<研究ノート>

新古典派企業における最適投資，生産計画

——非代替的生産技術の場合——

黒　柳　達　夫

I　はじめに

ホーベルモー〔7〕が，新古典派の企業理論からは，各期ごとの最適投資水準を決定することはできないと指摘して以来，「投資関数理論」の研究が多くの人々によってなされてきた。

ジョルゲンソン〔8〕，アイスナー・ストロッツ〔5〕，宇沢〔14〕，グールド〔6〕，ルーカス〔10〕，トレッドウェイ〔13〕などのモデルが代表的なものである。

これらのモデルのうち，ジョルゲンソン以外のモデルには，調整費用——資本には相対的に固定性があり，調整スピードを変化させるためには余分なコストがかかる——なるものが組み込まれており，これによって，各時点の最適投資水準が説明されるに致った 。

本稿は，これらの成果を踏まえて，非代替的な生産関数をもつ企業の最適投資，生産計画を分析するものである（我々の分析は，完全競争下の企業に限定されるが，独占の場合の分析には，佐藤〔11〕がある）。

本稿の構成は次の通りである。Ⅱでは，モデルの記号と仮定の説明がなされる。Ⅲでは，企業の操作変数の最適時間経路が決定され，Ⅳに於いて，その要約がなされる。

II　モデルの記号と仮定

記号を以下の如く定める

K_t：資本ストック　　L_t：労働量

Y_t：生産量　　I_t：粗投資

C_t：調整費用　　P_t：製品価格

W_t：貨幣賃金率　　q_t：資本財価格

δ_t：減価償却率　　ρ_t：割引率

t：時間

労働と資本を使って，単一の生産物を生産している企業を考える。労働と生産量は比例し，かつ比例定数を1としよう。

(1) $$Y_t=L_t$$

生産量を一定倍したものは，存在資本量をこえないとし，この定数を1とすると，

(2) $$Y_t\leqq Kt$$

(1)，(2)が，非代替的な生産関係を示すことになる。

粗投資と純投資 $\dot{K}_t=\left(\frac{dK}{dt}\right)$ の関係は

(3) $$I_t=K_t+\delta_t\dot{K}_t$$

諸価格および償却率については，任意の時点 $t>0$ に於いて

$$P_t=P \qquad q_t=q \qquad W_t=W$$
$$\delta_t=\delta \qquad \rho_t=\rho$$

とする。

先に述べたように，企業が資本財を設置する際には，資本財購入費用以外にも費用がかかるものと考えられる。この内部調整費用が，粗投資に依存すると仮定すると

(4) $$C_t=C(I_t)$$

$$\left.\begin{array}{l} C(I_t)>0 \\ C'(I_t)>0 \\ C''(I_t)>0 \end{array}\right\} \quad I_t>0$$

$$C'(0)=0$$

$$C(0)=0$$

である。図1がこれを表わしている。粗投資の非可逆性を考慮して，$I_t<0$ の場合は排除してある。

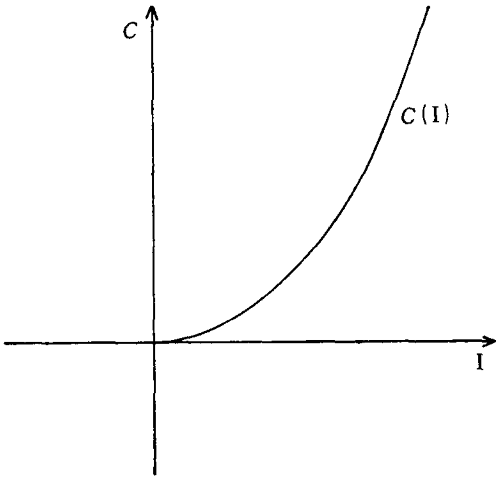

図 1

我々の企業は完全競争に直面していると仮定されているが，その場合でも，市場が不均衡なら，需要量に不安があるというのが，バロー等の主張である。この点を考慮して，企業は七期に於ける供給量（＝需要量）の上限を想定するものとし，さらにこの上限が時間を通じて一定であるとすれば

(5)　　$Y_t=L_t\leqq\hat{Y}=\hat{L}$

さらに，各変数は非負であり，資本ストックの初期値は与えられているとすると

(6)　　$L_t\geqq 0 \qquad I_t\geqq 0 \qquad K_t\geqq 0$

K_0………given.

