論理と非論理のあいだ

——形式的なものと，その実在的根拠の構造——

丸　山　不二夫

1. 始めに

「論理的なものは，非論理的なものからはっきり区別されねばならない。」

一見すると，こうした主張には，疑問をさしはさむ余地は，ほとんど無いように見える。とくに，論理に対して，形式的なアプローチをとるなら——たとえば，ある論理体系の確実さは，その体系の無矛盾性によって（さらに強い言い方をするなら，それによってのみ）保障されるというアプローチをとるなら上の「区別」は，もっともなものに，見えるであろう。こうした立場においては，この「区別」の原理は，論理の側に，自らそなわっているものであり，いうまでもないことだが，非論理的なものは，論理的ならざるものとして，論理によって，規定されることになる。

しかし，こうした「区別」が，見かけ以上に複雑な問題を内包していることは，たとえば，「論理的なものによって，非論理的なものをきちんと特徴付けることが，可能か？」という問いを考えてみれば，すぐにわかる。

同じように，形式的なものと，非形式的なものとを峻別しようとする試みも，さまざまな問題にゆきあたることになる。たとえば，考察の対象を，形式的な論理に限定してさえ，そうした論理と，その本性について，非形式的な解釈がさまざまに可能であることを，我々はどう解釈したらいいのであろうか。

一般に，我々が考えあるいは解釈することとは，形式的にはあるいは非形式的には，いかなるものとして，考えあるいは解釈されるべきものだろうか？
等々。

小論では，もちろん，こうした，問題の広がりについては，十分に論ずるこ

とはできない。小論が，主要な関心を注いでいるのは，そうした問題の一部分を成す，次のような奇妙な事態についてである。

すなわち，形式的論理の，ある種の非形式的解釈が，形式的論理の形式的解釈——すなわち，ある論理体系に，形式的モデルを与えること——の，ほとんど，直接の帰結としてあたえられる事についてである。

論理そのものに，必ずしもトリヴィアルではないモデルを与えようという，問題意識は60年代の Cohen によるさまざまな独立性証明の成功——それは，forcing method と呼ばれる，新しいモデル構成法の発見によるものである——に大きな刺激を受けたように思われる。

小論の目的は，Cohen の方法の認識論的解釈から導かれる，論理の非形式的解釈をめぐる，興味ある議論を紹介し，あわせて，形式的なものと実在的なもの，さらには，論理的なものと非論理的なものとの関係の構造を探ることである。

2. 科学的探求の論理と forcing method

最初に取り扱うのは，A. Grzegorczyk の1964年の論文「直観主義論理の，ある自然な，形式的解釈」である。この論文はその標題からも明らかなように，直接的には，直観主義論理の自然な解釈を与えることを目的としているのだが，彼は，この解釈——古典論理は形而上学的存在論の論理だが，直観主義論理は，科学的探求の論理として解釈しうる——を，Cohen の“強制(forcing)”という術語から示唆を受けてなしたと述べている。逆にいえば，Cohen の forcing method が科学的探求の論理としての直観主義論理によって解釈されうると初めて示唆したのは，私が知る限り彼が初めてである。彼の考え方は次に述べる Kripkeの考え方に驚くほどよく似ているが，相互にどのような影響を受けたのかは，明らかではない(1)。

彼は，科学的探求について次のように述べる。

「科学的探求（たとえば，実験的研究）とは，我々の探求の方法によって得られた，新たに確立された諸事実によって，データの集合を継続的に豊富化することに存する。探求をなす際，我々は自然に疑問を投げかけ，自然に可能な

解答の集合を提供する。自然は，その中から一つを選ぶ(2)。」

そこで彼は，科学的探求Rを，次の三つからなるものと考える。第一に，情報の集合，すなわちすべての可能な経験的データの集合J，第二に，探求の一番最初に前提されている初期情報o，第三に，ある情報から，他の情報への拡張の可能性を表わす関数P。これらを，彼は，形式的に$R=\langle J, o, P\rangle$で表わす。

