

サービス部門を含む最適成長モデル*

松 本 光 造

序

アダム・スミスが物的な財の生産とサービスの生産とを区別して人間労働を「生産的労働」と「不生産的労働」とに分類したことはよく知られているが、「財およびサービス」とまとめて言及されることからわかるように今日すくなくとも経済理論の分野においては財とサービスを明瞭に区別しないのが通例であろう。財もサービスも生産要素を用いて生産され消費者に効用を与えるかぎりにおいてなんらかわりがないからである。

しかしながら、経済成長過程を考察する場合このように財とサービスの同質性を強調することは決して無難なことではありえない。有形な物としての財は通常蓄積することが可能であるのに対し、サービスはその無形性から本来的に蓄積が不可能である。それゆえ、サービスの消費は必然的にサービスの生産を伴わなければならぬ。ここに、資本蓄積をはらむ経済成長過程において財とサービスを区別して考えることの必要性が存在する。

当該論文における我々の目的は、キャス流の最適成長理論のなかでサービスの生産（＝消費）を明示的に取扱うことである。⁽¹⁾

サービスは生産要素のうちには含めないで最終消費財として、すなわちサービスが消費者ないし社会の効用を高めうるかぎりにおいて考察される。

1 モデル

我々の経済は2つの部門、実物的な財を生産する財（生産）部門とサービス

* 以下は筆者の修士論文『成長理論の拡充』の一部を書きなおしたものである。

(1) 例えばキャス[3]。

の生産に従事するサービス（生産）部門とからなっている。

財部門においては消費することもできるし消費しないで将来消費を増大させるための資本蓄積にまわすことも可能なただ1種類の財が生産されているものとし、財部門の生産関数を

$$(1) \quad G(t) = f[K(t), L_g(t)]$$

であらわす。 $G(t)$ は (t 時点における) 財の生産量, $K(t)$ は財部門で使用される資本量, $L_g(t)$ は財部門の労働者数とする。後述するようにサービス部門においては資本は使用されないから、経済全体の資本についての完全利用をつねに仮定すれば財部門の資本量 $K(t)$ は経済全体の資本量にはかならない。

各生産要素の限界生産力はプラスである。

サービス部門においては資本はまったく使用されずサービスの生産は労働投入のみによって行なわれるものと仮定しよう。もちろん、現実にはサービス部門においても資本が使用せられるであろうが、財の生産とサービスの生産とにおける端的な相異が生産過程において労働が如何なる働きをなしているかに存することを考えれば上の仮定も第一次接近として許容されうるのであろう。すなわち、財の生産においては労働はあくまで最終生産物としての財を生産するために必要な生産要素であるのに対し、サービス生産においては労働はいわばそれ自体が最終生産物的な役割を果すと考えられるのである。⁽²⁾

労働1単位当りのサービス生産量は不変として固定的な生産係数を前提すれば、サービス部門の生産関数は

$$(2) \quad S(t) = L_s(t)$$

とかくことができる。 $S(t)$ はサービス生産量, $L_s(t)$ はサービス部門の労働に従事する労働者数を示す。生産係数が生産関数に明示的にあらわれていないのは、固定係数が1となるようにサービスを計測する単位を選んでいるからである。

二重の意味で労働の質がすべて一様であると仮定する。第1に、財部門の労働者間にもサービス部門の労働者間にも質の相異は存在しない。さらに、サー

(2) このような見方に関してはボウモル[2]を見よ。

ビス部門で働いていた労働者が突然財部門へ移っても、財部門で働いていた労働者が突然サービス部門へ移っても、旧来からその部門で働いていた労働者とその能率においてなんら変わらない。

経済全体の労働者数を $L(t)$ であらわせば、各時点において両部門で労働に従事している労働者の和は経済全体の労働者数をこえることはできないから、

$$(3) \quad L_g(t) + L_s(t) \leq L(t)$$

が成立する。

経済の全員すべてが労働に参加するとし、人口数と労働者数が一致しているものとしよう。人口の成長率 n は外生的に与えられる与件であるとすれば、したがって

$$(4) \quad L(t) = L_0 e^{nt}$$

ここに L_0 はプラスの定数である。

サービス部門の生産物であるサービスが生産されると同時に消費され尽すのに対して、財部門の生産物は消費に向けられる部分と消費されないで資本蓄積に向けられる部分とに分けられる。減価償却を無視し資本の耐用年限は無限大であると仮定すれば、消費されないで投資され資本蓄積に向けられる部分はそのまま資本に対する純付加分になるから、

$$(5) \quad \dot{K}(t) = f[K(t), L_g(t)] - C(t)$$

なる関係がある。 $C(t)$ は経済全体の財に対する消費量、 $K(t)$ の上の・(ドット) は時間 t に関する微分をあらわすがこの記法は後に他の時間変数に対しても応用される。

