最適消費行動と租税効果の動学理論

毛 島 達 雄

I．消費者行動モデル

完全予見能力をもち，合理的に行動する代表的個人が想定され，彼の行動様式すなわち彼が直面する最適化問題は以下に説明されるようなものとする。制約条件となる資産蓄積方程式は

(1) $\dot{A}^M = rA^M + W - C$

であり，A^M＝実物資産，r＝利子率，W＝非利子所得，C＝消費とする。これらはいずれも時間tの関数とする。P＝人口，ρ＝効用割引率，$\tilde{c}$＝１人当り消費，$\tilde{a}^M$＝１人当り実物資産とし，消費者の総効用は，

(2) $V(\vec{\tilde{c}}) = \int_0^T e^{-\rho t} P(t) U[\tilde{c}(t)]dt$

すなわち生涯$0 \leqq t \leqq T$での消費による効用と，$e^{-\rho T}P(T)S[\tilde{a}^M(T)]$ すなわち臨終時点 T で残す遺産からの効用の和として規定される。矢印は期間全体に関することを強調するために付してある。この種の消費者行動は，Yaari［7］で bequest motive problem と呼ばれたものである。効用関数UとSは強凹，２階微分可能，$1-\sigma(\sigma>0)$ 同次と仮定する。更にσは限界効用の弾力性に等しいと仮定すれば，時間選好率r_cを示すRamsey—Keynesの公式は，

$$r_c(t) = \rho - (U''/U')(d\tilde{c}/dt)$$
$$= \rho + \sigma(1/\tilde{c})(d\tilde{c}/dt)$$

となる。

これまでの関係を，人口成長率πと労働増大的技術進歩率τの和である自然成長率γで割引いた変数で書き直すことにしよう。

$$a^M = A^M e^{-\gamma t},\ w = We^{-\gamma t},\ c = Ce^{-\gamma t},\ \lambda = \rho + \sigma\tau - \gamma$$

とすれば，$\dot{a}^M = e^{-\gamma t}\dot{A}^M - \gamma a^M$ だから(1)は，

(3) $\dot{a}^M = (r-\gamma)a^M + w - c$

となる。また,

$$e^{-\rho t}P(t)U[\tilde{c}(t)]=[P(0)]^{\sigma}e^{-\lambda t}U(c)$$

$$e^{-\rho T}P(T)S[\tilde{a}^M(T)]=[P(0)]^{\sigma}e^{-\lambda T}S[a^M(T)]$$

だから目的関数は,

$$\int_0^T e^{-\lambda t}U[C(t)]dt+e^{-\lambda T}S[a^M(T)]$$

と書ける。

分析を行なう上で，定義関係を更に加えもう少し変形しておくのが好都合である。$\bar{r}(t)=r(t)-\gamma$ とし(3)より,

$$\int_0^T e^{-\int_0^t \bar{r}(u)du}c(t)dt+e^{-\int_0^T \bar{r}(t)dt}a^M(T)$$

$$=a^M(0)+\int_0^T e^{-\int_0^t \bar{r}(u)du}w(t)dt$$

を得る。この式は右辺の現在価値総額が左辺で消費 $\vec{c}$ と遺産 $a^M(T)$ という2つの用途に分かれることを示している。右辺第2項を人的資産 $a^H(t)$ の初期値 $a^H(0)$ と定義し，総資産を $a(t)=a^M(t)+a^H(t)$ と定義する。特に $a^H(T)=0$ だからこれより $a(T)=a^M(T)$ となることに注意されたい。この総資産のタームで(3)を書き改めれば,

(4)　$\dot{a}=\bar{r}a-c$

となる。従ってわれわれの想定する消費者行動は,

$$\int_0^T e^{-\lambda t}U[c(t)]dt+e^{-\lambda T}S[a(T)]\longrightarrow \max$$

$$\text{s.t.}\quad \dot{a}=\bar{r}a-c$$

と定式化される。ここに $a(0)$ は所与とされ，$c(t)\geqq 0$ である。

さて，このような最適化問題に対してまず問題となるのは，最適消費計画が「存在」するか，それは「一意」に定まるか，その「性質」はどんなものかという一連の疑問であろう。このうち存在証明は多分に数理技術上の問題であり，紙数の制約からも省略することにしたい。次節で主として局所的な最適行動の性質が分析され，第Ⅲ節では1つのアグリゲーションによる分析がされることになる。

