

有限期間の価格競争複占ゲームに おける暗黙の共謀

—Klaus Wallnerの利潤関数に関する命題の訂正—

金子 浩 一

1. はじめに

単純な価格競争静学ゲームにおいては、激しい価格引き下げ競争が生じ均衡価格は限界費用に等しくなるというベルトランの逆理が知られている。しかしながら、その単純なモデルには強すぎると批判される三つの仮定がある。一つは各企業が生産する財が完全代替財であること、一つは生産能力に限界がないこと、もう一つは一回限りのゲームであることである。これらの仮定の一つが緩められれば、ベルトランの逆理は回避されうる。

例えば無限繰り返しゲームの設定にした場合、トリガー戦略を用いればサブゲーム完全なナッシュ均衡において各企業が独占価格を提示することも可能である。これは高い割引因子に適用されるフォーク定理 (Friedman (1971)) として知られている。また無限期間逐次手番複占ゲームでは、Maskin and Tirole (1988b) が二種類の完全マルコフ均衡を定義し、とりわけ每期独占価格が提示される均衡が存在することが示された。

さらにWallner(1999)は、二企業が完全代替財を限界無く生産しうる設定のもと、有限期間逐次手番ゲームを構築した。このゲームにおいては三期循環の反応関数がマルコフ均衡を形成し、その均衡経路上の平均産業利潤はゲーム期間が長くなるにつれて独占利潤の5/6に収束することを彼は示した。有限期間の設定でマルコフ戦略を用いても暗黙の共謀が達成される点が、彼の論文の主要な業績である。しかしながら利潤に関する命題について多少修正すべき部分

がある。

本稿は彼のモデルを借用・分析しながら修正部分を指摘し、その訂正を行う。本稿の主要な目的は、その均衡経路上で得られる平均産業利潤は、正確には独占利潤の“少なくとも” $5/6$ であることを、利潤関数の凹性を利用して形式的に証明することである。

本稿の構成は次のようである。まず第2節で分析の対象となる経済モデルを定義し、Wallner(1999)が与えた利潤関数の性質に関して注意を与える。第3節では彼が定義した三期循環をなす最適な反応関数を明示的に描写し、不規則なパターンが生じる期間を中心に完全マルコフ均衡であることを証明する。第4節では均衡経路上の平均産業利潤が独占利潤の“少なくとも” $5/6$ であることを証明する。第5節は結びとして将来研究の課題となるモデル拡張の可能性について言及する。

2. モデル

この節では、同質財を生産する二企業が交代で価格を提示する有限期間動学ゲームを設定する。後に正確に定義されるが、企業が選択しうる価格の集合は有限かつ離散であり、時間に依存せず両企業に共通な集合である。ゲームの期間は便宜上 $3T+2$ (ただし T は正の偶数) とする。企業1は奇数期に、企業2は偶数期に価格を提示する。第0期の市場価格は外生的に与えられる。単純化のために、生産に費用はかからず割引因子は1であると仮定する。

敵対企業の価格提示期には、企業は価格を変更できない。つまり t 期に設定した企業の価格 p_t は $t+1$ 期にも提示される。市場価格は次の規則にしたがって決まるものと仮定する。

仮定 2.1: t 期に成立する市場価格 m_t は二企業の提示する価格の低い方である：
 $m_t = \min\{p_t, p_{t-1}\}$ 。もし双方の企業が同じ価格を提示するなら、需要は二等分される。

産業利潤関数は価格の関数 $\pi(\cdot) : R_+ \rightarrow R$ によって表され、仮定2.2の特性をもつ。 $\pi(\cdot)$ は一変数関数であるので厳密な凹関数であり、補題2.1が導き出

される。仮定2.1により価格 p を提示する企業の利潤は、敵対企業より設定価格が低い場合は $\pi(p)$ 、敵対企業と同価格である場合は $\pi(p)/2$ 、敵対企業より設定価格が高い場合は 0 である。

仮定 2.2：産業利潤関数 $\pi(\cdot)$ は三回連続可微分であり、 $\pi'' < 0$ である。また、 $\pi(0) = 0$ であり、 $p^M (> 0)$ においてのみその最大値をとる。

補題 2.1[Wallner (1999 LEMMA1)]： 仮定2.2のもとではある $\bar{\varepsilon} > 0$ が存在して、任意の $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon})$ に対して次の四つの条件が満たされる：

- (a) $3\pi(\varepsilon)/2 < \pi(2\varepsilon)$,
- (b) $\pi(p) > 0$ となるような $p(> 2\varepsilon)$ に対して $\pi(p - \varepsilon) > 3\pi(p)/4$,
- (c) $\pi(p^M + \varepsilon) + \pi(p^M - \varepsilon) > \pi(p^M) + \pi(p^M - 2\varepsilon)$,
- (d) $\pi(2\varepsilon) < \pi(p^M)/8$.