我々の目的は、各時点時点において財の配分および労働の各部門への配置を完全に統御しうる中央経済計画当局を考え、一定の選択基準のもとで最適な各時点時点における財およびサービスの消費量ならびに両部門への労働配置を求めることである。我々は、中央当局がある期間にわたる社会的効用を最大にするという選択基準に基づいて計画を決定すると考えよう。社会の代表的個人の効用関数を U とすれば、それに社会の人口数をかけ合せた

$$L(t)U\left[\frac{C(t)}{L(t)}, \frac{S(t)}{L(t)}\right]$$

をもって社会の効用と考えることができる。すなわち、個々人の効用の総和をもって社会の効用と考えよう。さて、中央当局は特定の時点の効用を最大にするのではなく、現在を 0 時点として 0 時点から無限先の将来にわたる効用を斟酌するものとし、

$$(6) \int_0^{\infty} e^{-at} L(t) U \left[\frac{C(t)}{L(t)}, \frac{S(t)}{L(t)} \right] dt$$

をもって中央当局の目的関数とする。 a は、当局がすでになんらかの判断のもとで決定した一定な時間選好率、いわゆる社会的時間選好率である。

代表的個人の効用が、したがってまた社会の効用が、物的な財に対する消費のみでなくサービスに対する消費にも依存していることに注意しておこう。この点にキャッシュ流のモデルと我々のモデルとの一番の相異がある。財およびサービスの消費がそれぞれの社会全体の消費量 $C(t)$, $S(t)$ を $L(t)$ でわって 1 人当りの消費量となっているのは、効用関数が(代表的)個人の効用関数であることから必然的操作である。サービスの消費量がサービスの生産量 $S(t)$ を用いてあらわされているのは、すでにしばしば言及してきた、生産されると同時に消費され生産されるだけ消費されるというサービスの特質によっているのである。

以上は要するに、各時点時点における物的な財およびサービスの消費量ならびに財部門・サービス部門への労働の配分いかんによってさまざまな経済の成長径路が考えられるが、そのうちから中央当局は各時点における個々人の効用の総和をその時点の社会全体の効用とみなしてその割引現在価値を 0 時点から無限先の将来時点にまでわたって足し合せたものを最大にするように財およびサービスの消費量ならびに両部門への労働配置を決定していくことにほかならない。

代表的個人の財およびサービスの消費の限界効用はプラスと仮定する。

(1)―(6) 式の各変数を人口数 $L(t)$ でわって 1 人当り変数に変換し、

$$g(t) = \frac{G(t)}{L(t)} = 1 \text{ 人当り財の生産量}$$

$$s(t) = \frac{S(t)}{L(t)} = 1 \text{ 人当りサービスの生産量}$$

$$k(t) = \frac{K(t)}{L(t)} = 1 \text{ 人当り資本量}$$

$$c(t) = \frac{C(t)}{L(t)} = 1 \text{ 人当り財の消費量}$$

$$l_g(t) = \frac{L_g(t)}{L(t)} = \text{財部門に向けられる労働者の割合}$$

$$l_s(t) = \frac{L_s(t)}{L(t)} = \text{サービス部門に向けられる労働者の割合}$$

と定義すれば、(1)―(6)式群の体系は

$$(7) \quad g(t) = f[k(t), l_g(t)]$$

$$(8) \quad s(t) = l_s(t)$$

$$(9) \quad l_s(t) + l_g(t) \leq 1$$

$$(10) \quad \dot{k}(t) = f[k(t), l_g(t)] - c(t) - nk(t)$$

$$(11) \quad L_0 \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U[c(t), s(t)] dt$$

に縮約される。ただしこのとき、すぐあとで「**仮定 1**」として示される生産関数 f の 1 次同次性を先取的に用いている。

「**仮定 1**」 生産関数 f は強い意味で凹で 1 次同次、かつ 2 階連続偏微分可能である。

「**仮定 2**」 任意の $l_g(t)$ に対して、

$$\lim_{k(t) \rightarrow 0} \frac{\partial f[k(t), l_g(t)]}{\partial k(t)} = +\infty$$

$$\lim_{k(t) \rightarrow \infty} \frac{\partial f[k(t), l_g(t)]}{\partial k(t)} = 0$$

