定義する．

定義 2.3（ワルラス均衡）： 経済 E におけるワルラス均衡は，次の条件(a)，(b)を満たすような組み合わせ $(p^*, y^*) \in S \times R^{n(l+1)}$ である：

(a) (p^*, y^*) は交換均衡である：$\zeta(p^*, y^*) = 0$,

(b) 任意の j 及び $y'_j \in Y_j$ に対して，$y^*_j \in Y_j$ は以下の不等式を満たす：$p^* \cdot y^*_j \geq p^* \cdot y'_j$.

ワルラス均衡において各企業はプライステーカーである、条件(b)が企業の利潤最大化行動を表すが，Y_j が厳密に凸であるので，各企業の最適な生産計画は一意に決まる．

3. 決定的選択と連続確率選択

本節では，ある総生産計画に対して交換均衡価格ベクトルが複数存在する際に一つの価格ベクトルを指定する選択を二種類定義する．それは決定的選択と連続確率選択である．

決定的選択は，ある交換均衡において総生産計画が変化した際に，変更前の均衡価格ベクトルにもっとも近い交換均衡価格ベクトルを指定する選択である．交換均衡の非存在問題を排除するために，実行可能な総生産計画の集合として，$T := \{y \in R^{n(l+1)} \mid \psi(y) \neq \varnothing\}$ を定義する．分析の焦点であるワルラス均衡における総生産計画はもちろん T に含まれている．決定的選択は，$p \in \psi(y)$に対して，次のように写像 $P(\cdot,\cdot,\cdot)$: $S \times T \times T \to S$ として定義される[10)]：

$$P(p, y, y') \in \{ p^* \in \psi(y') \mid \text{任意の } p' \in \psi(y') \text{に対して} \| p^* - p \| \leq \| p' - p \| \}.$$

つまり交換均衡(p, y)を所与として，総生産計画が y から y' に変化した際，新しい均衡価格ベクトルは $P(\cdot p, y, y')$になるのである．総生産計画 y' に対して交換均衡価格ベクトルが複数存在する場合，元来の価格ベクトル p に最も近い価格ベクトルが選ばれるのである．

生産集合の仮定と陰関数定理により，次の命題が証明される．

命題 3.1 [Roberts(1980)]：　もし(p^*, y^*)が正則交換均衡であり，すべての j について $p^* \cdot y_j^* \geq 0$ が成り立つならば，y^*に対して十分小さい正の数εが存在し，ある近傍 $U_\varepsilon := \{ y \in R^{n(l+1)} \mid \| y^* - y \| < \varepsilon \}$が定義できて，$P(p^*, y^*, \cdot) \in C^\infty(U_\varepsilon, S)$である．

証明：(p^*, y^*)において$D_p\zeta$は正則行列であるので，陰関数定理によりy^*のある近傍U_εにおいて$C^\infty(U_\varepsilon, S)$級関数$g(\cdot)$が$(p^*, y^*)$の近傍に一意に存在して，$y' \in U_\varepsilon$に対して次の等式を満たす：

$$\zeta(g(y'), y') = 0.$$

εを十分小さくとれば$P(p^*, y^*, y') = g(y')$となるから，本命題は成り立つ．■

次にもう一つの選択，連続確率選択を定義する．$M(S)$をS上の確率測度の空間で弱収束位相が与えられたものであるとしよう．交換均衡価格対応$\psi(\cdot)$からの連続確率選択は，各$y \in T$に対して定義される関数$\mu(\cdot): T \to M(S)$で，yについて連続であり，$\mu(y)(\psi(y)) = 1$を満たす．つまりこの選択は，企業の総生産計画を所与として，市場を均衡させる諸価格ベクトルを確率1で指定する確率測度である．その連続性は，総生産計画の点列$\{y^k\}$がyに収束するとき確率測度の点列$\mu(y^k)$が$\mu(y)$に弱収束することを意味する．このような選択の存在は，臨界交換均衡が連続体で存在しない場合には，$C^\infty(S \times R^{n(l+1)}, R^l)$の残留集合に属する$\zeta$に対して保証される．詳しくはAllen (1985) を参照せよ．決定的選択は臨界交換均衡においては一意性や連続性が保証されないが，連続確率選択は上記の意味での連続性が大域的に保証されるのである．