証明： 平均値の定理と $\pi'' < 0$ より以下の不等式が成り立つ：

$$\frac{\pi(2\varepsilon)}{\pi(\varepsilon)} > \frac{\pi(\varepsilon) + \varepsilon \pi'(2\varepsilon)}{\pi(\varepsilon)} = 1 + \frac{\pi'(\varepsilon)}{\pi(\varepsilon)/\varepsilon}.$$

$\varepsilon \rightarrow 0$ とすれば、極限においては以下の不等式が成り立つ：

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(2\varepsilon)}{\pi(\varepsilon)} \geq 1 + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi'(\varepsilon)}{\pi(\varepsilon)/\varepsilon} = 1 + \frac{\pi'(0)}{\pi'(0)} = 2.$$

よってある $\bar{\varepsilon}_1 (> 0)$ が存在してすべての $\varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}_1)$ に対して(a)が成り立つ。

(b)–(d)についても仮定2.2より条件を満たすような $\bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\varepsilon}_4$ の存在を証明できる。詳しい証明はWallner(1999)を参照されたい。我々は $\bar{\varepsilon} = \{\bar{\varepsilon}_1, \bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \bar{\varepsilon}_4\}$ と定義しさえすればよい。この $\bar{\varepsilon}$ が補題を満たす。 ■

Wallner(1999 p.263)は(a)の証明において以下の不等式を与えている。

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(2\varepsilon)}{\pi(\varepsilon)} &> \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(\varepsilon) + \varepsilon \pi'(2\varepsilon)}{\pi(\varepsilon)} = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\pi(\varepsilon)/\varepsilon + \pi'(2\varepsilon)}{\pi(\varepsilon)/\varepsilon} \\ &= \frac{\pi'(0) + \pi'(0)}{\pi'(0)} = 2. \end{aligned}$$

しかしこれは十分小さい ε に対しては $2\pi(\varepsilon) < \pi(2\varepsilon)$ が成り立つという誤解を招く。実際には $\pi(\cdot)$ の厳密な凹性により以下のように $2\pi(\varepsilon) > \pi(2\varepsilon)$ が示されることに注意されたい。この不等式により、次節に示される最終期の反応関数は敵対企業の提示価格 2ε に対し ε を提示するのである。

$$\pi(\varepsilon) = \pi\left[\frac{1}{2} \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 2\varepsilon\right] > \frac{\pi(0) + \pi(2\varepsilon)}{2} = \frac{\pi(2\varepsilon)}{2}.$$

補題2.1より、このゲームを自明なものにしないような適切な価格の基準を見つけることができる。そして両企業が共通に提示しうる価格の集合（価格網）を、以下のように各々の適切な価格の基準に対して定義することができる。

仮定 2.3: $\varepsilon (< \bar{\varepsilon})$ を p^M が ε の整数倍となるようなある正の数とする。価格網は $G = \{0, \varepsilon, 2\varepsilon, \dots, p^M, \dots, a\varepsilon\}$ によって表される（ただし $a := \max\{n \in \mathbb{N} : \pi(n\varepsilon) \geq 0\} < \infty$ ）。

価格網が有限個の価格で構成されるという仮定は非常に重要である。というのは、もしそれが連続体であるならば、敵対企業の価格より引き下げる最適な反応価格が存在しないからである。十分に小さく精緻な ε に対しては、このゲームは興味深いものになる¹¹⁾。我々は ε は非常に小さく価格網は非常に多くの要素を含むと想定すべきである。

例えば補題2.1を満たさないような $\varepsilon = p^M/2$ を基準と考えよう。このとき価格網は $G = \{0, \varepsilon, p^M, \dots, a\varepsilon\}$ であるが、 $2\pi(\varepsilon) > \pi(p^M)$ であるために、均衡経路上では両企業が常に ε を提示することになる。上述した自明なゲームとは、このようなゲームである。

企業が用いる戦略は、ゲームの歴史から価格網への関数である。ただし仮定2.1により利潤に影響を与えるのは敵対企業が前期に提示した価格だけであるので、それはマルコフ戦略である。 t 期の企業行動は状態変数である p_{t-1} にのみ依存するので、その反応関数は $B(\cdot) : G \rightarrow G$ で表される。