以上のような制約条件のもとで，企業はネット・キャッシュ・フローの割引現在価値の総和を最大にするような労働と粗投資を選択するものとすれば，企業の目的関数は

$$\int_0^\infty R_t e^{-\rho t}dt$$

である。ここで，R_t は t 期に於けるネット・キャッシュ・フローで

(8) $$R_t=PY_t-WL_t-qI_t-C(I_t)$$

と定義される。

III 最適時間経路

以上の最適化問題を整理すると

(7) $$\max_{L_t\ I_t}\int_0^\infty R\,e^{-\rho t}dt$$

$$s\cdot t$$

$$\left.\begin{array}{ll}(8) & R_t=PY_t-WL_t-qI_t-C(I_t)\\ (1)\ (2) & Y_t=L_t\leqq K_t\\ (3) & \dot{K}_t=I_t-\delta Kt\\ (5) & Y_t=L_t\leqq\hat{Y}=\hat{L}\\ (6) & L_t\geqq 0\quad I_t\geqq 0\quad K_t\geqq 0\\ & K_0\cdots\cdots\cdots\text{given.}\end{array}\right\}$$

この問題を解くため，H をハミルトン関数，λ_t を補助変数とすれば

(9) $$H=PY_t-WL_t-qI_t-C(I_t)+\lambda_t(I_t-\delta K_t)$$

上述の問題の必要条件は，次のようである。

(3) $$\dot{K}_t=I_t-\delta K_t$$

(10) $$\frac{d}{dt}\lambda e^{-\rho t}=-\frac{\partial H}{\partial K}e^{-\rho t}$$

(11) $$PY_t-WL^t-qI_t-C(I_t)+\lambda_t(I_t-\delta K_t)\geqq PY_t-WL_t-qI_t-C(I_t)+\lambda_t(I_t-\delta K_t)$$

(12) $$\lim_{t\to\infty}\lambda_t e^{-\rho t}=0$$

条件(11)は，H を制御変数 L_t と I_t に関して最大にすべきことを言っている。(12)は横断性の条件である。条件(11)より，制約条件(1)(2)が有効な場合と，(5)が有効な場合に分けて分析できることがわかる。そこで，以下のように２つの領域に分けよう。

$$A=\{(K,\ L)\mid L\geqq 0,\ \hat{L}\geqq K\geqq L\}$$

$$B=\{(K,\ L)\mid 0\leqq L\leqq\hat{L}\ K\geqq\hat{L}\}$$

図2はこれを図示したものである。領域 A では，(1)(2)が有効，領域 B では，(5)が有効である。以下の分析では，$Y_t=L_t$ だからすべて L_t で統一してあることに留意されたい。

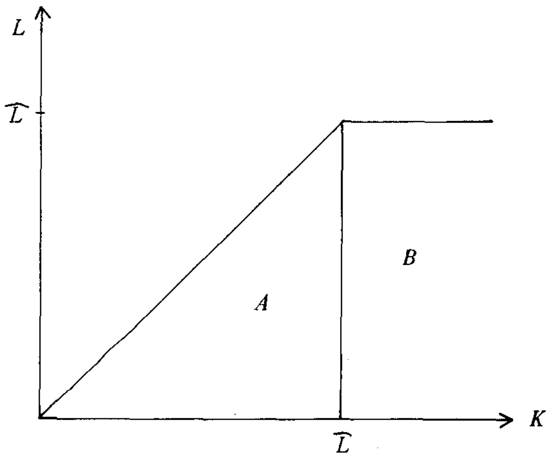

図 2

(i)　領域Aに於ける最適経路

領域Aでの最適条件は

L_t については

(13)　　$\tilde{L}_t=K_t$

ただし

(14)　　$P-W>0$

が仮定されている。

I_t については

(15)　　$\lambda_t=C'(\tilde{I}_t)$

補助変数と資本ストックについては

(16) $\dot{\lambda}_t=(\rho+\delta)\lambda_t-(P-W)$

(3) $\dot{K}_t=\widetilde{I}_t-\delta\widetilde{K}_t$

(16)を解くと

(17) $\lambda=\dfrac{P-W}{\rho+\delta}+a\,e^{(\rho+\delta)t}$

aは定数である。横断性条件(12)より，$a=0$でなければならないから，(17)は

(18) $\lambda=\dfrac{P-W}{\rho+\delta}(\equiv\bar{\lambda})$

すなわち，粗投資の需要価格とみなしうるλ_tは，時間を通じてコンスタントになる。

このとさ，(15)より最適粗投資$\widetilde{I}_t$も時間を通じて一定となる。すなわち，$C''>0$と(15)より

(19) $\widetilde{I}_t=g\left[\dfrac{P-W}{\rho+\delta}\right]\equiv\bar{I}>0$

以上で各変数の最適経路がすべて決定された。

tが与えられると，K_tとλ_tが固定される。その時L_tについては，(13)よりできるかぎり増大させるのが最適である。I_tについては(18)と(19)より決定される。g関数は単調増加関数であるから，パラメーターの変化に対する反応は次のようになる。