完全競争企業が期待価格を所与として利潤を最大化する期待ワルラス均衡を定義する．期待価格を所与とみなすことは，すべての企業が同一の連続確率選択を用いること，及び一企業の生産計画の変更は総生産計画に対して影響を与えず期待価格ベクトルが不変であることを意味する．

定義 3.1（期待ワルラス均衡）： 経済 E における期待ワルラス均衡は次の条件(a)，(b)を満たす$(p^*, y^*) \in S \times T$ である：

(a) (p^*, y^*)は交換均衡である：$\zeta(p^*, y^*) = 0$,

(b) 任意の j 及び $y'_j \in Y_j$ に対して，$y^*_j \in Y_j$ は以下の不等式を満たす：

$$\int_S p \cdot y^*_j d\mu(y^*)(p) \geq \int_S p \cdot y'_j d\mu(y^*)(p).$$

不確実な状況下で企業は期待利潤を最大化する．任意の $y^*_j \in Y_j$ は，期待価格を所与として利潤を最大化している．この概念は，先に定義されたワルラス均衡とは異なる．消費者は現実の一つの価格ベクトルに直面するが，交換均衡価格対応が複数の価格ベクトルを指定する場合には，それらの中から現実に成立する一つの価格ベクトルを企業は正確に予見できないので，期待価格を所与とせざるを得ないのである．ただし，その期待価格のもとで利潤を最大化する総生産計画が，いずれの均衡価格が現実に成立した場合にでも消費者の需要に一致するのである．結果的には，実際に成立した価格ベクトルのもとで，企業が利潤を最大化しているとは限らないのである．

4．ワルラス均衡と期待ワルラス均衡

本節では，ワルラス均衡と期待ワルラス均衡の関係について考察する．後者は用いる選択が変化すれば均衡自体が異なるため，実際には二つの均衡の間に明確な関連性が存在す

るわけではない．しかしながら正則経済においては，ワルラス均衡配分はある適当な連続確率選択のもとでは期待ワルラス均衡になることが証明できる．

次の補題は，正則経済においては交換均衡価格ベクトルは有限で，その十分小さな近傍においては，その個数が局所的に一定であることを主張する．

補題 4.1 [Debreu (1970)] ：　正則経済 $y^* \in T$ において，存在する交換均衡価格ベクトルは有限であり，ある自然数 k に対し交換均衡は $(p^1, y^*), (p^2, y^*), \ldots, (p^k, y^*)$ と表記できる．またすべての h 及び j について $p^h \cdot y_j^* \geq 0$ が成り立つならば，十分小さい正の数εが存在し，ある近傍 $U_\varepsilon := \{ y \in T \mid \| y^* - y \| < \varepsilon \}$ において，任意の $y \in U_\varepsilon$ に対し次の条件を満たすような k 個の $C^\infty(U_\varepsilon, S)$ 級関数 $P^1(p^1, y^*, \cdot), P^2(p^2, y^*, \cdot), \ldots, P^k(p^k, y^*, \cdot)$が存在する：

$$\psi(y) = \{ P^1(p^1, y^*, y), P^2(p^2, y^*, y), \ldots, P^k(p^k, y^*, y) \}.$$

証明：　正則経済 y^*においては，逆関数定理により交換均衡は離散集合である．また交換均衡の集合を考えると，$\zeta(\cdot, \cdot) = 0$ の逆像であるが，これは需要関数の連続性と境界条件によりコンパクトな集合である．仮に均衡価格ベクトルが無限に存在すると仮定すると，$\psi(y^*)$はコンパクトな集合ではなくなり，矛盾である．よって，交換均衡価格ベクトルは有限である．

このとき命題 3.1 より，正則交換均衡(p^1, y^*), (p^2, y^*), ..., (p^k, y^*)の各々に対して，上記の条件を満足する $C^\infty(U_\varepsilon, S)$ 級関数 $P^1(p^1, y^*, \cdot)$, $P^2(p^2, y^*, \cdot)$, ..., $P^k(p^k, y^*, \cdot)$が存在する． ■