最後に、最適な反応価格が複数存在する場合の企業の価格選択の規則を決めなければならない。最適な反応価格が複数存在する状況は、定理3.1の証明において形式的に説明される。この仮定により完全マルコフ均衡を一意に定めることができる。

仮定 2.4: 敵対企業の前期の価格に対して複数の最適価格が存在する場合、もし $p^M + \varepsilon$ が含まれればそれを提示し、そうでなければ最適価格の中で最も高い価格を提示する。

これらの仮定のもとで、我々は以下このゲームの完全マルコフ均衡を分析する。それは双方の企業がマルコフ戦略にしたがうサブゲーム完全な均衡である。

3. 三期循環反応関数

本節では均衡戦略を明示的に描写し、それらが実際完全マルコフ均衡であることを不規則なパターンが生じる期間を中心にバックワードインダクションにより確認する。実際次の三期循環をなす反応関数が完全マルコフ均衡を形成する：

$$\begin{aligned}
 B_{3T+2}(p) &= B_{3T+1}(p) = \begin{cases} p^M, & \text{if } p^M < p; \\ p - \varepsilon, & \text{if } 2\varepsilon \leq p \leq p^M; \\ \varepsilon, & \text{if } p = \varepsilon; \end{cases} \\
 B_{3T}(p) &= \begin{cases} p^M + \varepsilon, & \text{if } p^M < p; \\ p - \varepsilon, & \text{if } p_r^* < p \leq p^{M(2)}; \\ p^M + \varepsilon, & \text{if } p \leq p_r^*; \end{cases} \\
 B_{3t}(p) &= \begin{cases} p^M, & \text{if } p^M < p; \\ p - \varepsilon, & \text{if } p_i^* < p \leq p_{i+1}^L \text{ or } p_{i+1}^L + \varepsilon < p \leq p^M; \\ p, & \text{if } p = p_{i+1}^L + \varepsilon; \\ p^M + \varepsilon, & \text{if } p \leq p_i^*; \end{cases} \quad (t=1, \dots, T-1) \\
 B_{3t-1}(p) &= \begin{cases} p_i^*, & \text{if } p \leq p_i^U \text{ or } p_i^* < p; \\ p - \varepsilon, & \text{if } p_i^U < p \leq p_i^*; \end{cases} \quad (t=1, \dots, T) \\
 B_{3t-2}(p) &= \begin{cases} p^M, & \text{if } p^M < p; \\ p - \varepsilon, & \text{if } p_i^R < p \leq p_i^U \text{ or } p_i^L < p \leq p^M; \\ p_i^U, & \text{if } p \leq p_i^R \text{ or } p_i^U < p \leq p_i^L, \end{cases} \quad (t=1, \dots, T)
 \end{aligned}$$

ただし各々の三期循環の反応関数 B_{3t} , B_{3t-1} , B_{3t-2} に関わる四種類の境界価格 p_i^* , p_i^U , p_i^R , p_i^L は以下のように帰納的に定義される。

まず p_r^* は次の不等式を満たす p^M 以下の一意な価格 p ($\in G$) である⁽³⁾：

$$\pi(p-\varepsilon)+\pi(p-3\varepsilon)\leq\pi(p^M-\varepsilon)<\pi(p)+\pi(p-2\varepsilon).$$

この p_t^* に依存して $p_t^*(t=1, \dots, T-1)$ は以下のように定義される:

$$p_t^* = \begin{cases} p_{t+1}^* + \varepsilon, & \text{if } p_{t+1}^* < q; \\ r & \text{if } p_{t+1}^* \geq q, \end{cases}$$

ただし, r は $\pi(p-\varepsilon)\leq\pi(p^M)/2<\pi(p)$ を満たす p^M 以下の一意な価格 $p(\in G)$ であり, q は $\pi(p-\varepsilon)<2\pi(r-\varepsilon)\leq\pi(p)$ を満たす p^M 以下の一意な価格 $p(\in G)$ である。

p_t^U は次の不等式を満たす p^M 以下の一意な価格 $p(\in G)$ である:

$$\pi(p-\varepsilon)\leq\pi(p_t^*)/2<\pi(p).$$

p_t^L は次の不等式を満たす p^M 以下の一意な価格 $p(\in G)$ である:

$$\pi(p-\varepsilon)<2\pi(p_t^U)\leq\pi(p).$$

p_t^R は次の不等式を満たす p^M 以下の一意な価格 $p(\in G)$ である:

$$\pi(p-\varepsilon)\leq\pi(p_t^U)/2<\pi(p).$$

一見ただけでは各境界価格の直観的意味は理解しがたいが, それは行動する企業が限界的な ε だけの引き下げを行うか否かを決定する基準である。合理的な企業が行う限界的な引き下げ以外の行動は, 主に引き上げ (relent) と極端な引き下げである。前者は今期と次期との販売をあきらめる代わりに二期後に高い利潤を得ることができ, 後者は今期得る利潤を極端に下げる代わりに次期の敵対企業の引き上げを誘発して二期連続で販売することができる。