「集合Jは，有限かもしれないし，無限かもしれない。Jの要素は，有限の，順序付けられた．．．．atomic sentence の集まりである。．．．．要素oは，しばしば，空な集まりと考えられてよい。関数Pは，集合Jの上に定義され，Jの空でない部分集合を値にもつとみなされる。．．．．$\alpha=(A_1, A_2, \ldots, A_n)$ なら，$P(\alpha)=\{\alpha\}$ であるか，すべての $\beta\in P(\alpha)$ について $\beta=(A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}, \ldots, A_{n+k+1})$ なる atomic sentence $A_{n+1}, \ldots, A_{n+k+1}$ $(k\geqq 0)$ が存在するかである(3)。」

最後のPについての条件がわかりにくいかもしれないが，一度科学的情報としてえられた情報は，その情報がいかに拡大されても，なくなることはないと

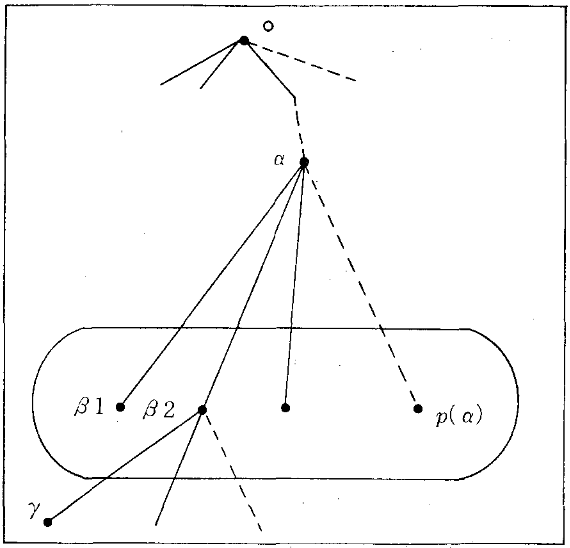

図1

いうことである。

「科学的情報の次の状態は，所与の情報と，新しい atomic sentence の有限列を含んでいるということである[4]。」

彼は科学的探求が次のような樹型図(図1)で表現されるという。oは，すでに述べたように，科学的探求に先立って，我々に与えられている情報である。地点oから，実験等の試行を繰り返し，新しいデータをえながら，我々は枝にそって進む。何回かの試行を繰り返しながら，我々は，経験的なデータの集まりαを，我々の知識として得たとする。この段階でも我々は探求を続ける。彼の表現を借りると，「我々は，自然に可能な解答の集合を提供する。」この情報αの段階での「可能な解答の集合」が$P(\alpha)$であり，その要素β_1, β_2, ...の中から「自然は一つを選ぶ。」図1では，自然は情報β_2を選び（すなわち，実験等により情報β_2が成り立つ事が確かめられ）さらにこの段階で可能となる情報$P(\beta_2)$の中から，我々の探求はγを選び出し，この過程を繰り返してゆく。もし，この過程が有限なら，最後の情報γはこれ以上に拡大されないので，$P(\gamma)=\{\gamma\}$となる。

ここで情報βは，探求Rにおける情報αの拡大であるという関係$\beta\succ_R\alpha$を次のように帰納的に定義する。

$$\beta\succ_0\alpha\leftrightarrow\beta=\alpha$$

$$\beta\succ_{n+1}\alpha\leftrightarrow\exists\gamma(\gamma\succ_n\alpha\wedge\beta\in P(\gamma))$$

$$\beta\succ_R\alpha\leftrightarrow\exists n(\beta\succ_n\alpha)$$

このうえで，彼は探求Rにおいて，情報αは我々が式ϕを主張することを強制するという基本概念$\alpha\rhd\phi$を次のように帰納的に定義する。

（定義1）

1. もしϕが変数を持たない atomic formul なら

$$\alpha\rhd\phi\leftrightarrow\phi\in\alpha$$

2. atomic formul でないϕについては

$$\alpha\rhd\ulcorner\phi\vee\phi\urcorner\leftrightarrow(\alpha\rhd\phi\vee\alpha\rhd\phi)$$