Ⅱ．最適消費行動の特性

局所的な（微分可能性に依存するという意味で）特性を見るのには，ポントリャーギンの最大値原理を適用するのが手っ取り早い。補助変数を $p(t)$ としハミルトニアンは,

$$H=U(c)+p(\bar{r}a-c)$$

と書かれ，必要条件は，

$$U'(c)=p$$
$$\dot{p}/p=\lambda-\bar{r}$$

となる。$a(0)$ は既知事項だから終期条件

$$p(T)=S'[a(T)]$$

で最適計画の叙述が完結する。

定理 1. 消費者の最適行動は，微分方程式

(a) $\dot{a}=\bar{r}a-c$

(b) $\dot{p}/p=\lambda-\bar{r}$

と条件

(c) $U'(c)=p$

(d) $p(T)=S'[a(T)]$

で表わされるものである。

消費の限界効用が(b)の右辺で示される成長率で成長し，臨終時では消費の限界効用と遺産の限界効用が相等しくなる必要があることをこの定理は述べている。

同一の内容を異なった言い方で述べることができ，経済学的意味もその方がはっきりする。(c)を(b)に代入して $d(\log U')/dt=\lambda-\bar{r}$ 従って

(1) $\bar{r}(t)=\lambda-d(\log U')/dt=r_c-\gamma$

を得る。故に定理 1 の条件(b)と(c)は $r=r_c$ すなわち利子率と時間選好率が等しいことに同値である。I (1) 式のような蓄積方程式に対して A^M を不変に保つ $\tilde{c}$ の増減比 $\Delta\dot{\tilde{c}}'/\Delta\tilde{c}$ の極限を計算し，その変化率をとればそれが利子率 r に他ならないことを知る。このような概念は普通にいう限界変換率であるから，$r=r_c$ は限界変換率＝時間選好率と読める。(1)

定理 1′. 消費者の最適行動は，予算制約

(a) $$\int_0^T e^{-\int_0^t \bar{r}(u)du}\, c(t)dt+e^{-\int_0^T \bar{r}(t)dt}\, a(T)=a(0)$$

と，限界変換率と時間選好率の相等

(b) $r=r_c$

および計画期末での限界効用条件

(c) $U'[c(T)]=S'[a(T)]$

を満たすものである。

---

(1) 時間選好率と限界変換率の正確な意味内容については，宇沢〔5〕を参照せよ。

なお，T 時点以外での限界効用条件は，定理1(b)から $p(t)$ を解き $t=T$ とし $p(0)$ を決定して，

$$(2)\qquad U'[c(t)]e^{-\int_t^T[\bar{r}(u)-\lambda]\,du}=S'[a(T)]$$

と求まる。

定理1は U と S が凹であることから実は十分でもあり，そのことを示す過程で最適計画が存在するならば一意的であることが証明される。

定理 2. 最適消費計画は一意的に定まる。また定理1の条件は十分でもある。

証明. $a'(0)=a_0$ と条件(a),(b),(c),(d)を満たす実行可能な計画を $(\overrightarrow{c^1}, \overrightarrow{a^1})$ とし，それに付随する補助変数を $p(t)$ とする。また $a^2(0)=a_0$ と(a)を満たす他の任意の実行可能な計画を $(\overrightarrow{c^2}, \overrightarrow{a^2})$ とする。このとき

$$\int_0^T e^{-\lambda t}[U(c^1)-U(c^2)]dt=\int_0^T e^{-\lambda t}[U(c^1)-U(c^2)-p(c^1-c^2)$$
$$+p(c^1-c^2)+p(\bar{r}a^1-c^{11}-\dot{a}^1)-p(\bar{r}a^2-c^2-a^2)]dt$$
$$=\int_0^T e^{-\lambda t}[U(c^1)-U(c^2)-p(c^1-c^2)+p\,\bar{r}(a^1-a^2)-p(\dot{a}^1-\dot{a}^2)]dt$$
$$>\int_0^T e^{-\lambda t}[p\,\bar{r}+\dot{p}-\lambda p)(a^1-a^2)]\,dt-\Big[e^{-\lambda t}p\,(a^1-a^2)\Big]_0^T$$

不等式への移行は U の凹性と $\int_0^T p(\dot{a}^1-\dot{a}^2)dt$ の部分積分による。条件(b)を用いれば結局，

$$\int_0^T e^{-\lambda t}[U(c^1)-U(c^2)]dt>-e^{-\lambda T}p(T)[a^1(T)-a^2(T)]$$

となる。S の凹性と条件(d)を使えば，

$$\left\{\int_0^T e^{-\lambda t}U(c^1)dt+e^{-\lambda T}S[a^1(T)]\right\}-\left\{\int_0^T e^{-\lambda t}U(c^2)dt+e^{-\lambda T}S[a^2(T)]\right\}$$
$$>-e^{-\lambda T}p(T)[a'(T)-a^2(T)]+e^{-\lambda T}S'[a^1(T)-a^2(T)]$$
$$=0$$