命題 4.2： 正則経済におけるワルラス均衡は，ある適当な連続確率選択のもとで期待ワルラス均衡になる．

証明： 正則経済におけるワルラス均衡を$(p^*, y^*) \in S \times T$ とおく．このとき，任意の j 及び $y'_j \in Y_j$ に対して $p^* \cdot y_j^* \geq p^* \cdot y'_j$ が成り立ち，また $\zeta(p^*, y^*)=0$ である．

任意の連続確率選択を $\mu(\cdot): T \to M(S)$とおく．この選択 $\mu(\cdot)$を修正して，上記の(p^*, y^*)が期待ワルラス均衡になるような連続確率選択を構築できることを以下に示す．

ところで補題 4.1 により，y^* の近傍 U_ε を十分小さく選べば，$S \times \{U_\varepsilon \cup \mathrm{Bd}U_\varepsilon\}$における すべての交換均衡が正則である [11]．実際には，U_ε において $\mu(\cdot)$を修正すればよい．まずは $y = y^*$において，$\mu'(y^*)(p^*) = 1$ とし，逆に $p \neq p^*$に対しては $\mu'(y^*)(p) = 0$ とする．このとき $\int_S p d\mu'(y^*)(p) = p^*$であり，また$(p^*, y^*)$がワルラス均衡であることから，任意の j 及び $y'_j \in Y_j$ に対して $y_j^* \in Y_j$ は $p^* \cdot y_j^* \geq p^* \cdot y'_j$ を満たす．よって任意の j 及び $y'_j \in Y_j$ に対して，$y_j^* \in Y_j$ は $\int_S p \cdot y_j^* d\mu'(y^*)(p) \geq \int_S p \cdot y'_j d\mu'(y^*)(p)$ を満たすことがわかる．こうして(p^*, y^*)が期待ワルラス均衡になる．

交換均衡価格ベクトルに着目すれば，補題 4.1 における近傍を小さめにとることにより，$\psi(y^*):=\{p^1, p^2, \dots, p^k\}$に対し，$U_\varepsilon \cup \mathrm{Bd}U_\varepsilon$における決定的選択に$P^1(p^1, y^*, \cdot)$，$P^2(p^2, y^*, \cdot)$，…，$P^k(p^k, y^*, \cdot)$と番号を付与することができる．便宜上$p^1 = p^*$とする．

あとはこれをもとに，y^*以外の総生産計画に対して連続性を満たすように$\mu(\cdot)$を修正すればよい．任意の$z \in U_\varepsilon - \{y^*\}$を考える．$z$に対し，$\underline{\alpha} := \min\{\alpha \in R_- \mid \{y^* + \alpha(y^* - z)\} \cap \mathrm{Bd}U_\varepsilon \neq \emptyset\}$を定義する．さらにその$\underline{\alpha}$に対して$\underline{z} := y^* + \underline{\alpha}(y^* - z)$とおけば，$\underline{z} \in \mathrm{Bd}U_\varepsilon$である．

このとき，$h = 1, 2, \dots, k$に対して$\underline{p}^h := P^h(p^h, y^*, \underline{z})$と定義して，任意の$z \in U_\varepsilon - \{y^*\}$に対して，連続な確率測度$\mu'(z)(\cdot)$を以下のように構築すればよい．

$$\mu'(z)(p^h) = \begin{cases} \mu'(z)(P^h(p^h, y^*, z)) = \dfrac{\|y^* - z\|}{\varepsilon}\mu(\underline{z})(\underline{p}^h) & h = 2, \dots, k \\ \mu'(z)(P^1(p^1, y^*, z)) = 1 - \dfrac{\|y^* - z\|}{\varepsilon}\sum_{h=2}^{k}\mu(\underline{z})(\underline{p}^h) & h = 1 \end{cases}$$

大域的には，元来の$\mu(\cdot)$に対して$\mu''(\cdot)$を以下のように定義し直せば，連続性を保持する．

$$\mu''(y) = \begin{cases} \mu'(y) & \text{if } y \in U_\varepsilon \\ \mu(y) & \text{if } y \notin U_\varepsilon \end{cases}. \qquad \blacksquare$$