$$\alpha\rhd\ulcorner\phi\wedge\phi\urcorner\leftrightarrow(\alpha\rhd\phi\wedge\alpha\rhd\phi)$$

$$\alpha\rhd\ulcorner\sim\phi\urcorner\leftrightarrow\forall\beta(\beta\succ_R\alpha\rightarrow\sim(\beta\rhd\phi))$$

$$\alpha \triangleright \ulcorner \phi \to \psi \urcorner \leftrightarrow \forall \beta(\beta \succ_R \alpha \to (\beta \triangleright \phi \to \beta \triangleright \psi))$$

$$\alpha \triangleright \ulcorner \exists x \phi(x) \urcorner \leftrightarrow \alpha \triangleright \phi(a_i)\text{ なる }a_i\text{ が存在する}$$

$$\alpha \triangleright \ulcorner \forall x \phi(x) \urcorner \leftrightarrow \text{すべての }a_i\text{ について }\alpha \triangleright \phi(a_i)$$

注目を要するのは否定の取り扱いである。我々の探求によって得られた情報が，いかに拡大されても，命題ϕを強制しないとき，かつその時に限り，この命題の否定$\sim\phi$が我々の探求において強制されるのである。

彼はこの時つぎの基本的な定理が成り立つことを証明する[5]。

「量化記号を含まない式ϕは，もしあらゆる探求のすべての情報が式ϕを主張するように我々を強制するならば，かつその時に限り，形式的な直観主義論理において，論理的に真である。」

さらに量化記号をも含んだ直観主義論理の正確な解釈をうるために上で見た強制の定義を，若干，変更し，この新しい強制の定義のもとで，

「式ϕは，ϕがすべての探求のすべての情報によって強制されるとき，かつその時に限って直観主義論理において証明される。」ことを証明する。

こうして Cohen の強制法 (forcing method) と自然の科学的探求の論理と直観主義論理との興味ある関係が提起されたのである。このことの，私なりの検討は，次に Kripkeによるモデルとその解釈を紹介したあとで行うこととしよう。

3. 必然性の構造分析と forcing method

Kripke は，様相論理の分野で，Leibniz の“可能的世界”という概念に想を得て，Kripke モデルと呼ばれるモデルを構成したことで著名である[6]。

彼は，みづから開発した Kripke モデルの方法が様相論理だけでなく，直観主義論理のモデルを与える有効な方法であることを発見し，かつその研究の中でその方法が Cohen の forcing method と深く結びついていることを見付け出した[7]。

「Cohen の動機は我々のとは根本的に異なっている。しかし，彼の概念が，我々のモデル理論に密接に関連づけられているのは明らかである。しかしこうした関係の“より深い理由”はまだ知られていない[8]。」

この論文での Cohen の方法の取り扱いは部分的で，そしてなによりも，Cohen のオリジナルな方法にそいすぎていて，両者の関係がどちらかというと技術的に語られているように思われる(9)。

しかし，すでに Grzegorczyk の解釈をみてきた我々には同じ論文中の Kripke モデルが直観主義論理のモデルを与えることの説明を通じても Kripke モデルと Cohen の方法の類縁性を見ることができるであろう。