これが証明すべきことであった。(2)（証了）

次に t も時点の（消費）割引価格を

$$q(t)=e^{-\int_0^t\bar{r}(u)du}$$

と定義しこれを使って予算制約式を書けば，

（2） これには Cass〔2〕と大槻〔4〕を参考にした。

$$\int_0^T q(t)c(t)dt+q(T)a(T)=a(0)$$

となる。$a(0)=a_0{}^1$, $\vec{q}=\vec{q^1}$ の下で選択される計画を，条件を明記して $(\vec{c^1},\ \vec{a^1};\ a_0{}^1,\ q^1)$ と表わすことにすれば，よく知られた顕示選好の弱公理が成り立つことは明らかである。

定理 3.（顕示選好） 2つの計画 $(\vec{c^1},\ \vec{a^1};\ a_0{}^1,\ \vec{q^1})$ と $(\vec{c^2},\ \vec{a^2};\ a_0{}^2,\ \vec{q^2})$ とを考える。もしも

(a) $$\int_0^T q^1(t)c^2(t)dt+q^1(T)a^2(T)\leqq a_0{}^1$$

でかつ $(\vec{c^1},\ \vec{a^1};\ a_0{}^1,\ \vec{q^1})\neq(\vec{c^2},\ \vec{a^2};\ a_0{}^2,\ \vec{q^2})$ ならば，そのとき

(b) $$\int_0^T q^2(t)c^1(t)dt+q^2(T)a^1(T)>a_0{}^2$$

が成り立つ。

系 3. 2つの計画 $(\vec{c^1},\ \vec{a^1};\ a_0{}^1,\ \vec{q^1})$ と $(\vec{c^2},\ \vec{a^2};\ a_0{}^2,\ \vec{q^2})$ とを考え，この2つの計画が同じ大じ大きさの効用をもたらすものとする。このとき次の不等式が成り立つ。

(a) $$\int_0^T q^1(t)c^2(t)dt+q^1(T)a^2(T)\geqq a_0{}^1$$

(b) $$\int_0^T q^2(t)c^1(t)dt+q^2(T)a^1(T)\geqq a_0{}^2$$

証明. (a)ではなく

$$\int_0^T q^1(t)c^2(t)dt+q^1(T)a^2(T)<a_0{}^1$$

であるとする。そうすると予算制約の下でより多くの消費が可能になり，従って$(\vec{c^2},\ \vec{a^2})$より大きな効用が $(\vec{c^1},\ \vec{a^1})$で得られることになり仮定に反する。(b)についても同様。(証了)

Ⅲ. 1つのアグリゲーション

$0\leqq t\leqq T$ における消費からの効用積分を $V(\vec{c})$ で示す。

(1) $$V(\vec{c})=\int_0^T e^{-\lambda t}U[c(t)]dt$$

(1)を最適計画に沿って全微分し

$$dV=\int_0^T e^{-\lambda t}U'(c)dc\,dt$$

定理1から $U'(c)=p$, $\dot{p}/p=\lambda-\bar{r}$, これを使って部分積分すれば

$$dV=p_0da_0-e^{-\lambda T}p_Tda_T$$

すなわち

$$(2)\qquad \frac{\partial V}{\partial a_0}=p_0,\quad \frac{\partial V}{\partial a_T}=-e^{-\lambda T}p_T,\quad \left.\frac{\partial a_T}{\partial a_0}\right|_{\mathrm{V=const.}}=\frac{p_0}{e^{-\lambda T}p_T}$$

これらの符号は順に正，負，正である。

定理 4. a_0, a_T, Vを関連づける変換曲面は（a_0, a_T, V）空間で凸である。

証明，効率的な2つの計画の凸結合が実行可能であることがいえればよい。2つの効率的な計画を（$\overrightarrow{c}$, $\overrightarrow{a^1}$），（$\overrightarrow{c^2}$, $\overrightarrow{a^2}$）とする。そして対応するVを各々V^1, V^2とする。次のような2つの計画の凸結合で定義される計画（$\overrightarrow{c^\alpha}$, $\overrightarrow{a^\alpha}$）を考える。ただし$0\leqq\alpha\leqq 1$, $0\leqq t\leqq T$とする。

$$c^\alpha(t)=\alpha c^1(t)+(1-\alpha)c^2(t)$$

$$a^\alpha(t)=\alpha a^1(t)+(1-\alpha)a^2(t)$$

このような計画が実行可能，すなわち予算制約式を満たすことは容易に確かめられる。

$$\begin{aligned}\dot{a}^\alpha(t)&=\alpha\dot{a}^1(t)+(1-\alpha)\dot{a}^2(t)\\&=\alpha[\bar{r}a^1(t)-c^1(t)]+(1-\alpha)[\bar{r}a^2(t)-c^2(t)]\\&=\bar{r}[\alpha a(t)+(1-\alpha)a^2(t)]-[\alpha c^1(t)+(1-\alpha)c^2(t)]\\&=\bar{r}a^\alpha(t)-c^\alpha(t)\end{aligned}$$

