

非線形マクロ動学モデルの展開

—グッドウィンの成長循環モデル以後—

石 垣 建 志

目次

第1節 はじめに

第2節 Goodwin の成長循環モデル

2.1節 Goodwin の景気循環モデル

2.2節 モデルの技術的改良—構造安定性—

2.3節 グッドウィン・モデルの修正の方向

第3節 2つの方向—ミクロ的な基礎付けとカオスへの展開—

3.1節 ミクロ的基礎づけ

3.2節 Mehrling の交渉ゲーム・モデル

3.3節 モデルの複雑化によるカオスの導出

3.4節 差分モデルによるカオスの導出

第4節 結論

第1節 はじめに

Goodwin (1967) の成長循環モデルは、その後の景気循環モデルの研究に多大な影響をあたえてきた。このモデルは、(1)利潤原理投資関数による資本蓄積および雇用率の決定、(2)賃金上昇率の正の関係、という2つの要素からなる。したがって、このモデルは景気循環の一つのモデルとして関心をあつめるだけではなく、(2)の点がマルクスの産業予備軍効果による景気循環をモデル化したものとして解釈され、この観点からも注目された。また、このモデルは、単純な非線形の連立微分方程式システムが周期解をもつ点が斬新であり、形式的な拡張の面からも多くの追隨者を生んでいる。

しかしながら、このモデルには多くの限界もあり、これを補うための試みも

数多くある。本稿ではそのうち、次の2点が重要であると考ええる。第1は、恣意的な仮定によってモデルが組み立てられているために、経済学的な含意が乏しくなるおそれがあるということである。言い換えれば、モデルのミクロ的な基礎づけの努力が欠けているという点である。第2は、モデルの分析から、経済厚生に関する結論が得られないために、経済学的な含意に乏しいのではないかという点である。本稿は成長循環モデルのいくつかの修正版を、この観点からサーヴェイすることを目的とする。

この成長循環モデルに関する先行研究は多数にのぼり、またそのサーヴェイもすでに少なくない⁽¹⁾。他方、本稿で扱うモデルはとうてい網羅的なものではない。しかしながら、本稿は次の4つの点でメリットをもっている。第1に比較的最近の研究に関するサーヴェイを行う点である。第2に、モデルのミクロ的な基礎づけに対する貢献という観点からモデルを評価する点である。第3に、モデルが経済のさまざまな状況について統一的な説明を与えることができ、それについて厚生比較による規範的な結論を得ることができるかどうかを重視する点である。第4に、カオス・モデルへの拡張に対して検討を加える点である。

本稿が対象とするモデルは、上記の(1)(2)の特徴についてはやや緩めた基準を用い、第1～第4点の観点から選択した⁽²⁾。以下では次のような順序で議論を行う。第2節では、オリジナルなGoodwinの成長循環モデルを、Medioによる若干の形式的な一般化と合わせて解説する。第3節では、二神(1991)のミクロ的基礎づけの方向での拡張、Mehrlingによる労働者側と資本家側との集権度の違うケースを統一的なモデルの枠組みで取り扱う試み、最後にカオス・モデルを検討する。第4節において、これらの検討結果について総括する。

第2節 Goodwinの成長循環モデル

2.1節 Goodwinの景気循環モデル

最初にモデルの形式化をしめしておこう。内容については後から説明する。Goodwin(1967)の成長循環モデルは、次のようなものである⁽³⁾。

<モデルの形式化>

(記号)

変数は、 a = 労働生産性、 l = 雇用、 n = 労働供給、 u = 労働分配率

($w = w/a$), $v = \text{雇用率} (= 1/n)$, $w = \text{実質賃金率}$, かなる。

パラメタは, $\alpha = \text{労働生産性の成長率}$, $\beta = \text{労働供給の成長率}$, $\sigma = \text{資本一産出比率}$ かなる。

① (労働分配率の変化)

まず, 労働分配率は定義より, $u \equiv w/a$, したがって

$$\hat{u} = \hat{w} - \hat{a} \quad (4)$$

しかるに, 労働生産性の上昇率は一定だから,

$$\hat{a} = \alpha \quad (1)$$

とすると,

$$\hat{u} = \hat{w} - \alpha \quad (2)$$

他方, 実質賃金は完全雇用の近傍で上昇するから, 一般的には $\hat{w} = f(v)$ 。ただし,

$$\lim_{v \rightarrow 1} f(v) = \infty, \quad \lim_{v \rightarrow 0} f(v) = \omega < 0, \quad df(v)/dv > 0$$

である。ここで, $f(v)$ を線形関数で近似して, つぎのようにおく。

$$\hat{w} = -\gamma + \rho v \quad (3)$$

(1-2), (1-3)式から, u の変化率は次式で表される。

$$\hat{u} = (-\gamma + \rho v) - \alpha \quad (4)$$

② (雇用率)

資本家の利潤は $(1 - w/a)Y$ であり, 投資が利潤に等しいとして次の利潤原理による投資関数が得られる。

$$\dot{K} = (1 - u)Y \quad (5)$$

両辺を K で除し, 資本一産出比率 $\sigma (= Y/K)$ が一定とすると,

$$\dot{K}/K = (1 - u)\sigma. \quad (6)$$

労働供給の成長率は一定とする。

$$\hat{n} = \beta \quad (7)$$

また,

雇用率は定義から $v \equiv 1/n \equiv (Y/a)/n$ だから, $\hat{v} = \hat{1} - \hat{n} = \hat{Y} - \hat{a} - \hat{n}$ 。

これに(1)(6)(7)を代入して,

$$\hat{v} = (1 - u)/\sigma - \alpha - \beta \quad (8)$$

③ (モデルの統合)