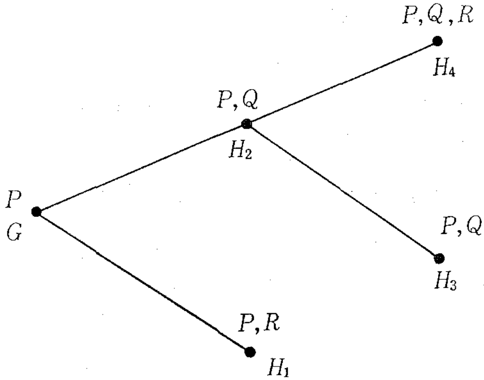

図 2

式Aが P, Q, R という三つの atomic formula から構成されているとしよう。この時つぎのような構造 (G, K, R) と $\{P, Q, R\}$ と K の上で定義され $\{T, F\}$ 上に値をとる関数 Φ を考えよう。K の要素は，G, H_1, H_2, H_3, H_4 である。もし，Φ がある節点の上で，ある atomic formula に値 T を割り当てるなら，節点 G, H_i のうえに，その atomic formula を書く。もし値Fが割り当てられるのなら，それを省く。こうして，たとえば図2では，$\Phi(P, G)=T$ だが，$\Phi(Q, G)=\Phi(R, G)=F$ である。これらの関係の直観的解釈は，次のようなものである。節点 G, H_i は，時間（あるいは，特徴的な，著しい状況）における，我々がそこでさまざまな情報を受け取る点を表現している。もし時間の中の特別な点Hで，命題Aを証明する十分な情報を我々が持つ時，我々は $\Phi(A, H)=T$ であるという。もしこのような情報が欠けている時 $\Phi(A, H)=F$ という。$\Phi(A, H)=T$ なら，A は時点H で検証されているということができる。この意味では，T, F は真偽の概念を表わしているのではないことに留意せね

ばならない。すなわち $\Phi(A, H)=T$ なら A は時点 H で真であることが証明されているのだが，$\Phi(A, H)=F$ は H が A で偽であることが証明されていることを意味しない。それは単に，H では A が証明されていないことを述べているだけであって，そのあとでAであることの証明がなされるかもしれないのである。

ところで先に挙げた樹型図（図2）に対して Kripke は次のような，直観的解釈を与える。時点 G――我々の現在の情報を示す――では我々はPを証明している。我々の知るすべてのことによっても，何も新しい情報が我々にもたらされないなら，我々は，いくらでも長いあいだじっとGにとどまるかもしれない。しかし，時点 H_1（この場合，P に加えてRの証明を我々はうる。），または，時点 H_2（ここではPに加えて Q の証明をうる。），または，時点 H_3, H_4 にさえジャンプする十分な情報をうることは可能である。もし我々が時点 H_2 にジャンプしたとすれば，すなわち，我々が P と Q の両方を証明したとすれば，我々は時点 H_2 にとどまり続けるかもしれないし，H_3, H_4 へ進むかもしれない。もし H_3 へジャンプしたとすれば，我々は，P, Q のみを証明しているままである。しかしこのことは状況 H_3 が，全く H_2 と同じであることを意味しない。事実 H_2 にとどまる限り，いつかは H_4 へ進み，R を証明するという可能性が，引き続き開かれているのである。しかし，状況 H_3 になれば，Rが証明されるという選択肢を排除する十分な情報を我々は得ていることになる。

一般に，モデル構造 (G, K, R) において，我々は G を現在の“明らかな状況”として解釈する。Hがいかなる状況であろうとも，我々が知りうる限りでは，後にはH' へ前進する十分な情報をうるかもしれないなら，HRH' であるという。Hで我々の持つ情報は，どんなに長い間にわたっても，我々がうるすべての情報であるかも知れないので，我々は，HRH を主張する。Rの推移性は，直観的には明らかである。すべてのAに対して $\Phi(A, H)=T$ で HRH' なら $\Phi(A, H')=T$ なる要請は，もし，我々が，H でAの証明をすでに得ているなら，いかなる後であってもAを証明されたものとみなしてよいことを意味している。別の言い方をするなら，我々は一度知ったことは忘れないのである。直観主義的に，$\sim A$ を主張するためには，A が H では検証されないことだけ

ではなく，いかに多くの情報がえられても，いかに時がたっても，Aが検証されえないことを，我々はHで知らねばならない。それゆえ，

$\Phi(\sim A, H) \leftrightarrow H' \in K(HRH' \rightarrow \Phi(A, H)=F)$ である。

こうした Kripke の解釈は Grzegorczyk の解釈とほとんど同一であると言ってもいい。しかし，同じ素材を扱っていることによる一致以上の意味を，私は感じるのだが，このことを説明するためにも，少し回り道になるかもしれないが，本来の Kripke モデルが持つ意味を認識論的に分析して見よう。