次に計画（$\overrightarrow{c^\alpha}$, $\overrightarrow{a^\alpha}$）は$U$が凹だから実際の所$\alpha V^1+(1-\alpha)V^2$よりも大きな効用をもたらすことを見る。

$$\begin{aligned}V(\bar{c^\alpha})&=\int_0^T e^{-\lambda t}\,U[c^\alpha(t)]\,dt=\int_0^T e^{-\lambda t}U[\alpha c^1(t)+(1-\alpha)c^2(t)]dt\\&>\alpha\int_0^T e^{-\lambda t}U[c'(t)]dt+(1-\alpha)\int_0^T e^{-\lambda t}\,U[c^2(t)]dt\\&=\alpha V^1+(1-\alpha)V^2.\ (\text{証了})\end{aligned}$$

系 4. 任意の$a(0)=a_0$に対してVとa_Tを関連づける変換曲線は（V, a_T）平面で凸である。

証明．集合$X=\{(a_0,\ a_T,\ V):a(0)=a_0,\ a(T)=a_T,\ V(\bar{r}a-\dot{a})$が実行可能$\}$は前定理より凸集合。2点（$a_0$, $a_T{}^1$, V^1），（a_0, $a_T{}^2$, V^2）ϵXを考えれば，$0\leqq\alpha\leqq 1$に対して

$$(a_0,\ \alpha a_T{}^1+(1-\alpha)a_T{}^2,\ \alpha V^1+(1-\alpha)V^2)\epsilon X$$

従って，集合$Y=\{(a_T,\ V):$固定したa_0に対して$(a_0,\ a_T,\ V)\epsilon X\}$もまた凸集合である。（証了）

更に消費者は準凹一すなわち限界代替率逓減を示す一総効用関数$W(a_T,\ V)$をもつとする。このW関数は勿論

$$W(a_T, V)=\int_0^T e^{-\lambda t}U(c)dt+e^{-\lambda T}S[a(T)]$$

で定義される。最適条件は通常のように，限界変換率と限界代替率の相等であり

$$\frac{\partial V}{\partial a_T}=\left.\frac{dV}{da_T}\right|_{\mathrm{w=const.}}$$

これは定理1の条件(d)に他ならない。V には定理1の条件 (a), (b), (c) を満たす消費径路が伴っているので，これによりわれわれは消費 $\vec{c}$ の選択を V の選択に 変換する一種 の アグリゲーションを行なったことになる。

各時点での消費 $c(t)$ は経済学的には t が異なれば別の財とみなすべきであり，そのような多数財の選択問題を，1「財」V にアグリゲートしたことは，V と a_T について代替効果と所得効果を2次元の図で説明できるかどうかという重要な問題を必然的に伴うものである。成長率 γ でデフレートした 総資産 の初期値 $a(0)$ は， 生涯の非利子所得の現在価と実物資産の初期保有量 $a^M(0)$ の合計として定義され， それはいわば 生涯資産 (lifetime wealth) と呼べるような内容のものであった。われわれのモデルにふさわしい所得効果の定義は従って次のようなものとなるだろう。

定義．生涯資産 $a(0)$ の変化が消費者の最適計画 $\vec{c}$, V, a_T に与える効果を， 所得効果という。

最適計画 $(\vec{c}, a_T)$ を a_0 の関数とみて，定理1′(a)の予算制約式を a_0 で偏微分し

$$\int_0^T e^{-\int_0^t \bar{r}(u)\,du}\frac{\partial c}{\partial a_0}\,dt+e^{-\int_0^T \bar{r}(t)\,dt}\frac{\partial a_T}{\partial a_0}=1$$

を得る。達成可能な最大総効用を a_0 の関数とみて，a_0 で微分し

$$W'(a_0)=\int_0^T e^{-\lambda t}U'(c)\frac{\partial c}{\partial a_0}dt+e^{-\lambda T}S'(a_T)\frac{\partial a_T}{\partial a_0}$$

$$=\frac{\partial V}{\partial a_0}+e^{-\lambda T}S'(a_T)\frac{\partial a_T}{\partial a_0}$$

II(2)式をこれに代入し(3)を用いれば

(4) $$W'(a_0)=e^{\int_0^T[\bar{r}-\lambda]dt}\ S'(a_T)=e^{\int_0^t[\bar{r}(u)-\lambda]du}\ U'[c(t)]$$

これより a_0 の変化が 総効用に与える効果は常に正である。 先の式をもう1度微分し単純化すれば，

$$W''(a_0)=\int_0^T e^{-\lambda t}U''[c(t)]\left(\frac{\partial c}{\partial a_0}\right)^2 dt+e^{-\lambda T}S''(a_T)\left(\frac{\partial a_T}{\partial a_0}\right)^2$$