(4)(7)式を、整理して、

$$\begin{cases} \dot{u} = (-\eta_2 + \theta_2 v) u \\ \dot{v} = (\eta_1 - \theta_1 u) v \end{cases} \quad (9)$$

$$\quad (10)$$

定数パラメタの意味は、次の通りである。

$$\eta_1 = 1/\sigma - (\alpha + \beta), \quad \theta_1 = 1/\sigma,$$

$$\eta_2 = \gamma + \alpha, \quad \theta_2 = \rho,$$

<モデルの説明>

上述のシステムは次の二つの要因からなっている。

①労働分配率が増加(減少)すると、利潤が減少(増加)し、加速的に労働需要が減少(増加)する⁽⁵⁾。

②利潤が増加(減少)すると、加速的に雇用が増加(減少)する。

この方程式は、形式的には生物学の生態系の理論、化学反応方程式等においてよく知られた一群の方程式の一種である。被食者-捕食者方程式、あるいは初期の研究者の名前からロトカ・ヴォルテラ型の微分方程式とよばれる。この方程式を拡張して変数を増やしたり、さらに方程式の定数項の行列(相互作用行列)を一般化することによって一般化ロトカ・ヴォルテラ方程式とよばれるものになる。

このシステム(9)(10)は容易に解くことができる。変数分離形になおし、積分することにより、次の u , v の方程式を得る。

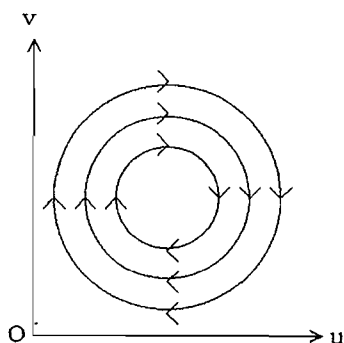
$$-\eta_1 \log u - \eta_2 \log v + \theta_1 u + \theta_2 v = C \quad (\text{定数}) \quad (11)$$

図1(a)に示されるように、この方程式で表される閉曲線族および唯一の不動点からなる解が存在する。

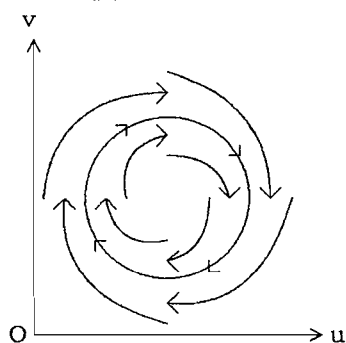
この成長循環モデルは今日では非常に普及したものとなっている。マルクスの立場からは、労働者と資本家の階級対立をモデル化したものとして高く評価されている⁽⁶⁾。しかしながら、このモデルの問題点として、従来から指摘されてきたのは次の3点であろう。第1に、資本制経済における蓄積需要の独立性が理論の中に組み込まれておらず、資本家が獲得した利潤を自動的に蓄積している点である。第2に失業率の変化が、貨幣賃金および価格水準を介さず、直接に実質賃金の変化をもたらしている点である⁽⁷⁾。第3に、構造不安定性というモデル作成上の技術的な問題点がある。さらに次の2つの問題を強調した

図 1

(a) Goodwin モデルの模式図



(b) Medio モデル (極限周期軌道) の模式図



い。第4に、主体均衡の観点が欠けているというミクロ的な問題点である。このことは成長循環がどのような経済的な条件下で発生しうするのか、または発生しないのかという問題と関るであろう。第5に、このような経済主体の観点が欠けているために、循環の存在と経済厚生との関わりが解明できないという点がある。本稿においては、第1および第2点については必要な限りで最小限触れることにする。第3点については、第2.2節において解決可能なことを述べる。第4点および第5点については、第3節において論じる。

2.2節 モデルの技術的改良—構造安定性—

Goodwinのモデルは、微小な外的攪乱の存在により軌道の定性的性質が変化してしまう。したがって、現実の方程式を誤差をともなって描くことができるにすぎない実証科学においては、現実の定性的すがたをとらえたモデルとはいえないことになる。このような場合を「構造的に不安定」であるといい、物理学、工学ではこのようなモデルの解軌道は、実際には観察されないとみなされてきた。その点を問題にしたのがMedio (1980) であり、かれはこの点を修正し、解が極限周期軌道となるモデルを提案した⁽⁸⁾。極限周期軌道が存在するようなシステムは、図1(b)に示されるような解曲線をもち、 (u, v) は初期値に関係なく、十分な時間の後には唯一の極限周期軌道の近傍に至るので、構造安定である。

＜モデルの形式化＞

Medioのモデルは、つぎの方程式系である。

$$\dot{u} = f_1(u, v)u, \quad \dot{v} = f_2(u, v)v$$

ただし、1.-9.の条件が満たされる。

1. f_1, f_2 は $u, v > 0$ で連続かつ連続な導関数をもつ；さらに、 f_1, f_2 はたがいに素な多項式である。

2. $(\partial f_1 / \partial v) < 0$ ，すなわち、労働分配率が高ければ高いほど（利潤率が低ければ低いほど）、稼働率の成長率は低い。

$$3. (\partial f_1 / \partial u) \leq 0 \quad (u \leq u_0)$$

これは、稼働水準が高ければ高いほど、稼働率の成長率は高いということを意味している。

$$4. (\partial f_2 / \partial u) > 0 \quad (\text{雇用効果})$$

$$5. (\partial f_2 / \partial v) < 0 \quad (\text{マークアップ効果})$$

6. $f_1(0, 0) > 0$ ，すなわち、労働分配率が非常に低いとき（利潤マージンが非常に高いとき）、稼働水準の増加率は正である。

7. $f_1(u_1, 0) = 0$ ，すなわち、労働分配率がどれほど低い水準であっても雇用水準がそれ以上になれない雇用水準がある。

8. s を平面 (u, v) 上の任意の点とする。原点 O と s とを結ぶ線分を S とする。任意の u について $df_1(u, v)/dS < 0$ ，