が成立する。

「**仮定 3**」 効用関数 U は強い意味で凹で、かつ 2 階連続偏微分可能である。

「**仮定 4**」 任意の有限なる $s(t)$ に対して、

$$\lim_{c(t) \rightarrow 0} \frac{\partial U[c(t), s(t)]}{\partial c(t)} = \infty$$

$$\lim_{c(t) \rightarrow \infty} \frac{\partial U[c(t), s(t)]}{\partial s(t)} = 0$$

が成立する。

生産関数 f および効用関数 U が強い意味で凹であることは、収穫逨減法則・限界効用逨減法則が厳密に成立していることにほかならない。[仮定 4] の前者は、物的な財の消費が個人にとっても社会にとっても必要不可欠であることの数学的表現と考えられる。

中央当局は各時点において社会全体の財およびサービスの消費量・両部門への労働の配置を完全に統御できるから、このことは各時点時点において人口数ないし労働者数が当局にとって既知であることを考えれば総労働人口のうち各部門へ配置せられる労働者の割合を当局が完全に統御しうることを意味する。したがって我々の問題は、(8)式を(11)式に代入し(11)式において L_0 が定数であることを考慮すれば、

$$(10) \quad \dot{k}(t) = f[k(t), l_g(t)] - c(t) - nk(t)$$

$$(9) \quad l_g(t) + l_s(t) \leq 1$$

のもとで、中央当局が $c(t)$, $l_g(t)$, $l_s(t)$ を統御することによって

$$(12) \quad \int_0^{\infty} e^{-\delta t} U[c(t), l_s(t)] dt$$

を最大にすることに帰着する。しかも生産関数 f ・効用関数 U はともに強い意味で増加関数であるから、(9)式は実際には等号で成立する。

かかる問題には、ポントリヤギン等による最大値原理を応用することができる。⁽³⁾ 目的関数が(12)式、状態変数が $k(t)$ 、政策変数が $c(t)$, $l_g(t)$, $l_s(t)$ である。ただし、3つの政策変数のうち $l_g(t)$, $l_s(t)$ の間には(9)式で示される関係があるために2つは相互に独立ではないことに注意しなければならない。

2 解 法

- (3) 最大値原理については[4], [5], [6]を見よ。[1]の第2章も手軽である。

ハミルトニアンは制約条件を付けて、

$$H = U[c(t), l_s(t)] + p\{f[k(t), l_g(t)] - c(t) - nk(t)\} \\ + a\{1 - l_g(t) - l_s(t)\}$$

であらわされる。 q は周知のラグランジュの未定定数法における未定定数に対応しており、このように制約条件の項を通常のハミルトニアンに付加することによって実際には相互に独立でない政策変数 $l_g(t)$, $l_s(t)$ をあたかも独立な変数であるかのごとく取扱うことが可能になる。 p は最大値原理における補助変数であるが、経済学的には効用表示の投資 1 単位当りの影の価格ないし帰属価値をあらわしていると解釈できる。したがって、最大値原理にもとづいてハミルトニアンを政策変数に関して極大にする操作は、国民総生産（減価償却を無視しているから国民純生産に等しいが）を効用表示した

$$U[c(t), l_s(t)] + p\dot{k}(t)$$

を極大にすることにほかならない。

〔仮定 1・3・4〕を考慮しながらハミルトニアンを $c(t)$, $l_g(t)$, $l_s(t)$ に関して極大にすると、

$$U_c \leq p \quad \text{等号は } c < f(k, l_g) \text{ なる} \\ \text{ときにかぎる}$$

$$pf_g = q$$

$$U_s = q$$

⁽⁴⁾が導かれる。ここで、

$$U_c = \frac{\partial U}{\partial c} \quad U_s = \frac{\partial U}{\partial l_s} \quad f_g = \frac{\partial f}{\partial l_g}$$

である。

第 2, 第 3 式から q を消去すれば

$$pf_g = U_s.$$

前節の(9)式が等号で成立していることに注意すれば、以下の 2 つの場合に同じそれぞれ 3 つの等式が得られた。

(4) l_g, l_s はともに 0 になることはないとしておこう。

(I) $c < f(k, l_g)$ の場合

$$(1) \quad U_c(c, l_s) = p$$

$$(2) \quad p f_g(k, l_g) = U_s(c, l_s)$$

$$(3) \quad l_g + l_s = 1$$

(II) $c = f(k, l_g)$ の場合

$$(1) \quad c = f(k, l_g)$$

$$(2) \quad p f_g(k, l_g) = (U_s(c, l_s))$$

$$(3) \quad l_g + l_s = 1$$

したがって、もしある時点 t を考え $k(t), p(t)$ が与えられたとするならば、(I), (II) それぞれの場合に応じて各 3 つの式から時点 t における政策変数 $c(t), l_g(t), l_s(t)$ を決定することができる。このようにして決まる解を、

$$c = c(k, p) \quad l_g = l_g(k, p) \quad l_s = l_s(k, p)$$

とかくことにすれば、これが各時点における財の消費量と労働の両部門への配置を決めるのである。関数 f と U の凹性からこれらは k および p の値に対して一意的に決まることがただちにわかるが、この点は後にゲール・二階堂の定理を用いて解析的な証明が与えられる。