様相論理において彼は，上に見たモデル構造 (G, K, R) に次のような意味を与えていた。Kは“可能世界”の集合である。すなわち，ある時点で考えられうる，すべての“世界”の集まりである。Gはこの“可能世界”の中で，特異な位置を占める“世界”，すなわち，我々が現に置かれている，現実の“実在界”である。

「直観的には，我々は関係Rを，次のように解釈する。任意の二つの世界 $H_1, H_2 \in K$ が与えられた時，我々は“H_1RH_2”を，H_2は“H_1に対して相対的に可能である。”，H_2は“H_1において可能である”，H_2は“H_1に関係づけられている。”と言う風に読む。....，もしある命題AがH_1に対して相対的に可能な，あらゆる世界において真であるなら，我々は，命題Aは世界H_1において必然的であると評価する。....双対的に，命題AはAがそこに置いて真であり，かつH_1に対して相対的に可能な世界H_2が存在するとき，かつその時に限りH_1において可能である(10)。」

彼は，上の様に解釈したRについて，H_1RH_2, H_2RH_3 なら H_1RH_3 であるか，すなわち，Rは推移であるかと言う問題を立てる。

「H_2RH_3 であると言うことは，H_3で真であるいかなる式AもH_3で可能であると言うことである。(すなわち，$\Diamond A$は，H_2で真である。) しかし，そうすれば H_1RH_2 であるから，$\Diamond A$は，H_1で可能であることになる。(Aは，H_1で可能的に可能であり$\Diamond\Diamond A$は真である。) H_1RH_3と主張するためには，AがH_3で真であるなら，H_1で可能であることを示せばよい。しかし，上で，少なくとも，AはH_1において可能的に可能であることを示したので，H_1RH_3を主張するために我々が付け加えるべき還元公理は“可能的に可能なものは可能

である”ということである[11]。」

こうして彼は，古典的な様相論理の還元公理を関係の簡単な諸性質（たとえば，Rは反射的だとか，推移的だとか，いまの場合の対称的であるとか）に帰着させ，それらの公理から構成される様相論理の形式的体系間の関係を解明することに成功したのであった。

さらに，興味あることは，様相論理の S_4 と呼ばれる体系（上で見た解釈によれば，Rが反射的であり，かつ推移的であるような関係の時に，そのモデルが構成されるような体系である。）と直観主義論理とは同型であることが証明されるのである。

4. モデル G, K の認識論的分析

これまで，Grzegorczyk の解釈（以下Gと略す。）と Kripke の解釈（以下Kと略す。）とをみてきたのだが，これらについて認識論的に興味ある問題をいくつか検討しよう。

はじめに，モデルGの素朴さとも思えるものについて触れて見よう。なによりも，Gにおいては，自然に対して，我々が働きかけてうるところの情報というのが，中心的な概念になっているのだが，彼は，それを直ちに有限な atomic formula の集合と同一視している。ここでの atomic formula は定義における，$\alpha \rhd A_i \leftrightarrow A_i \in \alpha$ にもはっきり表われているように，それ自身すでに形式的言語である。ここには経験的命題と数学的命題との混同がある。一見するとそれとは逆のように思えるのだが，まさにGにおける強制概念の定義の右辺と左辺とではその認識論的立場がはっきりと区別できるのである。たとえば，次のような定義を考えて見よう。

$$\alpha \rhd \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner \leftrightarrow (\alpha \rhd \phi \wedge \alpha \rhd \psi)$$

この定義の左辺は，「α は，式 $(\phi \wedge \psi)$ を強制する」という関係を表わすのだが，右辺は，「α が ϕ を強制し，かつ，α が ψ を強制する」ことを表わしている。同じ論理記号“$\wedge$”（かつ）が用いられているが，左辺の“$\wedge$”は，数学的命題 $(\phi \wedge \psi)$ の一構成部分としての数学的な（抽象的で形式的な）“$\wedge$”であるのに対して，右辺の“$\wedge$”は $\alpha \rhd \phi$，$\alpha \rhd \psi$ なる数学的命題についてのメタ数