任意の v について $df_2(u, v)/dS > 0$

9. $f_2(u_2, 0) = 0$ ，すなわち、ある十分低い雇用水準は、労働分配率がどれほど低くとも労働分配率の増加をさまたげる。

＜モデルの説明＞

Medioは、このモデルが、条件1.～9.を満たしているときに、どのような軌道をえがくかを調べている。一定の条件の下では、極限周期軌道が存在する。Medioは、Poincare-Bendixonの定理を直接にもちいることによって、このモデルが少なくともひとつの極限周期軌道をもつことを、繁雑ではあるが証明している。また、大和瀬（1987）は、さらに若干の条件を加えれば、Kolmogorov-Rosenzweig-Blumerのサイクル定理を利用して、極限周期軌道の存在を、より簡潔に示せることを指摘している。

このモデルは、もはやGoodwinモデルの単純な被食者—捕食者方程式ではない。しかし、このモデルのわずかな修正によってグッドウィンの基本的なアイデアは完全に継承されている。

2.3 節 Goodwin モデルの修正の方向

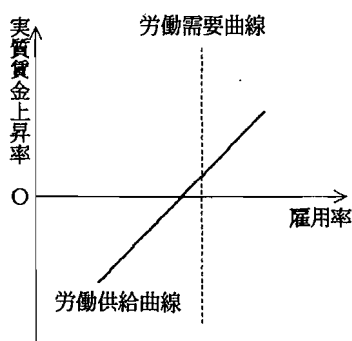
2.1 節のモデルの修正は成長循環モデルの重要な欠陥を補うものとして重要であるが、2.1 節の最後で指摘した第3点以外の問題点に答えるものではない。そこでモデルに種々の単純化、修正が行われることになる、本稿で扱う論文におけるモデルの改変のうち重要なのは次の2点である。

第1は賃金の変化に関する仮定である。図2(a)はGoodwinの産業予備軍効果を労働市場の需給曲線の形で描い

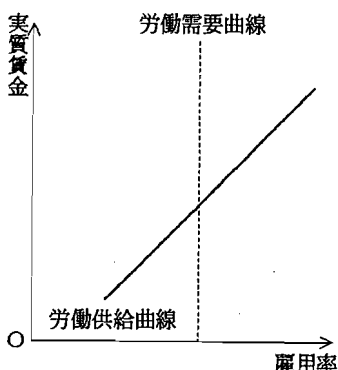
図2

たものである。横軸は雇用率であり、(a)

縦軸は実質賃金上昇率である。モデルにおいては実線の供給曲線が一定であり、垂直の点線で表される需要曲線が資本蓄積に応じて左右にシフトする。これに対し、次節で扱う単純化されたモデルでは、図2(b)のように横軸を雇用率、縦軸を実質賃金とし、モデルにおいては供給曲線が一定であり、資本蓄積に応じて需要曲線が左右にシフトするという仮定がとられている。(b)



第2は、投資関数の仮定である。投資の決定については、Goodwinモデルでは(5)式の利潤原理が用いられていた。しかしこの投資関数が投資の不安定性を十分に反映していないとして、二神(1991)のように加速度原理による投資関数を用いたモデルもある。このモデルでは各企業が次のようなハロッド型の加速度原理の投資関数に基づい



て行動する。

$$\dot{g} = \beta(y - y^*), \quad g = \hat{K}, \quad y = Y/K \quad (12)$$

ただし、(12)式のような拡張によって、財市場の均衡は保証されないことになる。

第3節 2つの方向—ミクロ的な基礎付けとカオスへの展開—

3.1節 ミクロ的基礎づけ

二神(1991)はGoodwinモデルの投資関数のミクロ的基礎づけを与える方向をとっている。

第1に、投資関数については、ハロッド型の加速度原理による投資関数を考える。添字*i*は第*i*企業を意味する。

$$\dot{g}_i = \beta(y_i - y_i^*), \quad y_i = Y_i/K_i, \quad g_i = \hat{K}_i,$$

ただし、 y_i は現実の資本産出比率、 y_i^* は正常産出資本比率である。

第2に、フィリップス曲線は名目賃金 w が雇用率(L/N)と労働者のいだく期待インフレ率 e によって決まる。ただし、期待インフレ率は労働資本比率($x = L/K$)の関数である。

$$\dot{w} = h(L/N) + e(x), \quad h' > 0 \quad (13)$$

第3に、企業の行動は独占的に価格および生産量決定を行う。この過程は2つのメカニズムから成り立っている。一方のメカニズムでは、企業は次の逆需要関数

$$p_i = u(y_i, D/K) a_i$$

および、経済全体の需要資本比率 D/K 、パラメタ a_i の値を知っている。さらに、稼働率を考慮に入れた生産関数 $y_i = f(x_i)$ と賃金 w を知って、利潤率最大化を目的関数として、 p_i と y_i を決定する。

他方のメカニズムでは、上の利潤率最大化の際には定数であるとみなされたパラメタ a_i が、需給の不均衡に適応的に変動している。すなわち、

$$\hat{a}_i = u(y_i/d_i) = u(y_i, g_i)$$

ただし、 $d = D/K = c y + g$ (c は限界消費性向、定数)である。

第4に、労働供給と経済全体の資本ストックとの比 z は、定義より、

$$\hat{z} = (N/K) = g_n - g$$

である。

以上の4つの動学を、代表的企業の仮定の下で集計することによって、次の経済モデルを得ている。

$$\begin{cases} \dot{g} = \beta(y(x(g, R) - y^*)) \\ \dot{R} = \{h(x/z) + e(x) - u(y/d(y, g))\} \\ \dot{z} = (N/K) = g_n - g \end{cases}$$