(20) $\dfrac{\rho\bar{I}}{\rho P}>0 \qquad \dfrac{\partial\bar{I}}{\partial W}<0 \qquad \dfrac{\partial\bar{I}}{\partial\rho}<0 \qquad \dfrac{\partial\bar{I}}{\partial\delta}<0$

最適資本ストックの経路は，(19)を(3)に代入して

(21) $\dot{\widetilde{K}}_t=\bar{I}-\delta\widetilde{K}_t$

これを解いて

(22) $\widetilde{K}_t=\dfrac{\bar{I}(1-e^{-\delta t})}{\delta}+K_0\,e^{-\delta t}$

(22)よりtが無限大に近づくにつれ，K_tはKに近づくことがわかる。ここで

(23) $\bar{K}\equiv\dfrac{\bar{I}}{\delta}$

である。K_tがKに達するのに無限の時間がかかることもたしかめられる。

図3はこのことを示している。

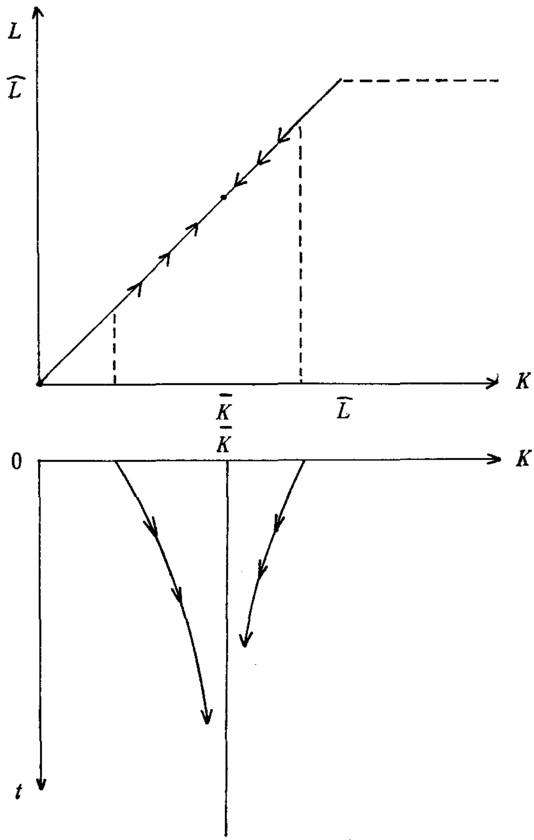

図 3

ただし

(24)　　$\overline{K}<\widehat{L}$

が仮定されている。

(23)と(22)から，次のことが確認される。

(25)　　$\dfrac{\partial \widetilde{K}_t}{\partial P}=\dfrac{\partial \overline{I}}{\partial P}>0$

$$\frac{\partial \widetilde{K}_t}{\partial W}=\frac{\partial \bar{I}}{\partial W}<0$$

$$\frac{\partial \widetilde{K}_t}{\partial \rho}=\frac{\partial \bar{I}}{\partial \rho}<0$$

$$\frac{\partial \widetilde{K}_t}{\partial \delta}=\frac{\partial \bar{I}}{\partial \delta}-\widetilde{K}\ ?$$

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial P}=\frac{1}{\delta}\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial P}>0$$

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial W}=\frac{1}{\delta}\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial W}<0$$

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial \rho}=\frac{1}{\delta}\ \frac{\partial \bar{I}}{\partial \delta}<0$$

$$\frac{\partial \bar{K}}{\partial \delta}=\frac{\frac{\partial \bar{I}}{\partial \delta}\cdot \delta-\bar{I}}{\delta^2}<0$$

(21)を(23)に代入すると

(26)　$\dot{\widetilde{K}}_t=\delta(\bar{K}-\widetilde{K}_t)$

(22)あるいは(26)は，最適資本ストックの時間径路上での長期定常状態$\left(\bar{K}=\frac{\bar{I}}{\delta}\right)$への収束径路を示している。この収束径路は，「伸縮的加速子」といわれる調整過程を示している。