例えば p_t^R の定義は以下の定理の証明で与えられる。その他の境界価格も同様の含意をもつ。等号を伴うのが右辺であるか左辺であるかは, 仮定2.4によって決定される。

境界価格の高低関係を把握するために, 高い順に $p_t^L, p_t^*, p_t^U, p_t^R$ であることに注意するとよい。 q は他の境界価格よりも相対的に高く, p^M に近い価格である。定義から $q\leq p^M$ であり, $2\pi(r-\varepsilon)=\pi(p^M)$ の場合には等号が成り立つ。図Aを見よ。以下の命題4.1の証明にはこれらの認識が必要である。

ここで反応関数が三期で循環する直観的な説明を与えよう。例えば企業1が前期に $p^M+\varepsilon$ を提示していたなら, 企業2は p^M に引き下げて市場を独占する。次に企業1は引き下げ競争が激化するのをおそれ, 極端に p_t^* まで引き下げる。すると企業2はさらに価格を引き下げても利益が少ないので, 二期後の利益を

高めるために、 $p^M + \varepsilon$ まで引き上げて今期の利益を放棄するのである。この状況が交互に繰り返されるのである。

先に定義された戦略にしたがえば、 B_{3t-1} はどんな価格に対しても p_i^* より高い価格を提示することはない。それで B_{3t} は均衡経路上では常に $p^M + \varepsilon$ を選択することになる。それゆえに、初期の価格としてどの価格が選ばれようとも、第3期には必ず $p^M + \varepsilon$ が選ばれることになる。均衡経路上の三期循環で選ばれる価格は p^M , p_i^* , $p^M + \varepsilon$ であり、その結果市場価格としては p^M , p_i^* , p_i^* が成立する。これらの概念は以下の証明において重要な役割を果たし、バックワードインダクションによる解法を単純化する。

定理 3.1 [Wallner (1999) PROPOSITION 2]: 仮定2.1–2.4のもとでは、反応関数 $B_{3T+1}(p)$, $B_{3T+2}(p)$ 及び $B_{3t}(p)$, $B_{3t-1}(p)$, $B_{3t-2}(p)$ ($t = 1, \dots, T$) がこのゲームの一意的な完全マルコフ均衡を形成する。

証明: 最後の二期間及び規則的な三期循環の証明は Wallner (1999) に詳しいので参照されたい。本稿では彼のバックワードインダクションによる証明に基づき、規則的な三期循環反応関数が最適であることを前提として、不規則な循環における企業の最適行動について詳述する。それらの正確な理解は次節における利潤の計算において必要とされる。

まず $p_i^* \geq q$ となるとき不規則な循環が生じることを説明しよう。各 p_i^U は p_i^* を基に定義されており、また $p_i^* = p_{i+1}^* + \varepsilon$ であることから、最終期から数えると点列 $\{p_i^U\}$ は非減少列である。それで最終期から数えて最初に $p_i^U \geq r$ を満たす循環が必ず発生する。その定義と π の厳密な凹性により $\{p_i^U\}$ は一期当たり多くとも ε しか上昇しないので、実際には $p_i^U = r$ が成り立つ。

我々はその循環を便宜上 “ $j+1$ ” と数えよう。そして $3(j+1)-2$ 期に行動する企業を考える。そのとき $2\pi(p_{i+1}^U) = 2\pi(r) > \pi(p^M)$ なので、たとえ敵対企業が p^M より高い価格を提示しようとして、 p_{i+1}^U まで極端に引き下げて次期の敵対企業による引き上げを誘発するのが合理的である。特に p_{i+1}^U が存在しないことに注意すれば、敵対企業が p_{i+1}^U より高い価格を提示している場合には行動企業は p_{i+1}^U まで引き下げることがわかる。逆に敵対企業の提示している価格 p が低い場合、 p_{i+1}^U まで引き上げれば次期に敵対企業が p_{i+1}^* まで引き上げるので、