ただし、 $R = w \cdot u$ である。

このモデルは、ハロッド的な加速度原理に基づく投資関数であるにも関わらず、安定解または極限周期解をもつ場合がありうることが示される。

このモデルは、投資関数が加速度原理による点で、Goodwinモデルとは異なっている。このモデルの貢献は、企業の雇用と独占価格の設定においてミクロ的な根拠を示そうとしている点である。しかし投資関数に加速度原理を採用しているために、一般に財市場は均衡しない。また、ミクロ的な根拠は企業の雇用と価格設定に限られ、投資行動については示されていない。また労働市場においては、⑬のフィリップス曲線が仮定されているのみであり、このフィリップス曲線がどのようなミクロ的な根拠をもつかは明示されていない。

3.2 節 Mehrlingの交渉ゲーム・モデル

Mehrling (1986) は Goodwin モデルを拡張し、労働側と資本家側のそれぞれが集権化するばあい、分権化するばあいの合計4通りの組み合わせによる均衡解、ならびに集権化した労働者と集権化した資本家による交渉均衡について、厚生水準を相互に比較可能な統合的なモデルの構築を試みた。Mehrling はモデルの分析を通じて、4通りの組み合わせのうち、労資の双方が分権的な場合には Goodwin の景気循環に帰着し、両者ともに集権的な場合には複数の Nash 均衡が存在し、一方が集権的で他方が分権的な場合には、ある定常均衡が存在することを、明らかにした。このような方向での Goodwin モデルの拡張は、この Mehrling のモデルが唯一である。このモデルにおいては、Goodwin 以後の他のモデルにはないミクロ的な基礎付けが試みられていると評価できる。

<モデルの概要>

$N = N_0 e^{nt}$: 人口

$L = \lambda K$: 雇用

$Y = a K$: 産出

$$u = \frac{wL}{aK}$$

$$v = \frac{L}{N}$$

労働組合が集権的なときその目的関数は次のように表される。ただし制御変数は w である。

$$\max_w \int_0^\infty e^{-\rho t} w L dt$$

これを書き換えて次式を得る。

$$\max_u \frac{a}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\rho t} U V dt \quad (14)$$

資本家が集権的なとき、その目的関数は次のようになる。

$$\max_v \int_0^\infty e^{-\rho t} (1-u) a K dt$$

これを書き換えると、次式を得る。

$$\max_v \frac{a}{\lambda} \int_0^\infty e^{-\rho t} (1-u) v dt \quad (15)$$

ただし、 (u, v) は次の条件を満たす。この条件は図3のBCDで囲まれた領域に対応する。

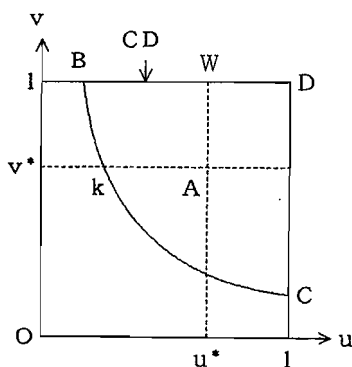
$$u \leq 1, v \leq 1, uv \geq \frac{c\lambda}{a} \quad (\text{生存条件})$$

最後の性質は次の式から導出される。

$$\frac{wL}{N} \geq 1$$

労働組合が、非集権的なときには、 u のダイナミクスは次式によって決まる。

図3



$$\dot{u} = (v - v^*)u, \quad v^* = \frac{\gamma}{\delta} \quad (16)$$

資本家が、非集権的などときには、 v のダイナミクスは次式によって決まる。

$$\dot{v} = -a(u - u^*)v, \quad u^* = 1 - \frac{n}{a} \quad (17)$$

したがって、両階級の集権度の違いによりモデルは次の4通りとなる。

	資本家が集権的	資本家が分権的
労働者が集権的	(14)(15)	(14)(17)
労働者が分権的	(16)(15)	(16)(17)

モデル(14)(15)は微分ゲームとなっており、Nash均衡解を求めることができる。

モデル(14)(17)は制約条件(17)の下で最適問題(14)を解き、モデル(16)(15)は制約条件(16)の下で最適問題(15)を解く。モデル(16)(17)は連立微分方程式からなるダイナミクスである。それぞれに対応する定常解は次のようになる。

	資本家が集権的	資本家が分権的
労働者が集権的	k, W	W
労働者が分権的	k	A

(図3を参照のこと)

Mehrlingは、共同意思決定均衡(codetermination equilibrium)なるものを、取りあげている。彼は共同意思決定均衡の概念を、「信頼に裏付けられた非協力」および「強制条項のある社会契約」の2つの観点から説明できるとしているが、良く定義されているとは言えず、その含意は曖昧である。これを「協力解」と定義し直すことによってMehrlingとほぼ同様の議論ができるので、次にそれを説明する。

両階級の協力解は次の最大化問題、すなわち重み $\alpha : 1 - \alpha$ による両階級の利得の加重和を和最大化することを考える。ただし、 α は $0 < \alpha < 1$ の値をとるパラメタである。このような協力解は、得られた利得の和を $\alpha : 1 - \alpha$ に分

割することを拘束力をもつ契約によって定められると解釈される。したがって、交渉解は、Mehrlingのいう「強制条項のある社会契約」を具体化したものである。

$$\max_{u, v} \frac{a}{\lambda} \int_0^{\infty} e^{-\rho t} \{ \alpha u v + (1 - \alpha)(1 - u) v \} dt \quad (18)$$

