# 経済成長の二階級モデル

内　島　敏　之

Pasinetti 型の貯蓄関数を仮定する時，均衡成長径路は存在するのであろうか，また仮にそれが存在するならば安定性を有するであろうかこの二つの問題を以下において検討する。Pasinetti の 1962 年の論文〔6〕を契機として，*Economic Journal* での，あるいは *Review of Economic Studies* での論争が，Meade, Samuelson-Modigliani, Robinson, Kaldor 等によりなされた。以下においては新古典派の成長モデルを想定し，論争点を明らかにしていきたいと思う。

〔1〕 モデル

$$Y=F(K, L)$$
$$r=(\partial/\partial K)F(K, L)$$
$$w=(\partial/\partial L)F(K, L)$$
$$K=K_c+K_w$$
$$S_c=s_c r K_c$$
$$S_w=s_w(rK_w+wL)$$
$$\dot{K}_c=S_c$$
$$\dot{K}_w=S_w$$
$$\dot{L}/L=n$$

モデルは，これらの 9 個の方程式により示される。記号についていえば，Y は産出量，K は資本ストック，L は雇用労働量，$K_c$ は資本家（capitalists）により所有される資本ストック，$K_w$ は労働者（worker）により所有される資本ス

トック，$S_c$ は資本家によりなされる総貯蓄，$S_w$ は労働者によりなされる総貯蓄，$s_c$ は資本家の貯蓄率，$s_w$ は労働者の貯蓄率，$r$ は利潤率，$w$ は賃金率をそれぞれ示す。

いま，$y=Y/L$, $k=K/L$, $k_c=K_c/K$, とし，生産関数が一次同次であるとするならば，上の方程式群は次のようになる。

① $y=f(k)$, $0<k<\infty$

② $r=f'(k)$

③ $w=y-rk$

④ $k=\left\{(s_c-s_w)\ k_c\theta+s_w-n\dfrac{k}{f(k)}\right\}f(k)$

⑤ $k_c=k_c\dfrac{y}{k}\{s_c\theta-s_w-\theta k_c(s_c-s_w)\}$

ただし，$\theta=rk/y$（利潤の分配率）。

$$f(0)=0,\ f(\infty)=\infty,$$

$$f'(0)=\infty,\ f'(\infty)=0,$$

$$f'(k)>0,\ f''(k)<0,\ 0<k<\infty,$$

と仮定する。また $\theta$ については，

$\sigma>1$ ならば，$\theta(0)=0$, $\theta(\infty)=1$

$\sigma<1$ ならば，$\theta(0)=1$, $\theta(\infty)=0$

と仮定する。$\sigma$ は代替の弾力性を示す。明らかに，$0<\theta(k)<1$, $0<k<\infty$ である。

## 〔2〕 均衡解の存在

均衡解は，④，⑤において $\dot{k}=0$, $\dot{k}_c=0$ とすれば求められる。

⑥ $k_c=\dfrac{1}{s_c-s_w}\left(\dfrac{n}{r}-\dfrac{s_w}{\theta}\right)$ $(\dot{k}=0)$

⑦ $\begin{cases} k_c=\dfrac{1}{s_c-s_u}\left(s_c-\dfrac{s_w}{\theta}\right) & (\dot{k}_c=0) \\ k_c=0 & \end{cases}$

⑥で示される $\dot{k}=0$ 曲線の性質を調べてみよう。⑥を $k$ で微分するならば，

$$\frac{dk_c}{dk}=\frac{1}{(s_c-s_w)r^2k^2}\left\{-r'ky\left(n\frac{k}{y}-s_w\right)+s_wrw\right\}$$

となり，$n\frac{k}{y}\geqq s_w$ の条件のもとでは，$dk_c/dk>0$ である。

⑦で示される $\dot{k}_c=0$ 曲線については

$$\frac{dk_c}{dk}=\frac{s_w}{s_c-s_w}\frac{1}{\theta^2}\frac{d\theta}{dk}$$

となる。よって

$$\frac{dk_c}{dk}\gtreqless 0 \qquad \text{as } \sigma\gtreqless 1$$

となる。なぜならば，

$$\frac{d\theta}{dk}=-\frac{kf''}{f}(\sigma-1)$$

であるからである。

⑥と⑦とであらわされる曲線が，正象限で交点をもつとき，それを Pasinetti 均衡と呼ぶことにしよう。Pasinetti 均衡は存在するであろうか。それは必ずしも存在しない。第1図は，$\sigma<1$ の場合についてのものである。図では，$\dot{k}=0$ 曲線と $\dot{k}_c=0$ 曲線とが正象限で交点をもつように示してある。しかし，横軸と $k^{**}$ の左側で $\dot{k}_c=0$ 曲線が交わる場合を先験的に排除はできない。つまり，Pasinetti 均衡は必ずしも存在しないのである。