今期の利潤をあきらめる代わりに次期に $\pi(p_{s+1}^U)$ を得る。限界的な引き下げをしても次期に敵対企業は p_{s+1}^* まで引き上げるので、今期と次期とで $2\pi(p-\varepsilon)$ を得る。前者の場合の利益と後者の場合の利益との境界価格が p_{s+1}^R であり、それは $2\pi(p-\varepsilon) \leq \pi(p_{s+1}^U) < 2\pi(p)$ を満たす一意な価格 $p(\in G)$ である。もし p_{s+1}^R 以下なら前者を選ぶ。両者が等しければ最適な反応価格が複数存在することになるが、仮定2.4より高い方の p_{s+1}^U (前者) が選ばれ、そのため上の不等式の左辺に等号が伴うのである。こうして $p_{s+1}^U = r$ である $3(s+1)-2$ 期の反応関数を形式的に定義できる：

$$B_{3(s+1)-2}(p) = \begin{cases} p_{s+1}^U, & \text{if } p \leq p_{s+1}^R \text{ or } p_{s+1}^U < p; \\ p - \varepsilon, & \text{if } p_{s+1}^R < p \leq p_{s+1}^U. \end{cases}$$

次に $p_{s+1}^U = r$ である $s+1$ 循環には $p_{s+1}^* = q$ が成り立つことを確認しよう。 p_{s+1}^U の定義と $p_{s+1}^U = r$ である事実から不等式 $2\pi(r-\varepsilon) \leq \pi(p_{s+1}^*) < 2\pi(r)$ が得られる。それゆえに q の定義から不等式 $p_{s+1}^* \geq q$ があてはまる。また $s+1$ 循環は最終期から数えて $p_{s+1}^U \geq r$ があてはまる最初の循環なので、 p_{s+2}^U の定義と $p_{s+1}^U = p_{s+2}^U + \varepsilon$ である事実から不等式 $2\pi(r-2\varepsilon) \leq \pi(p_{s+2}^*) < 2\pi(r-\varepsilon)$ があてはまる。それゆえに $p_{s+2}^* < q$ である。ところで、もし $p_{s+1}^* > q$ であると仮定すれば $p_{s+1}^* = p_{s+2}^* + \varepsilon$ により $p_{s+2}^* \geq q$ が成り立つ。それは矛盾であるので $p_{s+1}^* = q$ であることになる。

$3(s+1)-2$ 期に行動する企業は前期に敵対企業がどんな価格を提示しようと $p_{s+1}^U (= r)$ より高い価格は決して提示しない。それで $3(s+1)-1$ 期に行動する企業は必ず $p_{s+1}^* (= q)$ に引き上げる。これらを考慮すると $B_{3(s+1)-3}(p)$ は実は典型的な $3t$ 期のパターンとは異なる⁽⁵⁾。 $3(s+1)-3$ 期に行動する企業は現在どう行動しようと、二期後には p_{s+1}^* に引き上げざるを得ないことを自覚しているので、今期と次期の二期間の利益しか考慮しない。

$B_{3(s+1)-2}(p)$ は典型的な $3t-1$ 期の形状になるので、 $p_{s+1}^U (= r)$ を p_s^* に、 p_{s+1}^R を p_s^U にそれぞれ置き換えれば、我々はそれを $B_{3s-1}(p)$ とみなせることに注意すべきである。ここで最終期から数えた場合、点列 $\{p_s^*\}$ における q から r へのジャンプが生じる。上の説明から $B_{3(s+1)-3}(p)$ は同様に $B_{3s-2}(p)$ におきかえられる。それゆえに我々は元来の $3(s+1)-2$ 期と $3(s+1)-3$ 期を新しく $3s-1$ 期と $3s-2$ 期とそれぞれ付け替える。そうすると不規則に、循環 $s+1$ は $3(s+1)$ 期と $3(s+1)-1$ 期の二期間から構成され、循環 s は $3s-1$ 期と $3s-2$ 期の二期間から構成される。

元来の $3(s+1)-4$ 期には、行動する企業は $B_{3s-1}(p)$ と $B_{3s-2}(p)$ に直面しており、また敵対企業が三期後に $q (=p_{s+1}^*)$ への引き上げを行うことを知っているので、その反応関数は典型的な $3t$ 期のパターンになる。よって元来の $3(s+1)-4$ 期を新しく $3(s-1)$ 期と付け替えれば、循環 $s-1$ は三期間からなり、規則的な循環が再び始まる。そして最適である三期循環反応関数が再び均衡となっていく。 ■