命題：上のモデルにおいて、協力解(すなわち(15)の最適化問題の定常解)は次のようになる。

$\alpha < 1/2$ のとき、定常解は $u = c\lambda/a$, $v = 1$ 。

$\alpha > 1/2$ のとき、定常解は W 。

$\alpha = 1/2$ のとき、定常解は $c\lambda/a \leq u \leq 1$, $v = 1$ 。

証明：いずれの場合にもあきらかに $v = 1$ である。定常解であることから、 $\dot{v} = 0$ 。よって $u \leq u^*$ 。 $\alpha < 1/2$ のとき、 u は最小値であるから $u = c\lambda/a$ 。 $\alpha > 1/2$ のとき、 u は最大値であるから $u = u^*$ 。 $\alpha = 1/2$ のとき、 $u \leq u^*$ の範囲で不定である。

この命題から、Mehrlingの考えている共同意思決定解は $\alpha = 1/2$ の場合の協力解と解釈することができる。ただし、Mehrlingは資本家階級にとって点 k と等利潤の点 CD を共同意思決定解の一つとしているが、点 CD においては労働者の厚生は点 W よりも低下しており、点 CD を特権的な解とする説得力のある理由はないと考えられる。

Mehrlingはこのモデルを用いて、パラメタの変化による比較静学比較を行っている。このモデルには、労資双方の集権度の違いを折り込まれており、不完全とはいえ厚生比較を試みている点は評価されるべきである。

3.3節 モデルの複雑化によるカオスの導出

Glombowski/Kruger (1987), Kruger (1988) 等の変数の数を増大した Goodwinモデルの一般化について、考察を加えておこう。

変数の数を追加し、より複雑な要因を考慮し、モデルを構築すると、解析は

非常に困難になる。その場合にも、もし、確定した方程式、およびパラメタによって特定の構造について、その挙動を解析しようとするならば、コンピューターによるシミュレーションをおこなって、今日では、比較的精密な結果をえることができるであろう（実際、流体力学等のきわめて複雑な現象に対して、このようなことは行なわれている）。そこで、シミュレーションによって、モデルの分析は完了する、と考えられがちである。しかし、このようなシミュレーションの使用にはいくつかの注意が必要である。

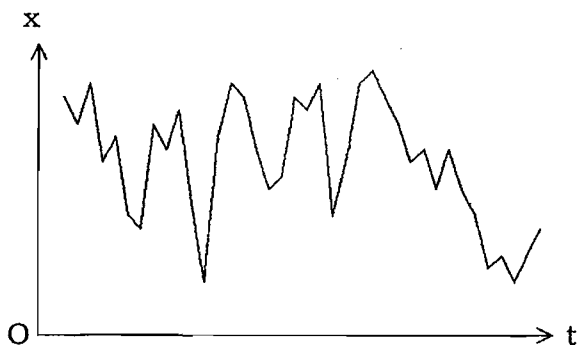
第1. 経済モデルにおいては、パラメタが厳密に決定されがたいこと（あるいはそこでの支配法則が、物理学のようには定量的に厳密に決定されていないこと）に関連している。特に、局所的な安定性のみならず、均衡から離れた大域的な挙動について非線形モデルはパラメタの小さな相違でも、定性的にまったくことなつた挙動をもつことがある。したがって、種々のパラメタに対する定性的性質をあらかじめ知っておくことが必要である。

第2. たとえパラメタが厳密に定まっていなくても、あるいは特定されたモデルに関してのみの知見を得たいとするとときでも、初期値によって解軌道のようにずがまったく異なっており、若干のシミュレーションでは、その一部しかとえられないために、定性的に誤った判断を下すおそれがあることである。これは先に簡単にふれたカオスの性質をもつモデルのときにおこりうるが、解がカオスの可否か、またどのようなカオスかは数値計算からでも判別することは困難である。

第3. 連続量の微分的力学系のシミュレーションにおいては、これを離散的な数値計算によって誤りなく取り扱う工夫が、慎重になされねばならないし、実際にこの問題を回避するような手法が開発されている⁽⁹⁾。しかし、Glombowski/Kruger (1987) においては、経済的モデルでは安易に差分モデルと微分モデルの同一視がおこなわれている。差分方程式であるゆえにえられる性質と、連続な微分方程式の性質とは、一般には大きくことなる。

これらの理由によって、非線形方程式の定性的挙動をシミュレーションにのみたよると、あやまった定性的理解（表面的、部分的）をする場合があるのみならず、モデルの誤った評価をうることになるので、できる限り解析的な取り扱いが必要であると考えられる。

図4 離散的カオスの模式図



3. 4節 差分モデルによるカオスの導出

つぎに紹介するPohjolaのモデルは、一般にGoodwinモデルの拡張とみなされているようであるが、そして、またPohjola自身もその点を強調しているが、むしろ主眼は別の点（離散系のカオ斯的運動）にあって、それを実現するためにGoodwinモデルのあつかい単純さを利用しているというべきであろう。しかし、ある意味ではGoodwinモデルの特徴を残しているともかんがえられ、また、上述の問題点の克服への可能性を示唆しているモデルであるので、検討に値する。

<モデルの形式化>

(記号)

A_t = 労働分配率, E_t = 雇用率, K_t = 資本, L_t = 雇用, N_t = 労働供給, w_t = 実質賃金率, Y_t = 産出

(資本蓄積と分配率の関係)