を得るがこれは常に負である。(4) を a^0 で微分し $W''(a_0)<0$ を使えば $(\partial a_T/\partial a_0)>0$, 従

って(4)の右の方から $\partial c/\partial a_0>0$ がわかり，それ故 $\partial V/\partial a_0$ もまた正である。

定理 5. 所得効果はすべて正である。すなわち，

$$\partial c(t)/\partial a_0>0$$

$$\partial a_T/\partial a_0>0$$

$$\partial V/\partial a_0>0$$

代替効果については，利子率変化による効果と考えることにする。所得効果の場合には，定理5より，横軸に a_T，縦軸に V を取った2次元の図で，凸の変換曲線が右上方に拡大し最適点の右上方への移動として表わせる。けれども代替効果についてはこのように単純にはいかない。V の価格がうまく定義できなければならず，2次元の図示には効用関数が1次同次であることを必要とする。(3) われわれは教育的には有用であることを認めるが，そのような強い仮定を要請する分析は放棄し，限界効用逓減の仮定を保持しつつ計算によってどれだけのことがいえるかを次に調べよう。

代替効果を次のように定義する。

定義. 利子率の変化が消費者の最適行動に与える効果で，たとえ生涯資産 $a(0)$ の変化がなくとも生ずる効果を代替効果という。

これを調べるためには効用関数についてはっきりした情報をもたねばならない。限界効用が一定の弾力性 σ のをもつという仮定を思い出そう。これより一般性を失うことなく

$$U'(c)=c^{-\sigma}$$

$$S'(a_T)=a_T{}^{-\sigma}$$

とすることができる。そして最適消費計画は

$$\dot{c}/c=[\bar{r}(t)-\lambda]/\sigma$$

を満たすものである。$\alpha(t)=[r(t)-\lambda]/\sigma$ とする。上式を積分し

$$c(t)=c(0)e^{\int_0^t \alpha(u)du} \tag{5}$$

特に $c(T)=c(0)e^{\int_0^T \alpha(t)dt}$ であり，定理 $1'(c)$ から $c(T)$ を知る。従って，

$$c(0)=a(T)e^{-\int_0^T \alpha(t)dt} \tag{6}$$

(6)を(5)に代入しそれを定理 $1'$(a) の予算制約式に代入すれば，

---

(3) Liviatan〔8〕および Green〔9〕の第4章を参照せよ。

$$(7)\qquad a(T)\left[\int_0^T e^{-\int_0^t \bar{r}(u)\,du}\; e^{-\int_t^T \alpha(u)du}\, dt + e^{-\int_0^T \bar{r}(t)\,dt}\right] = a(0)$$

を得る。[　] の中は正だから $a(0)$ と $a(T)$ は正の相関関係にあり，その係数は利子率の系列 $\vec{r}$ に依存している。また，$a(0)$ 自体もその定義からやはり $\vec{r}$ に依存しているが，その構成要素のうち利子率と無関係な $a^M(0)$ が下落したのであれば，明らかに遺産の水準もまた下落する。もしもすべての $0 \leqq t \leqq T$ に対して常に $\alpha(t) \geqq 0$ すなわち $\bar{r}(t) \geqq \lambda$ であれば，任意の時点における利子率の上昇（連続性より実際はその近傍でも上昇）は，(7) の [　] を減少させ $a(0)$ もまた $a^H(0)$ の減少によって減少するから，$a(T)$ も明らかに減少する。逆の場合は逆である。

次に利子率変化が消費に与える効果を見てみる。$a(0)$ に変化がなくても利子率の上昇は $a(T)$ 従って $c(T)$ を減少させるから(6)より $c(0)$ を減少させることがわかる。任意の時点の利子率上昇は $a(0)$ の変化がなくても，すべての時点の消費を減少させる。このことによって，通常のように利子率の上昇は消費を抑制し貯蓄を増加させるとは簡単に言えないことがわかった。しかしこのような帰結がすべての $0 \leqq t \leqq T$ について $\bar{r}(t) \geqq \lambda$ が成立するという仮定に強く依存していることは記憶しておかねばならない。

定理 6. 限界効用の弾力性が σ で一定であり，かつすべての $0 \leqq t \leqq T$ で $r \geqq \lambda + \gamma$ とする。このときには任意の時点の利子率上昇は，仮に $a(0)$ が不変としても，すべての時点の消費 $c(t)$, 遺産 $a(T)$, V を減少させることになる。利子率が下落する場合には逆の結果になる。