(ii) 領域Bに於ける最適経路

領域Bでの最適条件は

L_t について

(27)　$\widetilde{L}_t=\widehat{L}$

ただし

(14)　$P-W>0$

が仮定されている

I_t については

(28)　$\lambda_t=C'(\widetilde{I}_t)$

補助変数と資本ストックについては

(28) $\dot{\lambda}_t=(\rho+\delta)\lambda_t$

(3) $\dot{K}_t=I_t-\delta\widetilde{K}_t$

(29)を解くと

(30) $\lambda_t=be^{(\rho+\delta)t}$

bは定数である。横断性の条件(12)より，bは0でなければならないから，(30)は

(31) $\lambda_t=0$

すなわち，粗投資の需要価格とみなしうるλ_tは，時間を通じて0になる。

このとき，(28)と$C'(0)=0$より，最適粗投資$\widetilde{I}_t$も時間を通じて0となる。

(32) $\widetilde{I}_t=g[0]\equiv 0$

以上で領域Bに於ける各変数の最適経路がすべて決定された。

労働については，できるかぎり投入するのが最適である。粗投資については，時間を通じて0にするのが最適である。

最適資本ストックの経路は

(33) $\dot{\widetilde{K}}_t=-\delta\widetilde{K}_t$

これを解いて

(34) $\widetilde{K}_t=K_0e^{-\delta t}$

ただし，$\widetilde{K}_t=\widehat{L}$となった時点から最適経路はA領域へ移る。最適政策(27), (32), (34)はB領域内でのみ有効である。

図4はこれを図示したものである。

B領域に於いては，常に過剰設備をかかえている。この過剰設備を徐々に減らしていくのが最適政策である。

IV 要約

領域Aと領域Bを合わせると，全領域に於ける最適経路が決定される。以下最適政策を整理するが，(24) $K<L$ が仮定されていることに留意されたい。

(i) $K_0<\overline{K}$ の場合

瞬時に労働を資本ストックの水準にまで調整し，その後は，資本ストック＝

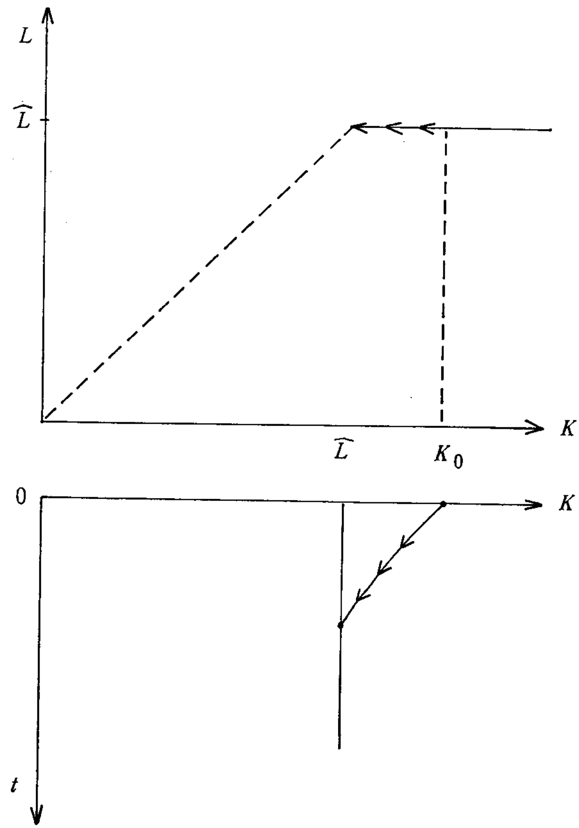

図 4

働労を

(26)　$\dot{\tilde{K}}_t=\delta(\overline{K}-\tilde{K}_t)$

なる調整方程式に従って調整するのが最適である。

（ii）　$K_0=\overline{K}$ の場合

瞬時に労働を均衡資本ストック$\overline{K}$に調整し，その後は資本ストック労働を

に保つ政策が最適である。

(23)　$\overline{K}=\dfrac{\overline{I}}{\delta}=\widetilde{L}_t$

(iii)　$\overline{K}<K_0<\hat{L}$ の場合

瞬時に労働を資本ストックの水準にまで調整し，その後は，資本ストック労働を δ なる率で均衡資本ストックに近づくのが最適である。

(6)　$\dot{\widetilde{K}}_t=\delta(\overline{K}-\widetilde{K}_t)$

(iv)　$K_0\geqq\hat{L}$ の場合

瞬時に労働を $\hat{L}$ に調整し，粗投資は0にするのが最適である。

(35)　$\left.\begin{array}{l}\widetilde{L}_t=\hat{L}\\ \widetilde{I}_t=0\end{array}\right\}\ 0\leqq t\leqq T^*$