$\sigma>1$ の場合にも，Pasinetti 均衡は必ずしも存在しない。

$\sigma=1$，つまり生産関数がコブダグラス型の時には，Pasinetti 均衡は存在する。なぜならば，$\dot{k}_c=0$ 曲線は横軸に平行な直線となるからである。

Pasinetti 均衡が存在するなら，それは一義的に決定される。

$$s_cf'(k^*)=n$$

$$k_c^*=\frac{1}{s_c-s_w}\left(n-\frac{s_wk^*}{y^*}\right)\frac{1}{f'(k^*)}$$

により均衡値 $(k^*, k_c^*)$ は示される。

一方，$\dot{k}=0$ 曲線と横軸との交点は，⑥，⑦を満たすので均衡解である。anti-

Pasinetti 均衡とよび，$(k^{**}, 0)$ で示す。ただし $k^{**}$ は，$nk^{**}=s_w f(k^{**})$ の根である。

これまでは，$nk \geqq s_w y$ と $\theta \geqq s_w/s_c$ の二つを仮定した。$nk \geqq s_w y$ は $\dot{k}=0$ 曲線において $k>0$, $k_c \geqq 0$ を保障した。この仮定はそのまま認め，$\theta < s_w/s_c$ と仮定しよう。この場合の様子は第3図から知れる。anti-Pasinetti 均衡だけが存在する。このことは代替の弾力性 $\sigma$ に関係なく成立する。

要約しよう。$0<s_w<s_c<1$ とする。

(i) $nk \geqq s_w y$, $\theta \geqq s_w/s_c$ の場合

○anti-Pasinetti 均衡はただひとつ存在する。

○Pasinetti 均衡は，$\sigma=1$ なら一義的に決定される。$\sigma>1$, $\sigma<1$ の場合には，それは必ずしも存在しない。もし存在するならこれらの場合には一義的に決定される。

(ii) $nk \geqq s_w y$, $\theta < s_w/s_c$ の場合

Pasinetti 均衡は存在せず，anti-Pasinetti 均衡のみがただひとつ存在する。

### 〔3〕 均衡の安定性

均衡が存在するなら，それは安定となるであろうか。はじめに局所的安定について，次に大域的安定について調べる。

④の右辺を $G(k, k_c)$，⑤の右辺を $H(k, k_c)$ とおこう。$G_1$, $H_1$ は G, H を $k$ で偏微分したものを，$G_2$, $H_2$ は $k_c$ で偏微分したものを示すとすれば次のようになる。

$$G_1=\left\{(s_c-s_w)k_c\frac{\partial\theta}{\partial k}-n\frac{\partial(k/y)}{\partial k}\right\}y+f'(k)\left\{(s_c-s_w)k_c\theta+s_w-n\frac{k}{y}\right\}$$

$$G_2=(s_c-s_w)f'(k)k>0$$

$$H_1=k_c\frac{\partial(y/k)}{\partial k}\{s_c\theta-s_w-(s_c-s_w)\theta k_c\}+k_c\frac{y}{k}\{s_c(1-k_c)+s_w k_c\}\theta'(k)$$

$$H_2=\frac{y}{k}\{s_c\theta-s_w-\theta k_c(s_c-s_w)\}-(s_c-s_u)k_c f'(k)$$

いま Pasinetti 均衡が存在するとしよう。もちろん $nk \geqq s_w y$, $\theta \geqq s_w/s_c$ である。

$$G_1(k^*,\ k_c^*)=\left\{(s_c-s_w)\,k_c^*\theta'(k^*)-n\frac{\partial(k/y)}{\partial k}\bigg|_{k=k^*}\right\}\cdot f(k^*)$$

$$G_2(k^*,\ k_c^*)=(s_c-s_w)\,\theta(k^*)\,f(k^*)>0$$

$$H_1(k^*,\ k_c^*)=k_c^*\frac{y^*}{k^*}\{s_c(1-k_c^*)+s_w k_c^*\}\theta'(k^*)$$

$$H_2(k^*,\ k_c^*)=-(s_c-s_w)\,k_c^* f'(k^*)<0$$

$$二根の和=G_1(k^*,\ k_c^*)+H_2(k^*,\ k_c^*)$$

$$=\frac{(s_c-s_w)\,k_c^*k^*}{y^*}\{f''(k^*)\,y^*-f'(k^*)^2\}-n\frac{y^*-k^*f'(k^*)}{y^*}<0,$$

$$二根の積=G_1(k^*,\ k_c^*)\cdot H_2(k^*,\ k^*_c)-G_2(k^*,\ k_c^*)\cdot H_1(k^*,\ k_c^*)$$