例 4.3：正則経済において，ワルラス均衡が期待ワルラス均衡になる例

一消費者の労働を投入して，一企業が消費財を生産するような二財経済モデルを考える．Lを労働投入量，yを消費財生産量として，企業の生産関数が$y = 2\sqrt{L}$で与えられるとする．労働賃金を1，消費財価格をpとして価格標準化を行う．便宜上，企業は生産に必要な最小限の労働を投入するものと仮定すれば，供給関数は$y^c(p) = 2p$で表される．

超過需要関数を考える．消費者は余暇と消費財を消費する．ワルラス法則により消費財について考えるだけでよい．前述のように企業は必要最小限の労働を投入するものと仮定して，その際の総超過需要関数が $\zeta(p, y) = y + p^3 - 9p^2 + 24p - 24$ で与えられるものとする．p で微分すると $\zeta_p(p, y) = 3p^2 - 18p + 24$ である．本モデルでは三つのワルラス均衡が存在するが，$(p, y) = (3, 6)$は正則交換均衡であり，$(p, y) = (2, 4)$，$(4, 8)$は臨界交換均衡である．このとき，ある連続確率選択のもとでは$(3, 6)$は期待ワルラス均衡にもなりうるが，$(2, 4)$及び$(4, 8)$はどんな連続確率選択のもとでも期待ワルラス均衡になりえないことがわかる（図 A 参照：ただし直感を伝えるため，図は一部簡略化されているので注意されたい.）.

$(p, y) = (3, 6)$が期待ワルラス均衡になるためには，$y = 3$ のとき期待価格が 6 となりさえすればよい．$y < 4$，$8 < y$ のときは交換均衡価格が一意に決まるので，任意の連続確率選択はその価格を確率 1 で指定する．$4 < y < 8$ のときのみ均衡価格が三つ存在することに着目し，例えば次のような単純な連続確率選択を構築すれば期待価格が 6 になる[12)].

$4 \le y \le 8$ のとき，
$$\begin{cases} \mu(y)(\overline{p}(y)) = \max\left\{\dfrac{6-y}{2}, 0\right\} \\ \mu(y)(\underline{p}(y)) = \max\left\{\dfrac{y-6}{2}, 0\right\} \\ \mu(y)(\hat{p}(y)) = 1 - \mu(y)(\overline{p}(y)) - \mu(y)(\underline{p}(y)) \\ \mu(y)(p) = 0 \qquad p \ne \overline{p}(y), p \ne \hat{p}(y), p \ne \underline{p}(y) \end{cases}$$

上記以外のとき，
$$\begin{cases} \mu(y)(\overline{p}(y)) = 1 \\ \mu(y)(p) = 0 \qquad p \ne \overline{p}(y) \end{cases}$$

ただし，$\overline{p}(y)=\max\{p\in R_{++}\mid\zeta(p,y)=0\}$，$\underline{p}(y)=\min\{p\in R_{++}\mid\zeta(p,y)=0\}$，$\hat{p}(y)=\{p\in R_{++}\mid\zeta(p,y)=0, p\neq\overline{p}(y), p\neq\underline{p}(y)\}$である．($y$の値によっては空集合になり定義できない場合もある．)

直感的には，生産量が少ないときは高い価格が成立しやすく，生産量が多いときは低い価格が成立しやすいと企業は考えている．そして，$y=6$に近い生産量のもとでは需要関数が右上がりになっているような状態が起きやすいと考えている．とりわけ$y=6$のもとでは，$p=3$が確率1で成立すると予想しており，$(p,y)=(3,6)$が期待ワルラス均衡になるのである．($p\neq 3$の場合に$y=6$を生産することは実際には利潤最大化行動にならないが，その定義から$(3\pm\sqrt{3},6)$もまた期待ワルラス均衡になることに注意されたい．)

逆に$(p,y)=(2,4)$が期待ワルラス均衡になるような連続確率選択を構築するのは不可能である．そのためには期待価格が2にならなければいけないが，その連続性により$p=2$に対しては確率0を与えざるをえない．よって$p=5$に確率1を指定することになり，定義3.1(b)を満たす選択は構築できないのである．$(p,y)=(4,8)$についても同様である．

また，決定的選択を考慮すると，臨界交換均衡における不規則性が明確に理解できる．例えば$(p,y)=(2,4)$を考える．$y<4$であれば，$P(2,4,y)>5$であるから明らかに連続性を満たさないことがわかる．　■