場合を 2 つに分ける境界は

$$(5) \quad p = U_c(c, l_s)|_{c=f(k, l_g)}$$

で与えられる。これは投資の効用表示の価値が、財の消費の限界効用に等しい事態にはかならない。

最大値原理から補助変数 p は次の微分方程式を満足する。

$$\dot{p} = \delta p - \frac{\partial H^{(5)}}{\partial k}$$

$c < f(k, l_g)$ の場合ははただちに

$$\frac{\partial H}{\partial k} = p(f_k - n)$$

(5) 右辺第 1 項 δp は、先にハミルトニアンにおいて $e^{-\delta t}$ を省略したことから要請される項である。

と計算されるから、

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \delta p - p(f_k - n) \\ &= (\delta + n)p - pf_k.\end{aligned}$$

$\delta = a - n$ であったから結局

$$(6) \quad \frac{\dot{p}}{p} = a - f_k$$

となる。ここで

$$f_k = \frac{\partial f}{\partial k}$$

である。

$c = f(k, l_g)$ の場合にはハミルトニアンは

$$H = U[f(k, l_g), s] + p(-nk) + q(1 - l_g - l_s)$$

であるから、

$$\frac{\partial H}{\partial k} = U_c f_k - pn$$

となって、

$$\begin{aligned}(7) \quad \dot{p} &= \delta p - (U_c f_k - pn) \\ &= ap - U_c f_k.\end{aligned}$$

最大値原理はあくまで最適性のための必要条件のみを記述するにすぎない。しかしながら[仮定 1・3]のもとでは、もし $\delta > 0$ すなわち $a > n$ であれば十分条件でもある。この点も後に証明されるが、最大値原理を必要・十分条件と考えていくために次の仮定を設定しておこう。

[仮定 5] 社会的時間選好率は人口の成長率よりも大である。すなわち、 $a > n$ あるいは $\delta > 0$ である。

3 解の静学的性質

この節での我々の目的は、(I), (II) それぞれの場合における前節の (1)・

(2)・(3), (4)・(2)・(3)の解

$$c=c(k, p) \quad l_g=l_g(k, p) \quad l_s=l_s(k, p)$$

に関する詳細な性質を得ることである。

(I)すなわち $p=U_c$ あるいは $c < f(k, l_g)$ の場合から始めよう。(1)・(2)・(3)の各式を全微分して適当に移項すると,

$$\begin{aligned} U_{cc} dc + U_{cs} dl_s &= dp \\ U_{sc} dc + U_{ss} dl_s - pf_{gg} dl_g &= f_g dp + pf_g k dk \\ dl_s + dl_g &= 0 \end{aligned}$$

となる。ここで,

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} U_{cc} & U_{cs} & 0 \\ U_{sc} & U_{ss} & -pf_{gg} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= U_{cc} U_{ss} + pf_{gg} U_{cs} - U_{cs}^2 \end{aligned}$$

を定義すれば, [仮定1・3] から

$$\begin{aligned} f_{gg} &< 0 \quad U_{cc} < 0 \\ U_{cc} U_{ss} - U_{cs}^2 &> 0 \end{aligned}$$

であるから

$$\Delta > 0.$$

k および p に対して c, l_g, l_s が一意的に決まることを示すためにゲール・二階堂の定理を援用する。行列式 Δ の3行目の各要素にマイナスを付けた行列

$$\begin{pmatrix} U_{cc} & U_{cs} & 0 \\ U_{sc} & U_{ss} & -pf_{gg} \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