労働供給の増加率は n

$$\hat{N}_t \equiv (N_{t+1} - N_t) / N_t = n \quad (19)$$

労働生産性の成長率は σ である。

$$(Y_t / L_t) = \sigma \quad (20)$$

資本係数は一定である。

$$K_t / Y_t = \mu \quad (21)$$

投資関数は利潤原理による。

$$K_{t+1} - K_t = (1 - A_t) Y_t \quad (22)$$

雇用率は $E_t = L_t / N_t$ であるから, (19)~(22)から

$$E_t = (1 - \mu g - A_t) / (\mu (1 + \sigma)) \quad (23)$$

ただし簡単のためパラメタ $g = (1 + n)(1 + \sigma) - 1$ をもちいている⁽¹⁰⁾。

以上の記号から, 実質賃金率 w_t は $w_t = A_t Y_t / L_t = A_t Y_t N_t / E_t$ である。最後の式で, N_t は(19)式によって決定され, A_t と E_t との関係は(23)式であきらかになった。実質賃金 w_t と産出 Y_t との関係は次の方程式によって与えられる。

$$w_t = h(E_t) \cdot Y_t / L_t \quad (24)$$

簡単のために $h(E_t)$ を線形化し, $A_t = w_t L_t / Y_t$ をもちいと,

$$A_t = -\alpha + \beta E_t \quad (25)$$

(23), (25)式より A_t を消去し, 1変数の非線形1階差分方程式をうる。

$$E_{t+1} = E_t \{1 + r(1 - E_t / E^*)\} \quad (26)$$

ただし, $r = (1 - \mu g + \alpha) / (\mu (1 + \sigma))$, E^*

$$= (1 - \mu g + \alpha) / \beta$$

さらに(26)式の変数を $x_t = r E_t / (1 + r) E^*$ として変換すると次式になる。

$$x_{t+1} = (1 + r) x_t (1 - x_t) \quad (27)$$

<モデルの説明>

分配率から雇用率への決定関係, すなわち(10)式と(23)式とは同一内容であることは明らかである。

しかし, 雇用率が分配率を決定する関係では, Pohjolaも強調するように, Goodwinの仮定からは離れている。彼は, 「多くのフィリップス曲線の推計において, 貨幣賃金の変化を説明するのに, 雇用水準よりも雇用の変化率がより重要」という指摘をうけいれている (Pohjola (1981), p.29)。実質賃金率は, 労働生産性 (Y_t / L_t) に対して労働市場の状況によって決定されるマークアップ $h(E_t)$ をする交渉方程式 (bargaining equation) で表されるようになっている。このため, 2変数から一方を消去できて, 1変数の差分方程式をえたが, これはもはや被食者—捕食者の方程式ではない。

<モデルの分析>

(27)式は、パラメタ r の値によって、ことなつた挙動を持っている。ある r の値では、 x_t はどのような初期値 x_0 から出発しても、均衡値に収束する。また別の r ではどの初期値から出発しても暫くの過渡状態の後、周期 2 を持つようになり、他の r では初期値 x_0 の値によって異なつたさまざまな周期を持つようになる。

さらに、ある r では、任意の自然数を周期にもつような初期値が存在すし、また漸近的にも周期をもたない運動も存在することになる。このような運動は、(くわしくは、Li/Yorkeの意味で)「カオス」とよばれる⁽¹¹⁾。

このモデルとまったく同一の方程式、すなわち $x_{t+1} = a x_t (1 - x_t)$ は、「ロジスティック写像」とよばれるものである。ロジスティック写像が、カオス的な性質をもつことは、数理生態学者 May (1976) が詳細な数値実験をおこない、あい前後して Li/Yorke (1975) が数学的な証明をあたえるとともに、あるパラメターの範囲で起こる無限個の周期を持つ振動をはじめ「カオス」と命名したことによって注目されるようになり、その後、研究が進展している⁽¹²⁾。

Pohjola は発見 (および再発見) されたばかりのこれらの定理をいち早く経済に応用したわけである⁽¹³⁾。したがって、方程式 (9) を得るまでが Pohjola の貢献であつて、その分析にはオリジナリティーがない。

この離散系でのカオスの定義は、以下のようなものである (Lorenz (1989), p.116)。

定義 (カオスの写像)

J を集合とする。写像 $f: J \rightarrow J$ が J 上でカオス的であるとは

1. f は初期値に敏感に依存する。
2. 位相的に推移的である。
3. 周期点が稠密である。

1. は、近くに並んでいた異なつた 2 つの初期値が、どれほど接近していても、ある時間をへれば、互いの軌道は離ればなれになってしまうことをしめしている。2. は、どのような点でもそのすぐそばには、ある時間がたつと、任意の別の点のすぐそばをとおる点がある、ということである。3. は、周期をもつた点が到るところに分布しているということである。

このモデルが、多周期およびカオス性質をもつのは、賃金交渉関数の修正によって変数を1個減少したからではなく、差分化したことによる。実際、(0-3-9)式を微分形に書き改めれば、ロジスティック方程式

$$\dot{x} = r x - (1 + r) x^2$$

をうる。これは容易に解けて、初期値 x_0 にたいして、ロジスティック曲線

$$x = \frac{r x_0 \exp(r t)}{r + (1 + r) x_0 \{\exp(r t) - 1\}}$$

をうる。これは $x = 1$ を漸近線とする右上がりの曲線であって、差分方程式の場合とまったく異なる。

また、2変数のモデルをそのまま差分化することによっても、当然、多周期やカオス発生の場合が生ずるであろう。ただし、2次元の差分方程式は、このように簡単に分析できないであろうし、したがって厳密にカオスの存在を証明することも容易でないか、または、できなくなるであろう。しかも、Goodwinモデルを自励微分方程式として3次元以上に拡張することによっても、同様なカオスの現象が発生する場合があるはずである。しかし、このことを証明するのは、きわめて特殊な場合以外には、やはり困難である。その意味で、Pohjolaモデルはカオスの存在を厳密にしめしうる、数少ない場合なのである⁽⁴⁾。

Pohjolaモデルは、Goodwinモデルを技術的に応用しただけのモデルのようであるが、しかし、若干のモデル修正によるカオスの発生は、従来の単純な力学系モデルにとって、そのモデルの構築においても、取り扱いにおいても、深刻な反省を提起するはずのものである。