学的な“∧”である。ここまでは常識的な作業であり，右辺の“∧”の代わりに新しくそれとは異なるメタ論理記号を導入すれば，それですむのかもしれない。

しかし，モデルの構成の基本的な精神にそくして考えてみれば，このメタ論理記号は，右辺の論理記号より抽象的であるのではなくて，その意味しているものは，逆に，優れて具体的で実在的な関係であることがわかる。すなわち，Gの対象としている自然において，実際に，ϕとともに，ψが成り立っているという経験を我々がうるということをそれは意味しているのである。この例に限らず，Gにおける強制概念の定義の右辺に表われる論理記号はすべて，実在的で，経験的な関係を表わすものとして解釈できるのである。

次に，Kの説明の最後に，様相論理における体系S_4と直観主義論理との同型性について触れたが，このことの持つ意味についても簡単に分析しておこう。

数学的体系は，無矛盾という形式的要件を満たすことのみを制限として，自由に——実在的な対象からも自由であり，かつ，思惟の能動的で自由な働きによって生み出される。（たとえ，それが，いかに恣意的であろうとも。）——構成されたものであるとする，いささか強い形での形式主義的見解が存在する。こうした見解においては，数学的真とは，とりもなおさず，かかる形式的体系における形式的導出可能性に等しいことになる。

先に上げた結果は様相論理における“必然的真”の概念と forcing method における真の概念が対応づけられることを述べているのであるが，これは前に見た形式的見解より深い含意を持つように思われる。なぜなら，形式的見解においては，数学的真とは，まず，なによりも形式的に可能な真として措定されたものにすぎないのに対して，forcing method による真理概念の構成は——たとえ，そうしたものとして措定されたにしても——数学的真理の体系が，必然的真理の体系として解釈されうることを述べているからである。

最後に，直観主義論理と古典論理の関係の問題を考察して見よう。

歴史的には，直観主義論理は Brouwer らによって，数学により確実な基礎を与えんとして提唱されたものであるが Gödel は1932年，次のような意外な

結果をえた。「直観主義論理に基づく算術と数論が古典的なそれらよりも狭く見えるのは見かけだけであり，実際には（いささか異なった解釈を用いるだけで）古典的なそれらの全体を含んでいる[12]。」

この結果は直観主義論理とは古典論理から排中律を取り除いた弱い，体系だというような理解や，直観主義論理こそ，あいまいな古典論理に制限を加えた，厳格なそして確実な論理だというような理解の双方にとって意外なものであった。両者の関係にとって次の定理は重要である。

「Xが全称記号を持たず，また，変数も持たない式であれば，Xが古典論理における真であることと，$\sim\sim X$が直観主義論理における真であることは同値である[13]。」

しかしこうした Gödel の結果はGかKにそくして考えてみれば，少しも意外ではないことがわかる。Gについて考えて見よう。Gの枝をどんどん切り詰めて，ついには初期情報の集合oに至ったとしよう。Gの条件によればJの要素は atomic formula の有限集合であるが，Jは有限であっても無限であっても構わないとされている。可能なすべての情報が前もって初期情報oの中に含まれているとすれば，Gの枝は消え差って情報の拡大を表わす関係 $\alpha \succ_R \beta$ は意味を失う。すなわち，この切り詰められたGにとってGにおける（定義1）は，次のような，より単純な定義に還元されうる。

（定義1）′

1. Aが atomic formula の時

$$\alpha \triangleright A \leftrightarrow A \in \alpha$$

2. Aが atomic formula でない時

$$\alpha \triangleright \ulcorner \phi \wedge \psi \urcorner \leftrightarrow (\alpha \triangleright \wedge \alpha \triangleright \psi)$$

$$\alpha \triangleright \ulcorner \sim \phi \urcorner \leftrightarrow \sim(\alpha \triangleright \phi)$$

$$\alpha \triangleright \ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner \leftrightarrow (\alpha \triangleright \phi \rightarrow \alpha \triangleright \psi)$$