を考え, 各次数の首座小行列式の符号をしらべればよい。⁽⁶⁾

(6) このようなゲール・二階堂の定理の用い方はアロー・カーツ [1] に負っている。94ページを見よ。

(i) 1 次の首座小行列式に関して

$$U_{cc} < 0 \quad U_{ss} < 0 \quad -1 < 0$$

(ii) 2 次の首座小行列式に関して

$$U_{cc} U_{ss} - U_{cs}^2 > 0$$

$$-U_{cc} > 0 \quad -U_{ss} - pf_{gg} > 0$$

(iii) 3 次の首座小行列式に関して

$$-A < 0$$

ゆえにゲール・二階堂の定理により、 $c(k, p)$, $l_g(k, p)$, $l_s(k, p)$ は k , p に対して一意的に決定される。

次に上式より計算をおこなうと、

$$\frac{\partial c}{\partial p} = \frac{U_{ss} + pf_{gg} - U_{cs}f_g}{A}$$

$$\frac{\partial c}{\partial k} = \frac{-pU_{cs}f_{gk}}{A}$$

$$\frac{\partial l_s}{\partial p} = \frac{U_{cc}f_g - U_{sc}}{A}$$

$$\frac{\partial l_g}{\partial p} = \frac{U_{sc} - U_{cc}f_g}{A}$$

$$\frac{\partial l_g}{\partial k} = \frac{-pU_{cc}f_{gk}}{A}$$

が導かれる。

ここで生産関数 f ・効用関数 U に関して次の仮定を設定しておこう。

[仮定 6] $f_{gk} > 0$

[仮定 7] $U_{cs} > 0$

[仮定 6] は労働の限界生産力が資本量の増加とともに増加すること、換言すれば生産要素としての労働と資本はつねに補完的な関係にあることを意味している。

同様の関係が効用関数についても仮定される。それが [仮定 7] である。物的な財の消費の限界効用はサービス消費量の増加とともに増大する。逆にサー

ビス消費の限界効用は、物的な財の消費量の増加とともに増大する。

[仮定 6・7] を追加すれば、先の 6 つの偏微係数の符号がすべて確定する。

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial c}{\partial p} < 0 & \frac{\partial c}{\partial k} < 0 \\ \frac{\partial l_g}{\partial p} > 0 & \frac{\partial l_g}{\partial k} > 0 \\ \frac{\partial l_s}{\partial p} < 0 & \frac{\partial l_s}{\partial k} < 0 \end{array}$$

(Ⅱ) すなわち $p < U_c|_{c=f}$ の場合にもほぼ同様に、以下の結果が導かれる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial c}{\partial p} &= \frac{-f_g^2}{\Delta'} > 0 \\ \frac{\partial c}{\partial k} &= \frac{U_{ss}f_k - pf_g f_{gk} + pf_k f_{gg}}{\Delta'} > 0 \\ \frac{\partial l_g}{\partial p} &= \frac{-f_g}{\Delta'} > 0 \\ \frac{\partial l_g}{\partial k} &= \frac{U_{sc}f_k - pf_{gk}}{\Delta'} \\ \frac{\partial l_s}{\partial p} &= \frac{f_g}{\Delta'} < 0 \\ \frac{\partial l_s}{\partial k} &= \frac{pf_{gk} - U_{sc}f_k}{\Delta'} \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \Delta' &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -f_g \\ U_{sc} & U_{ss} & -pf_{gg} \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= U_{ss} - U_{sc}f_g + pf_{gg} < 0 \end{aligned}$$

である。(Ⅱ)の場合、 $\partial l_g / \partial k$, $\partial l_s / \partial k$ の符号は確定しない。

4 解の動学的性質

前節のポントリヤーギン解の静学的性質を基礎にしながら、解の動学的性質

すなわち3つの微分方程式

$$(1) \quad \dot{k} = f(k, l_g) - c - nk$$

$$(2) \quad \frac{\dot{p}}{p} = a - f_k \quad c < f(k, l_g) \text{ なる場合}$$

$$(3) \quad \dot{p} = ap - U_c f_k \quad c = f(k, l_g) \text{ なる場合}$$

を検討するのがこの節の目的である。ただし(1)―(3)における c , l_g , l_s はすべてポントリャーギン解の静学的性質を満足する

$$c = c(k, p) \quad l_g = l_g(k, p) \quad l_s = l_s(k, p)$$

であることに注意しよう。横軸に k をとり縦軸に p をとった (k, p) —平面上で k および p の運動を調べればよい。

初めに (k, p) —平面を2つに分ける境界

$$(4) \quad p = U_c(c, l_s) \mid c = f(k, l_g)$$

を吟味しておこう。

$$\phi(k, p) = p - U_c(c, l_s) \mid c = f(k, g)$$

と定義すれば、前節(Ⅱ)の場合の結果を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial p} &= 1 - U_{cc} \frac{\partial c}{\partial p} - U_c \frac{\partial l_s}{\partial p} > 0 \\ \frac{\partial \phi}{\partial k} &= -U_{cc} \frac{\partial c}{\partial k} - U_{cs} \frac{\partial l_s}{\partial k} \\ &= \{p U_{cc} f_g f_{gk} - p U_{cc} f_k f_{gk} - p U_{cs} f_{gk} \\ &\quad - (U_{cc} U_{ss} - U_{cs}^2)\} / \Delta' > 0 \end{aligned}$$