第4節 結論

前節までのGoodwinの成長循環モデルの拡張についての考察を、以下の3点にまとめることができよう。

第1は、モデルのミクロ的基礎づけについての問題点である。二神(1991)は投資行動について独占企業の期待形成を考慮に入れ、ミクロ的な基礎づけを行っている。しかし、Goodwinモデルの産業予備軍理論⁽⁵⁾についてミクロ的基礎づけを行っているわけではない。Goodwinモデルのこの労働需給の側面については、Mehrling(1986)においてやや詳しく論じられているが、ミクロ的な基礎づけまで行われているとは言えない。その意味では、Goodwinモデ

ルにおける産業予備軍効果のミクロ的基礎づけを行った論文は管見の限り見あたらない。この点は、これらのモデルに残された課題と言えよう。

第2に、産業予備軍効果と利潤と投資が等しいというメカニズムによる景気循環が、現実に観察される景気循環とどのような関りがあるのかという、実証との対応関係の問題である。残念ながら、成長循環モデルの理論家にはそのような問題設定そのものがほとんど存在しないと言うべきであろう。

第3は、景気循環がGoodwinモデルのように描かれるとするならば、政策的にどのような含意をもっているか、すなわち、景気循環をより緩和するような政策にはどのようなものがあり、また、そのような政策が景気循環の経済厚生に与える影響からどの程度正当化されるのかという問題である。Mehrling (1986) はGoodwinモデルが労働分配率の決定が競争的な場合を描いていると解釈し、労働側と資本側の集権的な団体交渉による場合の景気循環の存否を検討するとともに、それぞれの場合の厚生の比較を行った。その結果、労働者と資本家の双方が集権的に団体交渉を行う場合が両者とももっとも高い厚生を享受する。したがって、その自然な帰結として、労働者の資本家の双方の集権交渉を支持するような政策が正当化されるであろう。ただし、Mehrlingのいう労働需要と労働供給の「競争的」状態は、通常の言葉使いでは労働者側が労働市場の逼迫状態に応じた賃金交渉力をもつような独占的状态にほかならないので彼の分析は、完全競争市場と集権交渉との比較を免れており、モデル上での比較対象が狭すぎるという問題がある。たとえば Asada (1989) のモデルは貨幣市場を取り入れ、貨幣供給当局の政策をモデルに明示的に扱っている点で、ユニークである。その結果、貨幣供給政策が利子感応的であるときに、景気循環は緩和されることが明らかにされている。しかし、そこでは明示的な厚生比較は行われていない。最近になって、Mainwaring (1993) はGoodwinモデルに階級間の所得再分配を導入し、所得再分配が厚生に与える影響を明示的に論じることにより、きわめて興味深い結論を得ている。これは現在のところ唯一の論文である。Mainwaringのモデルの詳細な検討と、この方向での今後の展開が期待される。

第4に、カオス・モデルについての部分的な展望である。Pohjola (1981) ならびに Glombowski/Kruger (1987) に見られるカオス理論モデルは、それ比較的単純な決定論的モデルが複雑で実質的に予測不可能な経済の変動を引き起

こす場合が少なくないことを明らかにした。しかし、現在のところそれ以上ではない。経済に決定論的カオスが存在するならば、カオスを抑制する政策に効果があるかもしれない。しかし、成長循環カオス・モデルは、まだそのようなことについて何か主張できるような段階にいたっていない。カオスおよびその周辺の諸理論はきわめて興味深いモデルを提供し続けるであろう。しかし、そうであるためには、経済諸主体の行動パターンについてのより深い理解と洞察から出発しなければならないであろう。

Goodwin の成長循環モデルは、Marx による景気循環のアイディア（の一部）にモデルによる直截な表現を与えたものとして、大きな貢献をなしている。その後のモデルの拡張にも、上に述べようように重要な試みがある。たしかに、経済学においても、モデルが実証的な関心や政策的な意味付けに過度に拘束されるべきでないことは言うまでもないであろう。だが、エネルギー保存の法則やメンデルの法則といった強力な拘束条件を持たない経済学においては、モデル評価の基準が必要であろうし、たとえ一般均衡、主体均衡といった既存の基準を拒否するにしても代替的な基準を採求する必要があるだろう^{(16) (17)}。

参考文献

- [1] Asada, T. (1989), "Monetary Stabilization Policy in a Keynes-Goodwin Model of Growth Cycle", in *Financial Dynamics and Business Cycles-New Perspective-*, ed by Willi Semmler.
- [2] Brock, W. A. (1986), "Distinguishing Random and Deterministic Systems : Abridged Version", *Journal of Economic Theory*, 40, pp.168-195.
- [3] Choi, H. (1995), "Goodwin's Growth Cycle and the Efficiency Wage Hypothesis", *Journal of Economic Behavior and Dynamics*, 27, pp.223-235
- [4] Day, R. H. (1982), "Irregular Growth Cycles", *American Economic Review*, 72, PP.406-414.
- [5] Gabisch, G./Lorenz, H-W (1989), *Business Cycle Theory-A Survey of Methods and Concepts-*, 2nd edition, Springer-Verlag, Berlin.
- [6] Glombowski, J. /Kruger, M. (1986) "Some Extensions of Classical Growth Cycle Model", Willi Semmler (ed.) *Competition, Instability, and Nonlinear Cycles*, Springer-Verlag, pp.212-251.
- [7] Glombowski, J. /Kruger, M. (1987), "Generalizations of Goodwin's Growth Cycle", Batten, D./Casti, J. Johansson, B., (eds), *Economic Evolution and Structural Adjustment*, Springer-Verlag, pp.260-290.