図A 三期循環に関わる価格

各 t について不等式 $p_t^R < p_t^U < p_t^* < p_t^L$ と $r \leq p_t^* \leq q$ が成り立つ。

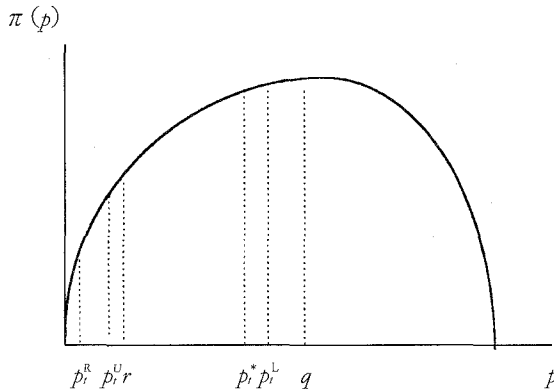


表 I 推移期における四期間の価格

元来の期数で表せば、 $p_t^* = q$ となる循環は $3(s+1)$ と $3(s+1)-1$ との二つの期間からなる。 $p_t^* = r$ となる循環は $3(s+1)-2$ と $3(s+1)-3$ との二つの期間からなる。

元来の期数	付け替えた期数	企業 1 の価格	企業 2 の価格	市場価格
$3(s+1)-3$	$3s-2$	p^M	$p^M + \varepsilon$	p^M
$3(s+1)-2$	$3s-1$	p^M	r	r
$3(s+1)-1$	$3(s+1)-1$	q	r	r
$3(s+1)$	$3(s+1)$	q	$p^M + \varepsilon$	q

各循環における p_i^v , p_i^s , p_i^t の定義は p_i^* に依存するので, 三期循環は p_i^* を基準に数えることができる。通常のパターンでは, p_i^* は循環ごとに ε ずつ下降していく。定理 3.1 の証明で見たように不規則なパターンは q または r が関わる時に生じる。それで我々は有限点列の $\{p_i^*\} = (r, r + \varepsilon, \dots, q)$ を一つの周期と見なし, 大循環と呼ぶ。大まかに言えば, 大循環は m 個の循環からなる (ただし $m = 1 + (q - r) / \varepsilon$)。

ここで我々はゲーム期間に注意を払わなければならない。それは $3T + 2$ であると仮定したけれども, 厳密に数えればそうではない。先の定理の証明で詳述されたように, 一つの大循環から次の大循環への推移期間には不規則なパターンが生じる。一つの大循環の最初と最後の循環は実際には二期間からなる。しかしこれらを正確に数えあげていくと, その期を表す添え字を書くのには複雑になり過ぎる。全体のゲームにおいて普及している三期循環が本質的であり, また最後の二期間が独立していることを強調したいので, 便宜上 $3T + 2$ を用いた。形式的には以下の系が大循環を正確に描写する。

系3.2 [Wallner (1999 COROLLARY 3)]: $\{p_i^*\} = (r, r + \varepsilon, \dots, q)$ によって定義される一つの大循環は $m - 2$ 回の完全な三期循環を含み, 全体では $3m - 2$ 期間からなる。 $T \rightarrow \infty$ のとき, その大循環は同一形式で絶えず繰り返される。

証明: 点列 $\{p_i^*\}$ は最終期から数えれば定義にあるように通常は ε ずつ上昇し, 定理 3.1 の証明において詳述されたように q から r にかけてのみジャンプする。最終期から数えれば, 新しい大循環は r によって定義される循環を最初の循環とみなして始まる。最後の循環は q によって定義されるものである。 G に属する r 以上 q 以下のすべての価格が $\{p_i^*\}$ に一度ずつ含まれるので, 大循環は正確に m 回の循環から構成される。ただし二つの大循環間の推移期に発生する最初と最後の循環が実際には各々二期間からなることに注意すれば, 我々は残りの $m - 2$ 回の三期循環は完全であり, 一つの大循環の期間数は $3m - 2$ であることがわかる。ゲーム期間が長くなるにつれ, この大循環は $\{p_i^*\}$ の定義より規則的に繰り返される。 ■