上記の例で見たように，連続確率選択はその連続性により，通常は臨界交換均衡となるような価格に対して確率0を与えることになる．このことは，ワルラス均衡が臨界交換均

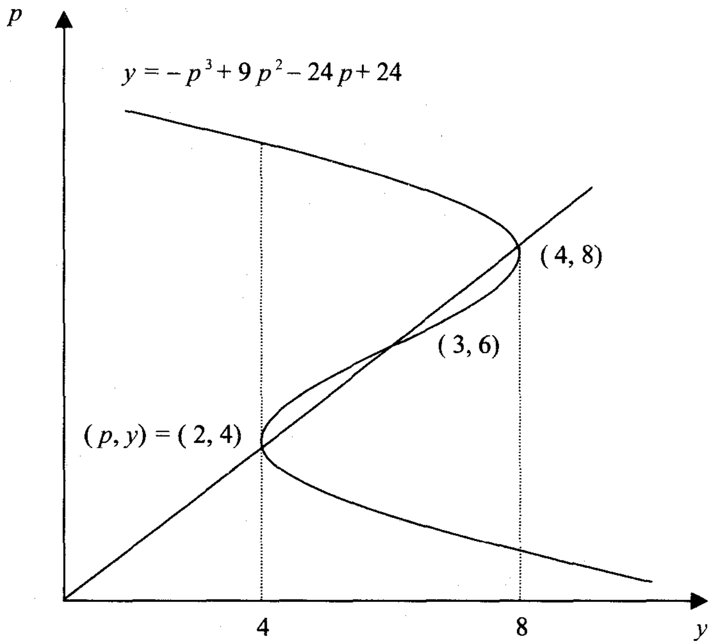

図 A: 上記の需要関数は $\zeta(p, y) = y + p^3 - 9p^2 + 24p - 24 = 0$ のグラフであり, 供給関数は $y^c(p) = 2p$ である. 正則交換均衡であるワルラス均衡(3, 6)は, ある連続確率選択のもと期待ワルラス均衡になる.

衡であるならば，その配分はどんな連続確率選択のもとでも期待ワルラス均衡になりえないことを一般的に意味するように思えるが，実際にはそうではない．

例 4.4：臨界交換均衡であるようなワルラス均衡が期待ワルラス均衡になる例

例 4.3 と同様の一消費者・一企業・二財モデルを考える．生産関数が $y=2\sqrt{10L}$ で，超過需要関数が $\zeta(p, y) = y - 120 + (p-7)(p-6)^2(p-3)(p-1)$ で与えられるものとする．需要関数を p で微分すると $\zeta_p(p, y) = (p-6)(p-4)(5p^2-42p+57)$ である．

企業の供給関数は $y^c(p) = 20p$ となるので，$(p, y) = (6, 120)$ は一つのワルラス均衡である．これは臨界交換均衡であるが，ある連続確率選択のもとでは，期待ワルラス均衡になる（図 B 参照：ただし図は一部簡略化されている．）．具体的には以下のような連続確率選択を構築すればよい．ただし $\overline{p}(y)$ 及び $\underline{p}(y)$ の定義は例 4.3 と同様である．

$0 \le y \le 119.9$ のとき，
$$\begin{cases} \mu(y)(\overline{p}(y)) = 1 \\ \mu(y)(p) = 0 & p \ne \overline{p}(y) \end{cases}$$

$119.9 \le y \le 120.5$ のとき，
$$\begin{cases} \mu(y)(\overline{p}(y)) = \dfrac{5(120.5-y)}{3} \\ \mu(y)(\underline{p}(y)) = \dfrac{5(y-119.9)}{3} \\ \mu(y)(p) = 0 & p \ne \overline{p}(y), p \ne \underline{p}(y) \end{cases}$$

$120.5 \le y$ のとき，
$$\begin{cases} \mu(y)(\underline{p}(y)) = 1 \\ \mu(y)(p) = 0 & p \ne \underline{p}(y) \end{cases}$$

特にこの選択は $y = 120$ のもと $p = 6$ 自体には確率 0 を与えるのであるが，期待価格としては $p = 6$ が指定され，期待ワルラス均衡となるのである． ■