Ⅳ. 租税を含む会計的関係

Ⅰ(1)式の蓄積方程式は，各種の租税が導入されるとどのように修正されるであろうか。まず所得の支出形態の如何による租税の２つの種類，すなわち消費税と貯蓄税とを考える。x_c と x_s で各々の税率を表示する。x_c により消費支出は $c/(1-x_c)$ となる。次に効率労働者１人当り税 (head tax) を考える。その税額を x_h とすれば，経済全体での税額は，$P(t)\,e^{\tau t} x_h = P(0) e^{rt} x_h$ となる。人口の単位を $P(0)=1$ にとれば単に $e^{rt} x_h$ である。

これら３つの税によりⅠ(1)式は

$$\dot{A}^M = (1-x_s)\{rA^M + W - [C/(1-x_c)] - e^{rt} x_h\}$$

と修正される。表記を簡単化するために，租税パラメーター

$$z_s = 1-x_s,\quad z_c = 1-x_c,\quad v = z_s/z_c$$

を導入する。これを使えば上式は

$$\dot{A}^M = z_s r A^M + z_s W - vC - e^{rt} z_s x_h$$

となる。

一般性を得るために更に所得源泉の如何による２つの租税，つまり賃金と利子に課される税をも考慮しよう。x_w, x_r で各々の税率を表わし，前と同様

$$z_w = 1 - x_w,\quad z_r = 1 - x_r$$

とする。この２税によりⅠ(1)式は

$$\dot{A}^M = z_r r A^M + z_w W - C$$

となる。

最後に５つの税を同時に考え，$z_{ab} = z_a z_b$, a と b は c, s, w, r のどれでもよいとすれば，蓄積方程式は

(1)　$$\dot{A}^M = z_{sr} r A^M + Z_{sw} W - vC - e^{rt} z_s x_h$$

となる。政府支出と公債を考えない場合には，実物資産 A^M と民間資本ストック K は等しく，

(2)　$$\dot{K} = z_{sr} K + z_{sw} W - vC - e^{rt} z_s x_h$$

となる。

Ⅴ．租税の動学的効果

ここでも各変数を e^{rt} でデフレートするのが便利であり $k = Ke^{-rt}$ とすればⅣ(2)式は

$$\dot{k} = (z_{sr} r - \gamma) k + z_{sw} w - vc - z_s x_h$$

となる。完全競争の下では生産関数を $f(k)$ とし，$r = f'(k)$, $w = f(k) - rk$（１次同次を仮定）だから

(1)　$$\dot{k} = z_{sw} f(k) - [(z_{sw} - z_{sr}) f'(k) + \gamma] k - vc - z_s x_h$$

初期時点での均衡 $a(0) = k(0)$ を仮定すれば，すべての時点で $a(t)$, 特に $a(T) = k(T)$ であることに注意せよ。消費者の最適化条件で時間選好率と等しくなる利子率は今の場合 $z_{sr} r$ であり，限界効用の弾力性が σ であれば $r_c = z_{sr} r$ は

(2)　$$\dot{c}/c = [z_{sr} f'(k) - \lambda - \gamma] / \sigma$$

と同値である。

各種の税率に関する導関数を一般的に表現するのに，ダミー変数 ζ を導入し

$$x_s = \theta_s \zeta,\quad x_c = \theta_c \zeta,\quad x_w = \theta_w \zeta,\quad x_r = \theta_r \zeta,\quad x_h = \theta_h \zeta$$

とする。(1)と(2)を ζ で微分し，得られた式を x_s, x_c, x_w, x_r, x_h がゼロつまり z については１の所で評価する。そして租税がない時にはその時の競争的成長均衡 c^*, k^* に経済があるものと想定する。c^* とk^* は

(3) $\quad c^* = f(k^*) - \gamma k^*, \; f'(k^*) = \rho + \sigma\tau$

で特徴づけられる定常状態である。

(4)
$$\begin{pmatrix} \dot{c}_\zeta \\ \dot{k}_\zeta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & f''(k^*)c^*/\sigma \\ -1 & \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_\zeta \\ k_\zeta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -(\theta_s+\theta_r)(\lambda+\gamma)c^*/\sigma \\ -(\theta_s+\theta_r)\gamma k^* - (\theta_w+\theta_c)c^* - (\theta_r-\theta_w)\lambda k^* - \theta_h \end{pmatrix}$$

これを固有値展開するのであるが，このままでは非常に煩わしいので次の補題を利用する。(4)

補題. $\dot{x}(t) = Ax(t) + b$

を考え

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a^{22} \end{pmatrix}, \quad a_{12}a_{21} > 0$$

$$a_{22} > 0, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad \dot{\boldsymbol{x}}(T) = 0$$