であるから、

$$\left. \frac{dp}{dk} \right|_{\phi(k, p) = 0} = - \frac{\partial \phi / \partial k}{\partial \phi / \partial p} < 0$$

したがって、 (k, p) —平面上の $\phi(k, p) = 0$ なる曲線をあらためて $p = \eta(k)$ と記すことにすれば、 $d\eta(k)/dk = \eta'(k) < 0$ 。他方、 k が0に限りなく近づくとき c も0に限りなく近づくから、〔仮定4〕によって

$$\lim_{k \rightarrow 0} \eta(k) = +\infty。$$

同様に、 k が ∞ に限りなく近づくとき c も ∞ に限りなく近づくから

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \eta(k) = 0$$

であることもただちに従う。 $p=\eta(k)$ の上方で $c>f(k, l_g)$, 下方で $c=f(k, l_g)$ となる。

(k, p) —平面の $p=\eta(k)$ の上方の領域における p の動きは(2)式で記述される。まず $\dot{p}=0$ なる曲線を検討し, そのあとで $\dot{p}=0$ なる曲線をはずれた場合の p の運動の方向を吟味する。 $x(k, p)$ を

$$x(k, p) = a - f_k$$

と定義する。前節の(I)の場合であるから,

$$\frac{\partial x}{\partial p} = -f_{kg} \frac{\partial l_g}{\partial p} > 0$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial k} = \{p U_{cc}(f_{gk}^2 - f_{kk} f_{gg}) - f_{kk}(U_{cs} U_{ss} - U_{cs}^2)\} / \Delta > 0$$

となつて,

$$\left. \frac{dp}{dk} \right|_{x(k, p) = 0} > 0$$

すなわち右上りである。 p をある一定の値に固定して k を十分大きくとれば, f_k は a より小となって $\dot{p}/p > 0$ 。したがって p は, $\dot{p}=0$ の右側の領域において増加, 左側の領域において減少する。これは第 1 図において, 境界 $p=U_c |_{c=f}$ より上方の領域の垂直な矢印によって示されている。

境界の下方における p の動きもほぼ同様に調べることができる。その結果は第 1 図の境界の下方の垂直な矢印が示しているが, この場合の $\dot{p}=0$ なる曲線については一様に右下りであることは保証されないが, 境界との交点の近傍および十分大なる k については右下りであることは証明することができる。

最後に k の動きをみるために,

$$\omega(k, p) = f(k, l_g) - c - nk$$

を定義する。まず $\omega(k, p)=0$ なる曲線が, (4)式で示される境界の下方にはないことは簡単に証明される。したがって(I)の場合のみについて考えればよいから

$$\frac{\partial \omega}{\partial p} = f_g \frac{\partial l_g}{\partial p} - \frac{\partial c}{\partial p} > 0$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial k} = f_k + f_g \frac{\partial l_g}{\partial k} - \frac{\partial c}{\partial k} - n = (\#) / \Delta$$

ここで,

$$(\#) = (f_k - n) \Delta + p f_{gk} (U_{cs} - U_{cc} f_g)$$

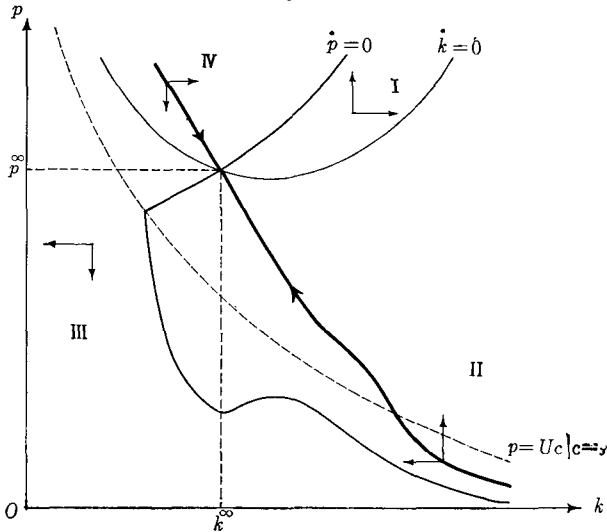
したがってある $\hat{k}$ が存在して、 $k \leq \hat{k}$ に対応して $\partial \omega / \partial k \leq 0$ 。すなわち