4 産業利潤の特性

このゲームは非協力複占ゲームであるにもかかわらず、上述されたマルコフ戦略にしたがえば、提示される最も低い価格 r ですら独占利潤の半分の利益が得られ、また三期ごとに独占価格が提示され、暗黙の共謀の結果が得られることがわかる。その均衡経路上で得られる平均産業利潤はいくらであろうか？前節で分析された市場価格の循環性を利用すれば、我々はそれを近似的に計算できる。まずは全体のゲームを主に構成する大循環に焦点をあてよう。

命題 4.1: 十分に小さい ε に対しては、均衡経路上の一つの完全な大循環における平均産業利潤は少なくとも $5\pi(p^M)/6$ である。

証明: 計四期間からなる推移期においては市場価格として p^M, r, r, q が成立する。表 I を見よ。 $2\pi(r) > \pi(p^M)$ でまた $q \simeq p^M$ であることに注意すれば合計利潤は約 $3\pi(p^M)$ となる。他方典型的な各三期循環では市場価格として p^M, p^*, p^* が成立する。その循環の合計利潤は $\pi(p^M) + 2\pi(p^*)$ である。 $\pi(p^*)$ は循環ごとに変わるので我々は注意深く計算しなければならない。 p^* は点列 $\{r, r + \varepsilon, \dots, q\}$ から一度ずつ選ばれるので、 p^* を $r + j\varepsilon$ ($j = 0, 1, \dots, m-1$) によって表現することができる。 π の厳密な凹性により以下の不等式が成り立つ。ただし等号は $j = 0, m-1$ においてのみ成り立つ：

$$\begin{aligned}\pi(p_j^*) &= \pi(r + j\varepsilon) = \pi\left[\frac{q-r-j\varepsilon}{q-r}r + \frac{j\varepsilon}{q-r}q\right] \\ &\geq \frac{q-r-j\varepsilon}{q-r}\pi(r) + \frac{j\varepsilon}{q-r}\pi(q) = \frac{\pi(q) - \pi(r)}{q-r}j\varepsilon + \pi(r).\end{aligned}$$

j を 1 から $m-2$ までで総和をとると、次のように単純な式で近似できる：

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{m-2} \pi(p_j^*) &> \frac{\pi(q) - \pi(r)}{q-r} \sum_{j=1}^{m-2} j\varepsilon + (m-2)\pi(r) \\ &= \frac{\pi(q) - \pi(r)}{q-r} \frac{(m-2)(m-1)\varepsilon}{2} + (m-2)\pi(r) \\ &= \frac{\pi(q) + \pi(r)}{2} (m-2) \simeq \frac{3(m-2)}{4} \pi(p^M),\end{aligned}$$

ただし $m=1+(q-r)/\varepsilon$ を用いている。 $m-2$ 回の完全な三期循環と不規則な四期間があるので、合計利潤は少なくとも次のようになる：

$$3\pi(p^M) + (m-2)\pi(p^M) + \frac{3(m-2)}{2}\pi(p^M) = \frac{5m-4}{2}\pi(p^M).$$

系3.2より各大循環は $3m-2$ 期間からなるので、その平均産業利潤は $\frac{5m-4}{6m-4}\pi(p^M)$ 以上である。ところで ε が十分に小さければ m は非常に大きく、また $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{5m-4}{6m-4} = \frac{5}{6}$ である。 π の厳密な凹性による上記の厳密な不等式を加味すれば、その命題は正しい。 ■

命題 4.2： ε が十分に小さく $T \rightarrow \infty$ のとき、全体のゲームの平均産業利潤は少なくとも $^{(6)} 5\pi(p^M)/6$ である。

証明： 不完全な大循環は最初と最後の二つだけであり、ゲーム期間において完全な大循環が占める割合が大きくなっていくので、自明である。 ■

ε が十分小さいことは、限界的な価格引き下げにより市場をほとんど完全に独占しうることを意味する。このゲームは有限期間でかつ生産能力の制約がないので、 $\varepsilon \rightarrow 0$ となるときベルトランゲームに近づくことになる。しかしながら、均衡経路上では $5\pi(p^M)/6$ もの利潤が得られることは驚くべきことである。

5 結 語

本稿では有限期間の価格競争複占ゲームの完全マルコフ均衡において、暗黙の共謀の結果が得られることを示した。とりわけ第3節において Wallner(1999) が分析した三期循環の反応関数を明示し、第4節においてその均衡経路上の平均産業利潤の計算を厳密に行い、彼の命題を一部訂正した。