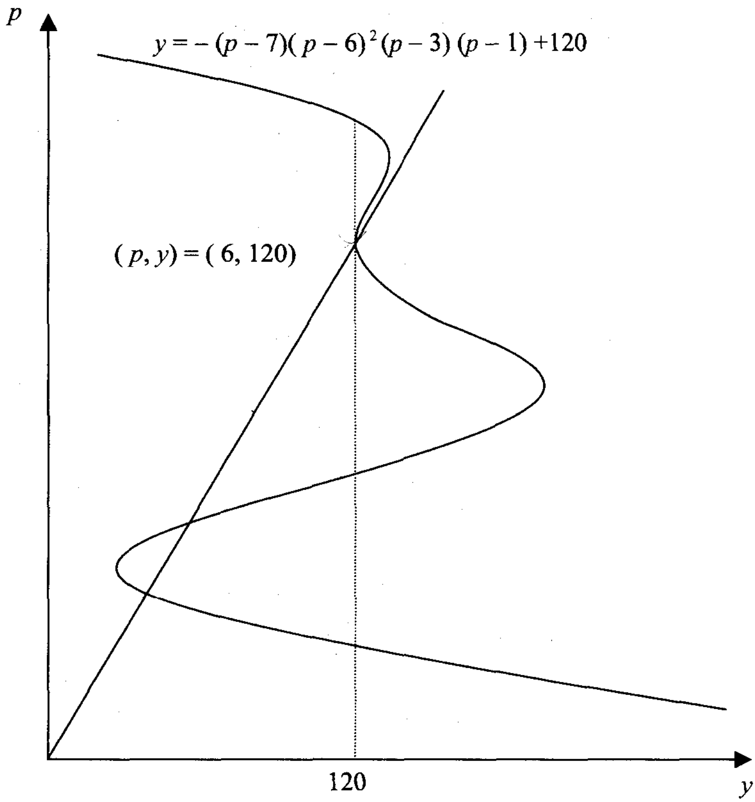

図 B: 上記の需要関数は $\zeta(p, y) = y - 120 + (p-7)(p-6)^2(p-3)(p-1) = 0$ のグラフであり，供給関数は $y^c(p) = 20p$ である．ワルラス均衡(6, 120)は臨界交換均衡であるが，ある連続確率選択のもと期待ワルラス均衡になる．

5. 結語

以上分析してきたように，正則経済におけるワルラス均衡は，ある連続確率選択のもとで期待ワルラス均衡となることが主張される．また，逆に臨界交換均衡であるようなワルラス均衡に対しては，それを期待ワルラス均衡にするような連続確率選択が構築できることもあれば，できないこともあることが例示された．

第4節における二つの例では，企業の生産関数は明示されたものの，総超過需要関数はアプリオリに与えられた[13)]．しかしながら，消費者のいかなる選好のもとでそのような総超過需要関数が導出されるかなど，さらなる具現化の余地はある．特に一般均衡理論における需要関数には消費者の所得として企業利潤が関係してくるため困難な点は多いが，そこまで遡及して例示できれば，精緻化されたより説得力のある経済モデルが提示できる．

また，連続確率選択は連続性を満たしさえすれば複数種類構築できる可能性があり，期待ワルラス均衡の個数自体にも大きく影響を与える．例えば例 4.3 においては，ワルラス均衡も期待ワルラス均衡も三つ存在した．連続確率選択と期待ワルラス均衡の個数との間になんらかの関係性を見つけることができるか検討したい．

また，クールノー均衡についても同様の関係が存在するかどうかの確認も興味がある．つまり決定的選択のもとでのクールノー均衡と連続確率選択のもとでのクールノー均衡との関連性である．当然のことながら，いずれの選択のもとでも企業の生産計画変更が価格あるいは期待価格に対して影響を与えるため，分析はより難解になる．

これらの問題解決については，今後の研究の課題としていきたい．

＜注＞

*) 本稿は著者の修士論文(Kaneko(1997))第２章及び第３章に加筆修正したものである．

1) 原語 deterministic selection を本稿では決定的選択と訳したが，一般に普及している訳語とは限らないので注意されたい．武隈(2001)，p134 における連続選択(continuous selection)という訳語を参考にした．

2) 原語 continuous random selection を本稿では連続確率選択と訳したが，これも一般に普及している訳語とは限らないので注意されたい．

3) 彼らは独占的競争均衡（monopolistically competitive equilibrium）と表現しているが，その定義より実質的にクールノー・ナッシュ均衡である．