$k \leq \hat{k}$ に対応して

$$\left. \frac{dp}{dk} \right|_{\omega(k, p) = 0} \geq 0$$

となる。曲線 $\omega(k, p) = 0$ をはずれた k の動きは、第1図の水平な矢印によって示される。

以上の考察から第1図が得られる。曲線 $\dot{p} = 0$ と $\dot{k} = 0$ とのお互いの位置関係として図にかかっている以外の場合が考えられるが、実際はそのような場合のありえないことを示すことができる。



第 1 図

$\dot{k} = 0$ を満足する $\hat{k}$ に対応する p の座標を $\hat{p}$ とすると、 $(\hat{k}, \hat{p})$ においては $(\#)$

$= 0$ でなければならないから、

$$f_k[\hat{k}, l_g(\hat{k}, \hat{p})] < n$$

が成立する。したがって

$$\dot{p}/\dot{p} = a - f_k[\hat{k}, l_g(\hat{k}, \hat{p})] > a - n > 0$$

すなわち、 $\dot{k} = 0$ の極小点 $(\hat{k}, \hat{p})$ において p は増加している。このような領域は、 $\dot{p} = 0$ なる曲線の右側にかぎられる。さらに $k < \hat{k}$ なるに対しては $\dot{k} = 0$ は右下り、境界の上方では $\dot{p} = 0$ は右上りであるから、 $\dot{p} = 0$ と $\dot{k} = 0$ の右下りの部分とは必ずただ 1 点において交わる。しかも実は、 $\dot{p} = 0$ と $\dot{k} = 0$ の右上りの部分とは交わることはない。なんとなれば両曲線の交点を (k^∞, p^∞) とすれば、 $\dot{p} = 0$ がこの点において成立っているから

$$a = f_k[k^\infty, l_g(k^\infty, p^\infty)].$$

したがって、

となって $(\#) > 0$ 。ゆえに交点においては必ず $dp/dk|_{\omega(k, p)=0} < 0$ となつて、 $\dot{k} = 0$ は右下りでなければならないからである。すなわち、 $\dot{p} = 0$ と $\dot{k} = 0$ との交点は 1 つはあって 1 つに限る。

5 最 適 径 路

ポントリャーギンの最大値原理の解はあくまで最適政策が実際に存在するとしての最適性のための必要（十分）条件であつて、最適政策の存在については何もふれていないことに注意しなければならない。しかしながら第 1 図によつて最適政策の存在を実際に示すことができる。

ところで中央当局にとっては初期時点の 1 人当り資本量 k_0 はすでに与えられているから、最適政策の存在は経済が最適径路をたどることを可能にする補助変数 p の初期値が存在するかどうか依存する。第 1 図で (k, p) —平面は $\dot{p} = 0$, $\dot{k} = 0$ によつて 4 つの象限に分けられているが、まず初期条件が図の第 I 象限に与えられた場合を考えてみよう。 k も p も増加傾向をもつが、 $\dot{p} = 0$ や $\dot{k} = 0$ にぶつかる径路もありうるし、ぶつからずに p および k が限りなく大きくなっていく径路もありうる。もし象限の境界 $\dot{p} = 0$ にぶつかると $\dot{p} = 0$

上では p 増加を止めるが、 k は依然として増加傾向を有するから結局また第Ⅰ象限内に引戻されてしまう。 $\dot{k}=0$ にぶつかった場合も同様である。かくて初期条件が第Ⅰ象限内に与えられた径路は、けっして他の象限へとび出すことなく p および k を増大させる。このような p を無限に増大させていく径路は、[仮定2] によって1人当たり財の消費 c を限りなく小さくしていくから、最適な径路でないことは明らかである。初期条件を第Ⅰ象限内に与えられたポントリヤーギン解はけっして最適ではありえない。

初期条件が第Ⅲ象限に与えられたとしても、第Ⅰ象限の場合と同じように、隣りの象限に境界を横切って移ろうという運動は結局はすべて元へ引戻されてしまう。さらにこの象限では、 p および k がともに減少傾向にあるために有限期間内においても k が0となってしまう可能性がある。当然かかる径路は最適な径路たりえない。

初期条件が第Ⅱ・第Ⅳの象限に与えられた場合には、経済は隣りの象限に移動する。第Ⅱ象限に与えられた場合を考えてみると、 p は増加傾向にあり k は減少傾向にあるから経済はやがては境界 $\dot{p}=0$ ないし $\dot{k}=0$ にぶつかってしまう。 $\dot{k}=0$ にぶつかったとすると、 k は変化の傾向を有しないにもかかわらず p は増加しているから、 $\dot{k}=0$ を越えて第Ⅰ象限内にはいる。 $\dot{p}=0$ にぶつかった場合には第Ⅲ象限に移動する。これらの第Ⅰ・第Ⅲ象限にはいった径路が最適な径路でないことはすでに明らかである。初期条件が第Ⅳ象限に与えられた場合もまったく同様である。