- [8] Goodwin, R. M. (1982), "A Growth Cycle", in *Essays in Economic Dynamics*, Macmillan, 1982, pp.165-170.
- [9] Kruger, M. (1988), "A General Model of Capital Accumulation", in Peter Flaschel/Michael Kruger (eds.) *DYNAMISCH WIRTSCHAFTS-THEORIE - Recent Approaches to Economic Dynamics*, Verlag Peter Lang GmbH, Frankfurt am Main. pp.47-63.
- [10] Lorenz, H-W. (1989) *Nonlinear Dynamical Economics and Chaotic Motion* (Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, No. 334), Springer-Verlag.
- [11] Lorenz, H-W (1991), "Strange Attractors and Endogenous Business Cycle Theory", in *Business Cycles, Theory and Analysis*, ed. by Niels Thygesen et al, pp. 183-199.
- [12] Medio, A. (1980), "A Classical Model of Business Cycles"; in *Growth, Profits and Property*, ed. by Nell, J. E., Cambridge Univ. Press, pp.173-186.
- [13] Mainwaring, L. (1993), "Inter-class Transfers in a Goodwin-type Growth Model", *Metroeconomica*, 44(1), PP.65-77.
- [14] Mehrling, R. (1986), "A Classical Model of the Class Struggle : A Game Theoretic Approach", *Journal of Political Economy*, Vol.94, pp. 1280-1303.
- [15] Pohjola, M. T. (1981), "Stable, Cyclic and Chaotic Growth : The Dynamics of a Discrete-time Version of Goodwin's Growth Cycle Model", *Journal of Economics*, Vol.41, No.1-2, pp.27-38.
- [16] Sportelli M. C. (1995), "A Kolmogoroff Generalized Predator-Prey Model of Goodwin's Growth Cycle", *Journal of Economics*, Vol.61, No. 1, PP.35-64.
- [17] Zhang, Wei-Bin (1991), *Synergic Economics: Time and Change in Non-linear Economics*, Springer-Verlag, (有賀裕二監訳『時間と変化の経済学—シナジェティクス入門』, 中央大学出版会, 1994).
- [18] 二神孝一 (1991), 「準成長循環—Goodwin, Harrod—」, *The Economic Studies Quarterly*, Vol. 42, No. 2, pp.164-173.
- [19] ホッフバウアー／シグムンド (1990), 竹内康博訳『生物の進化と微分方程式』, 現代数学社。
- [20] 磯谷明德 (1983), 「グッドウィンの動学モデルとマルクスの蓄積論」, 『一橋論叢』, 第89巻, 第5号, pp. 755-766.
- [21] マルクス, K. (1965), 『資本論』第1巻 (マルクス＝エンゲルス全集第24巻), 大月書店。
- [22] 大石進一 (1992), 「カオスと計算」, 『数理科学』, No. 348, pp. 48-52.
- [23] 大瀧雅之 (1994), 『景気循環の理論—現代日本経済の構造—』, 東京大学出版会。

- [24] 置塩信雄編 (1988), 『景気循環—その理論と数値解析』, 青木書店。
- [25] 大和瀬達二 (1987), 『経済学におけるダイナミカルシステムの理論』, 税務経理協会。
- [26] 塩沢由典 (1983), 『近代経済学の反省』, 日本経済新聞社。

注)

- (1) 文献サーヴェイとしては、磯谷 (1983), Gabisch/Lorenz (1987) の Ch. 4. 3. 3 等を参照されたい。
- (2) 成長循環モデルには非常に多数の文献があり、本稿は網羅的な検討を行うことを目的とはしていない。比較的最近の関連文献としては、Mainwaring (1993), Sportelli (1995), Choi (1995) 等がある。
- (3) 非線形微分方程式による景気循環は、すでに Goodwin (1951) によって導入されている。このモデルは、投資ラグによる差分方程式を二次の Rayleigh 型非線形微分方程式で近似することによってえられており、成長循環モデルとは全くことなる。
- (4) 変数 $x(t)$ の時間に関する微分を $\dot{x}(t) = dx(t)/dt$ 。微分方程式での変数 $x(t)$ の時間変化率を $\hat{x}(t)$ で表す。

$$\hat{x}(t) \equiv \dot{x}(t)/x(t) = d \log x(t)/dt$$
 差分方程式にもこれを拡張し、変化率を $\hat{x}_t$ で表す。すなわち、

$$\hat{x}_t \equiv \Delta x_{t+1}/x_t = (x_{t+1} - x_t)/x_t$$
- (5) マルクスは「だいたいにおいて労賃の一般的運動は、ただ、産業循環の局面変転に対応する産業予備軍の膨脹・収縮によって規制されているだけである。」マルクス (1965), p.830 と述べている。
- (6) 置塩他 (1988), p.59。
- (7) 前掲書, p.60。
- (8) さらに, Sportelli (1995) は、別の方法によって極限周期軌道をもつ一般化されたモデルを構築している。構造安定性については, Zhang (1991) の 3. 5 節を参照されたい。
- (9) 大石 (1992) はカオスの数値計算の精度について論じている。
- (10) 原論文には(5)式などに誤植があるので、修正してある。
- (11) カオスの定義はいくつかあるからである。
- (12) Gabisch/Lorenz (1989), Lorenz (1991) 等を参照されたい。
- (13) まったく同じメカニズムを用いたアイディアは、新古典派的モデルでは Day (1982) によって提案されたものがある。
- (14) そうでないばかりにも、計算機シミュレーションの結果から得られる数値の Lyapunov 指数を計算するなどの数値実験によって、カオスの存在を示すことは可能である (Lorenz, 1989, Ch. 5.)。
- (15) シャーマン/エバンズ (1989), p.236—337 を参照されたい。
- (16) 大瀧 (1994) 序章を参照されたい。
- (17) たとえば塩沢 (1983) の「循環視点」はそのような試みの一つであろう。