等々

こうした関係が古典論理のモデルを与えるのは明らかである[14]。

よって，モデルGは古典論理のモデルを特殊な場合として自らのうちに含んでいるのである。逆にいえば，この特殊性が，認識論的に見た古典論理の特質を

表現していると考えることができるのである。

モデルGの特徴は，両論理の関係を上に見たように形式的に処理できるだけでなく，そのよってたつ認識論的前提の違いとして，たやすく，非形式的な解釈を与えうるところにある。すなわち古典論理は認識の始めから，その発展段階とはかかわりなく，普遍的に妥当する論理としてそのモデルが構成されるのである。

5. 論理の普遍妥当性をめぐって

こうしたモデルの分析は古典論理が普遍的に妥当するのかという，いささか陳腐な問いに，次のように答えることを可能にする。

古典論理が普遍的に妥当するという性格をもつ論理であることを説明しうる形式的モデルが存在しうる。しかし非形式的考察はこの普遍妥当性が人間の認識の始めから存在し，認識の発展いかんにかかわらず妥当するものとして，解釈されていることを教える。

このことは，論理的には，我々の認識にとって，こうした普遍妥当性が存在することを前提にして，初めて，かかる性質を持つ論理が構成されうるのであって，その逆ではない事を示しているように思われる。

直観主義論理は古典論理の抽象的な普遍妥当性とそれがよってたつ認識論的前提を説明しうるが逆はできないのである。

モデルKについても事情は全く同様であるので説明は省こう。

ところで，G, K ともによってたつ直観主義論理解釈の認識論的前提の一つはいうまでもなく，我々の認識は発展しうるということである。しかし注意して G, K を分析すれば直ちに明らかなように，認識の具体的な，というより経験的な論理がそのまま直観主義論理だというわけではないのである。G, K いずれにとってもそれぞれの，どのモデルにおいても妥当な命題が直観主義論理において真な命題なのである。Gの表現を借りれば「式ϕは，ϕがすべての探求のすべての情報によって強制されるとき，かつその時に限って，直観主義論理において証明される。」

その意味で，当然のことながら，直観主義論理は，古典論理とはそのあり方

が異なっているとはいえ，やはり，形式論理としての抽象的普遍妥当性を持つのである。そのことは，次のような独立性証明の仕方を考えれば，より明確になろう。

直観主義論理を用いての forcing method の解釈においては，その独立性を証明しようとする公理の否定が成り立つような，ある特定の樹型図で定義されるモデルを構成する。たとえば，ある ZF の直観主義的モデル M が存在して，その中では選択公理 (AC) が成り立たないとする。このことが，AC は ZF の公理から古典論理に基づいて証明できない（すなわち，AC は ZF から独立である）ことと同値であることは次のようにして簡単に証明される。

もし $ZF\vdash_C AC$ なら，ZF の有限な命題 $A_1, A_2, .., A_n$ について

$$A_1, A_2, .., A_n\vdash_C AC \text{ であらねばならない。}$$

だから $\vdash_C(A_1\wedge A_2\wedge....\wedge A_n)\rightarrow AC$

前に見たようにこれは $\vdash_I\sim\sim((A_1\wedge A_2\wedge....\wedge A_n)\rightarrow AC)$ に等しい。

だから，$\vdash_I(A_1\wedge A_2\wedge....\wedge A_n)\rightarrow\sim\sim AC$

すなわち，$(A_1\wedge A_2\wedge....\wedge A_n)\rightarrow\sim\sim AC$ はすべての直観主義的モデルにおいて妥当せねばならない。ところが，その中で，$A_1, A_2, ..., A_n$ と $\sim AC$ が妥当であるような直観主義モデルが存在する。これは矛盾である。

こうした推論において中心的な役割を果たしているのは，「完全性」と呼ばれる，次のような性質である。

すなわち，「ある命題が，ある形式的体系において，導出可能であるなら，その命題は，その体系の，あらゆるモデルにおいて妥当する。逆に，ある命題が，ある形式的体系の，あらゆるモデルにおいて妥当するなら，その命題は，その体系において，導出可能である。」