とする。A の固有値を β_1, β_2 とし，$\boldsymbol{m} = -A^{-1}b$, $\boldsymbol{M} = x_2(0) - \boldsymbol{m}_2$ とすれば

$$\boldsymbol{x}(t) = Me^{\beta_2 t} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 1 \end{pmatrix} + \boldsymbol{m}$$

とできる。

証明. 同次形 $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x}$ について考える。β_1, β_2 は異符号であるから $\beta_1 > 0$, $\beta_2 < 0$ とする。対応する固有ベクトルは第2要素を1に標準化し (β_2, $1)'$ であることも直ちに計算される。従って β_1, β_2 を定数とし

$$\boldsymbol{x}(t) = \begin{pmatrix} \beta_2 & \beta_1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & e^{\beta_1 t} \\ \beta_2 & e^{\beta_2 t} \end{pmatrix}$$

と解ける。β_1, β_2 は初期値に依存し

$$\beta_1 = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1}[x_1(0) - \beta_1 x_2(0)], \qquad \beta_2 = \frac{1}{\beta_2 - \beta_1}[-x_1(0) + \beta_2 x_2(0)]$$

$\dot{\boldsymbol{x}}(T) = 0$ より $\beta_1 = 0$ でなければならず，従って $\beta_2 = 1$ であり $x_1(0) = \beta_1 x_2(0)$, 故に

$$\boldsymbol{x}(t) = x_2(0)e^{\beta_2 t} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(4) 以下の分析手法は Hall〔6〕に負う所が大きい。

次に非同次形 $\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{x}+\boldsymbol{b}$ について考える。y を $y=\boldsymbol{x}+A^{-1}\boldsymbol{b}$ のように定義する。これより $\dot{\boldsymbol{y}}=\dot{\boldsymbol{x}}=A\boldsymbol{y}$, 先の結果からだから $y_1(0)=y_2(0)\beta_1$, $\boldsymbol{m}=-A^{-1}\boldsymbol{b}$ だから $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{y}-a^{-1}\boldsymbol{b}=y+\boldsymbol{m}$, 故に

$$x=y_2\,(0)\,e^{\beta_2 t}\begin{pmatrix}\beta_1\\ 1\end{pmatrix}+m$$

そして $y_2(0)=x_2(0)-\boldsymbol{m}_2$ である。(証了)

この補題をわれわれの問題に当はめると

$$A=\begin{pmatrix}0 & f''(k^*)c^*/\sigma\\ -1 & \lambda\end{pmatrix}$$

$$\beta_1=\frac{\lambda+\sqrt{\lambda^2+4f''(k^*)c^*/\sigma}}{2}\ ,\quad \beta_2=\frac{\lambda-\sqrt{\lambda^2+4f''(k^*)c^*/\sigma}}{2}$$

$$\boldsymbol{x}(t)=\begin{pmatrix}c_\zeta(t)\\ k_\zeta(t)\end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}-(\theta_s+\theta_r)(\lambda+\gamma)c^*/\sigma\\ -(\theta_s+\theta_r)\gamma k^*-(\theta_w+\theta_c)c^*-(\theta_r-\theta_w)\lambda k^*-\theta_h\end{pmatrix}$$

$$M=k_\zeta(0)-m_2$$

$$m_1=\lambda(\theta_s+\theta_r)\frac{f'(k^*)}{f''(k^*)}-(\theta_s+\theta_r)\gamma k^*-(\theta_w+\theta_c)c^*-(\theta_r-\theta_w)\lambda k^*-\theta_h$$

$$m_2=(\theta_s+\theta_r)\,\frac{f'(k^*)}{f''(k^*)}$$

われわれは考えている期間が十分長いものとして，θ を税率と見なすことにより線型近似とし各種の租税の効果を調べる。

租税政策の変化は初期消費のジャンプをもたらすかも知れない。J_c でその大きさを示し，L_c, L_k で各々定常状態からの長期的乖離を表わすことにする。これまでの分析から租税政策の変化により攪乱された経済の従う径路は

(5)　$c(t)=c^*+L_c+(J_c-L_c)e^{\beta_2 t}$

(6)　$k(t)=k^*+L_k-L_k e^{\beta_2 t}$

で表わされる。長期的効果は以前のバクトル $\boldsymbol{m}$ で示され

(7)　$L_c=-\lambda(\theta_s+\theta_r)k^*-(\theta_s-\theta_r)\gamma k^*-(\theta_w-\theta_c)c^*-(\theta_r-\theta_w)\lambda k^*-\theta_h$

(8)　$L_k=-(\theta_s+\theta_r)k^*/Ek^*$

(7), (8)式中の Ek^* は k^* での資本の限界生産力の弾力性である。

$$Ek^* = -k^* \frac{f''(k^*)}{f'(k^*)}$$

J_c は $C_\zeta(0)$ であり(4)に $C_\zeta(0)=\beta_2(J_c-L_c)$, $\dot{k}_\zeta(0)=0$ を代入することによって求められる。