しかしながら、初期条件が第Ⅱ・第Ⅳ象限に与えられた場合には、曲線 $\dot{p}=0$ 、 $\dot{k}=0$ の交点 (k^*, p^*) に収束することを可能ならしめる k の初期値に対応した p の初期値 p_0 が1つ存在することが、第1図の矢印の向きから直観的に了解されるだろう。これが我々の求める最適径路にほかならない。

この径路は[仮定3]すなわち条件 $a > n$ のもとでは、最適性の必要条件のみならず十分条件である。この点に簡単な証明を与える。

[仮定1—2] によって関数 f および U に凹性を仮定しているから、最大値原理の十分条件は補助変数 $p(t)$ で評価した状態変数 $k(t)$ の無限先の時点

に対する現在価値が 0 に近づくことである。⁽⁷⁾すなわち

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\delta t} p(t) k(t) = 0$$

がみたされればよい。最適径路においては $p(t)$, $k(t)$ は有限の値 p^∞ , k^∞ に収束するから、(1)式がみたされるためには $\delta > 0$ すなわち $a > n$ であればよい。

$\dot{p} = 0$, $\dot{k} = 0$ の交点 (k^∞, p^∞) は p および k に変化の傾向が存在しないという意味で均衡点であるが、この状態は均斉成長にはかならない。すなわち、我々の最適成長径路は経済を必ず均斉成長状態

$$(2) \quad f_k(k^\infty, l_g^\infty) = a$$

$$(3) \quad f(k^\infty, l_g^\infty) = c(k^\infty, p^\infty) + nk^\infty$$

に収束させる。ここに $l_g^\infty = l_g(k^\infty, p^\infty)$ 。(2)式は資本の限界生産力と時間選好率が等しくなっていることを、(3)式は財部門の産出量が財の消費量と1人当り資本量を不変に保つために必要とされる投資量との和になっていることを示している。

結 語

最適径路は第1図において太線をもって示されている。初期資本量 $k(0)$ が非常に大きいと、 $p(0)$ をきわめて小さく与えることによって境界 $p = U_c |_{c=f}$ の下方の径路をたどる。この場合 $p < U_c |_{c=f}$ であるから、財部門の産出量は残りなく消費に向けられ、したがって $k(t)$ はかなり速い速度で減少する。そして

$$(1) \quad \frac{dp}{dk} = \frac{ap - U_c f_k}{f(k, l_g) - c - nk}$$

を満足する関数 $p(k)$ によって、 $p(t)$ を次第に大きくさせてゆく。⁽⁸⁾ やがて境界 $U_c |_{c=f}$ にぶつかると、今度は $p = U_c$ なる状態を守りながら資本蓄積をもおこなって $k(t)$ の減少する速度をゆるめつつ、

(7) [1] の第Ⅱ章、特に命題8参照。

(8) $dp/dk = \dot{p}/\dot{k}$ より導出。

$$(2) \quad \frac{dp}{dk} = \frac{p\{a - f_k(k, l_g)\}}{f(k, l_g) - c - nk}$$

なる傾きで $p(t)$ を増大させてゆく。するとやがて長期均衡の状態に収束する。

逆に、 $k(o)$ が k^∞ よりも小なる場合には、 $p(o)$ を高めに設定し、消費を抑制しながら資本蓄積をすすめてゆく。 $k(t)$ の増大とともに(2)式で示された傾きをもって $p(t)$ を減少させていけばよい。

参 考 文 献

- [1] Arrow, K. J., and Kurz, M., *Public Investment, the Rate of Return, and Optimal Fiscal Policy*; Johns Hophins Press (1970), —218.
- [2] Baumol, W. J., "Macroeconomics of Unbalanced Growth: the Anatomy of Urban Crisis". *American Economic Review*, (June 1967).
- [3] Cass, D., "Optimum Growth in an Aggregate Model of Capital Accumulation", *Review of Economic Studies*, (July 1965), 233—240.
- [4] ヴェ・ゲ・ボルチャンスキー『最適制御の数学的方法』(坂本訳), 総合図書, 昭和43年。
- [5] エス・ポントリャーギン, ゲ・ボルチャンスキー, ヴェ・ガムクリーゼ, エフ・ミンチェンコ『最適過程の数学的理論』(関根訳), 総合図書, 昭和42年。
- [6] 宇野利雄, 菊池豊彦『最大原理入門』, 共立出版, 昭和41年。