我々の興味を引くのは，形式的な論理体系と，モデル構成法の多様さにもかかわらず，数学的にも，認識論的にも有意義と思われる論理体系のほとんどすべてが，こうした性質をもつことである。逆にいえば，ある形式的論理体系に対して，「完全性」の要件を満たすような，モデルの構成法が，存在するように見える。このことは，さまざまな，モデルの構成法を貫く，共通の特質の抽出が，「論理的なるもの」の特徴づけに，重要であることを示唆しているよう

に思われる。

ところで，こうした，すべてのモデルにおいて一様に妥当するといった，いわば，仮想的な性質が，論理的なものとして（すなわち，形式的で抽象的な普遍妥当性をもつものとして）現象するのであって，その逆でなかったとするなら，あるモデルにおいて妥当することがわかっているだけの命題は，論理と非論理との間で，いかなる位置を占めるのであろうか？

人間の知のあり方に興味をもつ我々にとって，我々の，ほとんどすべての知はそうした性格を帯びているように見える。残念ながら，こうした問い掛けに答える余裕は残されていない。十全な展開は，後日に期することとして，一つのことを強調して，小論を終えたいと思う。

論理と非論理の間の，広大な領域は，論理が，その威力を発揮して見せるための，単に，受動的な素材ではなく，論理そのものを，自ら生み出してゆく，論理の母胎なのだと。

(注)

（1） 両者は，文献の中にそれぞれ相手の論文を上げていない。二つの論文の発表された時期が近いことから，両者が，互いに独立に類似の結果に到着したことは十分に考えられる。両者の考えを発展させたと思われる Fitting はその著作の中に両者の論文を上げているが，その関係については何もかたっていない。

（2） A. Grzegorczyk: "A philosophically plausible formal interpretation of intnitionistic logic" Indag. Math. 26 (1964) p. 569.

（3） ibid, p. 596.

（4） ibid, p. 597.

（5） 証明は，トポロジカルな処理を用いて行われる。こうした処理については，Tarski: "Sentential Calculas and Topology" in Logic, Semantics, Metamathematics. p. 421–454. Oxford Press" 1969 に，詳しい。

（6） S. A. Kripke: "A completeness theorem in modal logic" Jour. Symb. Logic 24 (1959) p. 1–14 が，最初の Kripke モデルを提起した論文である。様相論理における Kripke モデルについては，Kripke の "Semantical analysis of modal logic I, normal propositional calcului" Zeits. f. math. Logik. u. Grundl. d. Math. 9 (1963) p. 67–96 または，"Semantic analysis of modal logic II, non normal modal propositional calculi" in The Theory of Model. ed. Addison, Henkin, Tarski North-Holland, Amsterdam (1965)

p. 206–220 に詳しい。

(7) S. Kripke: "Semantical analysis of intuitionistic logic I" in Formal systems and recursive functions. North-Holland, Amsterdam (1965) p. 92–130 において彼は，Kripke モデルの直観主義論理への適用と forcing-method との関連について触れている。

(8) ibid p. 120.

(9) Fitting は，Kripke の方法を直接に Cohen の方法に結びつけるのではなく，Kripke の方法を Gödel のモデル形成の方法に結び付け，それが，結果的には Cohen の方法と等しくなることを示すことで，forcing method の直観的な解釈を与えようとしている。

(10) S. Kripke: "Semantical analysis of modal logic I" (前出) p. 70.

(11) ibid, p. 70.

(12) K. Gödel: "Zur intuitionistischen Arithmetik und Zahlentheorie." Ergebnisse eines Mathmatischen Kolloquiums p. 34–38 (1931–1932).

(13) 多くの論理学書に，この証明は含まれている。たとえば，Kleene: Introduction to Metamathematics. North-Holland, Amsterdam (1964) の p. 492，定理59. または，Fitting: Intuitionistic logic, Model theory and Forcing. North-Holland, Amsterdam (1969) の定理 8. 3

(14) 前出の Fitting の p. 50. chap. 6 Truth and almost truth set を参照のこと。

(筆者の住所：千葉市真砂4—4—3—706)