このモデルは非常に単純化されているためさまざまな拡張が可能である。一つは企業1と企業2が外生的に決められた点である。市場価格は各大循環において典型的な三期循環とともに減少していくので、企業は利益の高い期に価格を提示する立場を望む。第4節の命題では産業利潤を計算したが、ここでは奇数期と偶数期とでの利潤比較を検討する。完全な大循環を考えよう。 m が奇数の場合には、二つの連続する大循環を合わせて考えると利潤は全く同一である。

逆に m が偶数の場合、六期循環で考えると、常に企業 2 の方が高い利潤を得ることがわかる。推移期では企業 1 の方が高い利潤を得るがその差は利潤関数の凹性により非常に小さい。それゆえにもし選択が可能であるならば、企業は偶数期に価格をつける立場を望む。シュタッケルベルクの理論にみられるような先導者優位の状況は、このモデルでは生じない。

ただしゲーム全体を考慮した場合、つまり最初と最後の不完全な大循環を加味した場合、どちらの企業の利潤が高いかの判断はつけがたい。これらは T と ε に大きく依存する。もしその判断が可能であるならば、 T 、 ε と利潤との相互関係を解明し、第 0 期に企業が手番（価格の提示期）をめぐる競争するゲームに拡張することは興味深い問題である。

他に企業数の拡張が考えられる。高い利潤が維持され生産費用も存在しないのであるならば、企業の参入が起こるのが自然である。その際には企業が価格を提示するタイミングの設定が重要になるであろう。

本稿では全く考慮されてない費用構造の導入も重要である。上述した参入問題と関連して、固定費用の影響も無視できない要素である。生産量も考慮しなければならないので複雑になるが、一般的には限界費用の概念も導入されるべきである。

これらの諸問題は今後の研究課題として、分析・解決に努めていきたい。

<注>

- (1) 一回限りの同時手番価格競争ゲームでは、有限な価格網であっても均衡において両企業は G から ε を選択することになり、ベルトランの逆理に近い状況に陥る。
- (2) Wallner (1999 p.256) の定義によれば “ $B_{3T}(p) = p^M$ if $p > p^M + \varepsilon$.” であるが、彼の証明 (p.264) にあるように $3T$ 期においてのみ “ $B_{3T}(p) = p^M + \varepsilon$ if $p > p^M + \varepsilon$.” である。
- (3) Wallner (1999 p.257) の定義は以下のように等式を用いているが、同一の価格が定義される。他の境界価格の定義についても同様である。“ p_T^* is the largest $p \in G$ less than or equal to the unique $p \in [0, p^M]$ solving $\pi(p - \varepsilon) + \pi(p - 3\varepsilon) = \pi(p^M - \varepsilon)$.”
- (4) Wallner (1999 p.257) の定義は以下のものであるが、場合分けの不等号が

誤植されている：

$$\dot{p}_i = \begin{cases} \dot{p}_{i+1} + \varepsilon, & \text{if } \dot{p}_{i+1} \leq q; \\ r & \text{if } \dot{p}_{i+1} > q, \end{cases}$$

- (5) そういうわけで我々は 3_s 期ではなく $3(s+1)-3$ 期とつける。
- (6) Wallner (1999 PROPOSITION4) は “Average industry profits converges to $5\pi(p^M)/6$ as the game lasts longer; ……” と記述したけれども、命題4.1により “at least” をつけるべきである。また彼の証明は $\pi(r)$ と $\pi(q)$ に言及するにとどまり、 $\pi(\cdot)$ の形状を全く考慮しておらず、厳密性を欠いている。さらに ε が仮定2.3を満たせば十分であるのかどうかはわからない。

参 考 文 献

小野善康(1980),『寡占市場構造の理論』,東京大学出版会.

D. Abreu (1986), "Extremal Equilibria of Oligopolistic Supergames," *Journal of Economic Theory* 39, 191-225.

J. W. Friedman (1971), "A Non-cooperative Equilibrium for Supergames," *Review of Economic Studies* 28, 1-12.

E. Maskin and J. Tirole (1988a), "A Theory of Dynamic Oligopoly, I: Overview and Quantity Competition with Large Fixed Costs," *Econometrica* 56, 549-569.

E. Maskin and J. Tirole (1988b), "A Theory of Dynamic Oligopoly, II: Price Competition, Kinked Demand Curves, and Edgeworth Cycles," *Econometrica* 56, 571-599.

J. Tirole (1988), "*The Theory of Industrial Organization*," MIT Press, Cambridge, MA.

K. Wallner (1999), "Sequential Moves and Tacit Collusion: Reaction-Function Cycles in a Finite Pricing Duopoly," *Journal of Economic Theory* 84, 251-267.