4) Allen（1994)は連続確率選択にしたがう場合でも，決定的選択にしたがう場合のRoberts(1980)と同様にワルラス均衡(Walras equilibrium)として定義しているが，本稿では両者の明確な差異を強調するために，期待ワルラス均衡と定義する（定義 3.1)．

5) 本来ならベクトルはボールド体で表記されるべきであるが，本稿では使われるほとんどすべての変数がベクトルであるので，あえてボールド体では表示しない．

6) $C^{\infty}(S\times R^{n(l+1)}, R^{l+1}) := \cap_{1\leq r} C^{r}(S\times R^{n(l+1)}, R^{l+1})$である．ただし，任意の自然数 r に対して $C^{r}(S\times R^{n(l+1)}, R^{l+1})$は，$S\times R^{n(l+1)}$から R^{l+1} への関数のうちでその r 階までのすべての偏導関数が存在し連続であるような関数の集合である．

7) 厳密には関係であるが，以下の分析では $\psi(y)\neq\varnothing$ となるケースを扱うため対応とする．

8) 以下の分析では $\hat{\zeta}$ ではなく ζ を使用していくので後者の方を敢えて単純な記号で表す．

9) 以下の定義2.2は，$(\omega_1, \ldots, \omega_m)$ が変動する純粋交換経済を扱ったDebreu (1970)の定義ではなく，$(y_1, \ldots, y_n)$ が変動する生産経済を扱ったRoberts(1980)の定義に従った．とはいえ，前者において証明される諸定理は生産経済にも適用しうるため，以下本稿でもしばしば利用される．

10) ノルム $\| p' - p \| := \sqrt{\sum_{h=1}^{l} (p'_h - p_h)}$ は l 次元ユークリッド空間の距離関数である．

11) $\mathrm{Bd}U_\varepsilon$ は U_εの境界を表す．

12) 本例における開集合$\{ y \in R \mid 4 < y < 8 \}$は，命題4.2における U_εとして適用する場合には，より小さくなければいけない．

13) Roberts(1980)の種々の例も，総超過需要関数はアプリオリに与えられている

参考文献

[1] 武隈愼一 (2001),『数理経済学』　新世社.

[2] 永田良 (2001),『数理経済学の新展開・正則経済の理論』　早稲田大学出版部.

[3] B. Allen (1985), "Continuous Random Selections From the Equilibrium Correspondence," CORE Discussion Paper N8520.

[4] B. Allen (1994), "Randomization and the Limit Points of Monopolistic Competition," *Journal of Mathematical Economics* 23, 205-218.

[5] K. J. Arrow and F. H. Hahn (1971), *General Competitive Analysis*, San Francisco: Holden Day.

[6] P. Billingsley (1968), *Convergence of Probability Measures*, John Willy & Sons, New York.

[7] P. Billingsley (1986), *Probability and Measure*, John Willy & Sons, New York.

[8] G. Debreu (1959), *Theory of Value: An Axiomatic Analysis of Economic Equilibrium*, Yale University Press.

[9] G. Debreu (1970), "Economies with a Finite Set of Equilibria," *Econometrica* 38, 387-392.

[10] G. Debreu (1972), "Smooth Preferences," *Econometrica* 40, 603-615.

[11] E. Dieker (1972), "Two Remarks on the Number of Equilibria of an Economy," *Econometrica* 40, 951-953.

[12] E. Dieker (1982), "Regular Economies," Chapter 17 in *Handbook of Mathematical Economics*, volume II, edited by K. J. Arrow and M. D. Intriligator, North Holland.

[13] J. J. Gabszewicz and A. Turrini (2000), "Worker's Skills, Product Quality and Industry Equilibrium," *International Journal of Industrial Organaization* 18, 575-593.

[14] K. Kaneko(1997), "Bertrand, Cournot, and Walras Equilibria in Pure Strategies with Decreasing Returns to Scale," *A Master's Thesis* submitted to the Graduate School of Economics Hitotsubashi University.

[15] K. Roberts (1980), "The Limit Points of Monopolistic Competition," *Journal of Economic Theory* 22, 256-278.