(9) $$J_c=-\beta_2(\theta_s+\theta_r)k^*/Ek^*-(\theta_s+\theta_r)\gamma k^*-(\theta_w+\theta_c)c^*-(\theta_r-\theta_w)\lambda k^*-\theta_h$$

関連する租税の θ のみを残し，それ以外の θ をゼロとすることによって各種の租税のもつ長期的効果と，経済の径路を見ることができる。

人頭税の効果

$$L_c=-\theta_h,\quad L_k=0,\quad J_c=-\theta_h$$

$$c(t)=c^*-\theta_h,\quad k(t)=k^*$$

消費は初期に税額だけ減少し，以後は前の定常状態より税額だけ少ないこの水準を維持する。資本には何の影響ももたない。

消費税の効果

$$L_c=-\theta_c c^*,\quad J_c=-\theta_c c^*,\quad L_k=0$$

$$c(t)=c^*-\theta_c c^*,\quad k(t)=k^*$$

消費税は消費に対して，初期水準を税率倍しただけ引き下げる効果をもつ。以後はこの水準を維持する。資本には何の効果ももたない。

利子税の効果

$$L_c=-\lambda\theta_r k^*/Ek^*-\theta_r(\lambda+\gamma)k^*$$

$$J_c=-\beta_2\theta_r k^*/Ek^*-\theta_r(\lambda+\gamma)k^*$$

$$L_k=-\theta_r k^*/Ek^*$$

$$c(t)=c^*-\lambda\theta_r k^*/Ek^*-\theta_r(\lambda+\gamma)k^*+[(\lambda-\beta_2)\theta_r k^*/Ek^*]e^{\beta_2 t}$$

$$k(t)=k^*-\theta_r k^*/Ek^*+(\theta_r k/Ek^*)e^{\beta_2 t}$$

消費はジャンプして（？）減少した後，その水準から指数的に減少して L_c の水準に自る。資本は初期の定常状態から指数的に減少して L_k の水準に至る。

貯蓄税の効果

$$L_c=-\lambda\theta_s k^*/Ek^*-\theta_s\gamma k^*$$

$$J_c=-\beta_2\theta_2 k^*/Ek^*-\theta_s\gamma k^*$$

$$L_k=-\theta_s k^*/Ek^*$$

$$c(t)=c^*-\lambda\theta_s k^*/Ek^*-\theta_s\gamma k^*+[(\lambda-\beta_2)\theta_s k^*/Ek^*]e^{\beta_2 t}$$

$$k(t)=k^*-\theta_s k^*/Ek^*+(\theta_s k^*/Ek^*)e^{\beta_2 t}$$

貯蓄税の効果は利子税の効果と非常によく似ている。しかし $\theta_r=\theta_s$ で税率が同じ時,

資本に対する効果は同じであるが，消費水準は利子税の方が大きく低下する。

賃金税の効果

$$L_c=-\theta_w(c^*-\lambda k^*),\quad J_c=-\theta_w(c^*-\lambda k^*)$$

$$L_k=0$$

$$c(t)=c^*-\theta_w(c^*-\lambda k^*),\quad k(t)=k^*$$

$c^*-\lambda k^*=f(k^*)-f''(k^*)k^*>0$ だから L_c, J_c は負である。消費水準は初期に前の定常状態から J_c だけ低下し，その後その低下した水準を維持する。資本に対しては何の効果ももたない。

参　考　文　献

〔1〕 Arrow, K. J., and Kurz, M., *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*; Johns Hopkins Press (1970).

〔2〕 Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregative Model of Capital Accumulation : A Turnpike Theorem", *Econometrica*, (vol. 34, 1966).

〔3〕 Goldman, S. M., "Optimal Growth and Continual Planning Revision", *Review of Economic Studies*, (vol. 35, 1968).

〔4〕 大槻芳孝,「一部門成長モデルにおける最適成長」, 東北大学『研究年報経済学』(vol. 31, No. 1, 1969)。

〔5〕 宇沢弘文,「再適経済成長理論の再検討 :解説」,『季刊理論経済学』, (August, 1969)。

〔6〕 Hall, R. F., "The Dynamic Effects of Fiscal Policy", *Review of Economic Studies*, (vol. 38, 1971).

〔7〕 Yaari, M. E., "On the Consumer's ife time Allocation Process.", *International Economic Review*, (vol. 5, 1964).

〔8〕 Liviatan, N. "Multiperiod Future Consumption as an Aggregate", *American Economic Review*, (September, 1966).

〔9〕 Green, J., *Aggregation in Economic Analysis*; Princeton U. P., 1964.

(筆者の住所：府中市北山町1－4－13　大橋方)