ここで，T^* は

(36)　$\hat{L}=K_0e^{-\delta T^*}$

すなわち

(37)　$T^*=\dfrac{1}{\delta}\log\dfrac{K_0}{\hat{L}}>0$

である。

$\widetilde{K}_t$ が $\hat{L}$ に致達した後は

(26)　$\dot{\widetilde{K}}_t=\delta(\overline{K}-\widetilde{K}_t)$

が最適政策である。

以上の最適政策は図5で示されている。

我々は，非代替的な生産関数を持つ企業を想定して，完全競争化に於ける最適政策を分析した。その結果は代替的な生産関数をもつ企業の最適政策とほぼ同じ結果が得られた。

すなわち，領域Aに於ける最適政策がそれである。領域Bに於いては一時的に過剰設備を保有しているが，有限時間で過剰設備はなくなる。しかも過剰設備の保有という結論は，生産量の上限に依存しているのであって，生産関数の

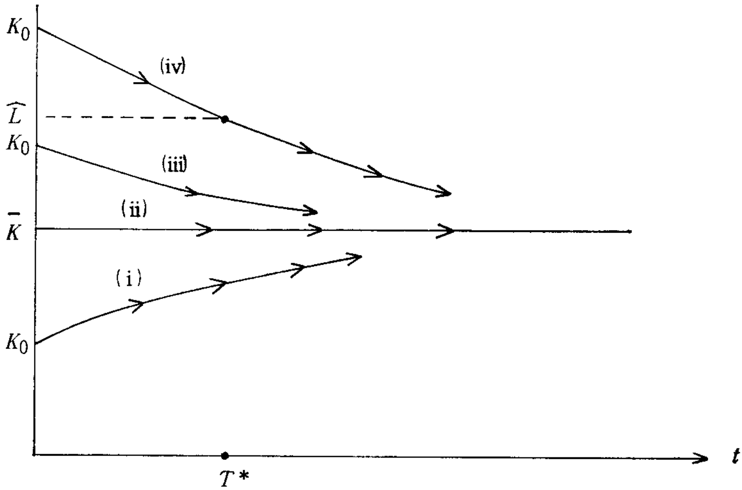

図 5

非代替性には依存していないのである。

最後に，調整費用のかからない場合について考えてみると，この場合には最適解は瞬時に $L_t=\hat{L}=K_t$ なる調整をし，その値を維持しつづけるのが最適となり，静学に帰することになる。

〔参考文献〕

（1） Arrow, K. J., "Optimal Capital Policy with Irreversible Investment," in Value, Capital, and Growth, ed. by J. N. Wolfe, Edinburgh, Edinburgh University Press, 1968, pp. 1—20.

（2） Barro, R. J. and H. I. Grossman, "A General Cisequilibrium Mode-ofIncome and Employment," American Economic Review, 61, 1971, pp. 82—93.

（3） Bowden, R, J., "On Constrained and Unconstrained Models of the Inl vestment Accelerator," The Economic Record, 50, 1974, pp. 269—277.

（4） Brechling, F., Investment and Employment Decisions, Marchester, Manchester Uuiversity Press, 1975.

（5） Eisner, R., and Strotz, R. H, "Determinants of Business Investment" in Impacts of Monetary Policy, by D. B. Suits et all., Englewood Cliff, N. J., Prentice-Hall, 1963.

(6) Gould, J.P., "Adjustment Costs in the Theory of Investment of the Firm" *The Review of Economic Studies*, 35, 1968, pp. 47—56.

(7) Haavelmo, T., A Study in the Theory of Investment, Chicago Press, 1960.

(8) Jorgenson, D., "Capital Theory and Investment Behavior" The Vmerican Economic Riview, 53, 1963, pp. 147—259.

(9) Lucas, R. E., "Optimal Investment Policy and the Flexible Accelerator," International Economic Riview, 8, 1967, pp. 78—85.

(10) Lucas, R. E., "Adjustment Cost and the Theory of Supply," Journal of Political Economy, 72, 1976, pp. 321—334.

(11) 佐藤光「不完全競争企業の最適投資・価格政策一宇沢モデルを中心として一」『季刊 理論経済学』Vol. 28, No. 2, August 1977, pp. 97—108.

(12) Takayama, A., Mathematical Economics, Hinsdale, Illinois, The Dryden Press, 1974.

(13) Treadway, A. B., "On Rational Enterpreurial Behavior and the Demand for Investment," *The Riview of Economic Studies*, 36, 1969, pp. 227—239.

(14) Uzawa, H., "The Penrose Effect and Odlimal Growth," Economic Stndies Quarterly, XIX, 1968.

(筆者の住所：東京都三鷹市深大寺3870 細谷荘5号)