$$=-s_c(s_c-s_w)\,f'(k^*)\,k^*k_c^*f''(k^*)>0$$

となり，Pasinetti 均衡は局所的に安定となる。

次に anti-Pasinetti 均衡について。この時，$k_c^{**}=0$, $nk^{**}=s_w f(k^{**})$ である。

$$G_1(k^{**},\ 0)=-ny^{**}\frac{\partial(k/y)}{\partial k}\bigg|_{k=k^{**}}<0$$

$$G_2(k^{**},\ 0)=(s_c-s_w)\,\theta(k^{**})\,f(k^{**})>0$$

$$H_1(k^{**},\ 0)=0$$

$$H_2(k^{**},\ 0)=\{s_c\theta(k^{**})-s_w\}\,f(k^{**})/k^{**}$$

となり，$\theta(k^{**})<s_w/s_c$ ならば，均衡は局所的に安定となる。

次に大域的安定性を検討しよう。$\sigma=1$ の時は Furuno〔2〕により，Pasinetti 均衡，anti-Pasinetti 均衡安定となることが示された。$\sigma<1$ の場合は，第1図が示すように，Pasinetti 均衡は安定となる。この時，微分方程式④，⑤の解 $(k,\ k_c)$ は Pasinetti 均衡へ周期的な運動を示しながら接近していく。$\sigma>1$ の場合は第2図である。この時は解 $(k,\ k_c)$ は Pasinetti 均衡へ漸近的に収束し安定性が得られる。両図の場合には，anti-Pasinetti 均衡はいずれも不安定である。anti-Pasinetti 均衡が安定となるのは $\theta<s_w/s_c$, $nk\geqq s_w y$ が満たされる時であり，第3図に示してある。

いずれにしろ Pasinetti 均衡は，存在するならば $\sigma-1$ の符号が確定している時に大域的に安定となり，anti-Pasinetti 均衡の安定性は代替の弾力性 $\sigma$ に依存せず，$\theta<s_w/s_c$, $nk\geqq s_w y$ の条件により保障される。

## 〔4〕 特殊な場合

これまでは $0<s_w<s_c<1$ としてきたが，$s_w=0$, $s_w=s_c$ となる特殊な二つの場合を簡単に考えてみたい。

$s_w=0$ としよう。この時，Pasinetti 均衡は一義的に決定され，$k_c^*=1$, $s_c f'(k^*)=n$ となる。この Pasinetti 均衡の大域的安定も得られる。第4図が示すように，$0<k<\infty$, $0\leqq k_c\leqq 1$ の条件を満たす経済は時間の経過とともに $K_c=K$, $K_w=0$ なる状態に，つまり資本ストックは労働者により所有されることなく，もっぱら資本家によりのみ所有される状態になっていくのである。

次に $s_c=s_w=s$ のケースを考えよう。この時，基本的な微分方程式は

$$\dot{k}=sy-nk$$

$$\dot{k}_c=s(1-\theta)\,k_c y/k$$

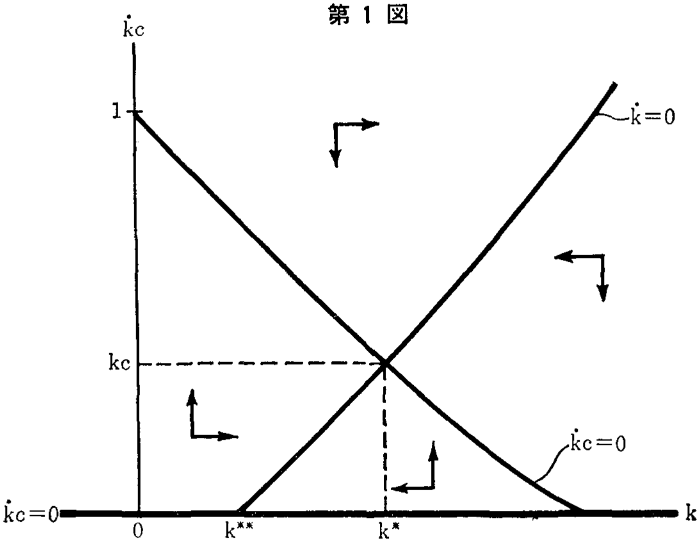
となり，均衡は $k_c^*=0$, $nk=sf(k^*)$ により一義的に決定される。第5図により示される様に均衡は安定となる。この時には，経済は $K_c=0$, $K_w=K$, つまり資本が資本家により所有されず，ただ労働者によりのみ所有される状態に接近していくのであり，$s_w=0$ の場合とは正反対のことがおこる。

## 〔5〕 結 語

これまでのモデルの一番の問題点は Pasinetti 均衡の存在に関するものであろう。一般的な貯蓄率の仮定 $(0<s_w<s_c<1)$ のもとで，Pasinetti 均衡の存在を保障する条件はいかなるものなのであろうか。$nk\geqq s_w/s_c$ と $\theta\geqq s_w/s_c$ との二つの条件は $0<k<\infty$ なる $k$ に対して $k_c\geqq 0$ を保障するが，Pasinetti 均衡の存在は保障しない。

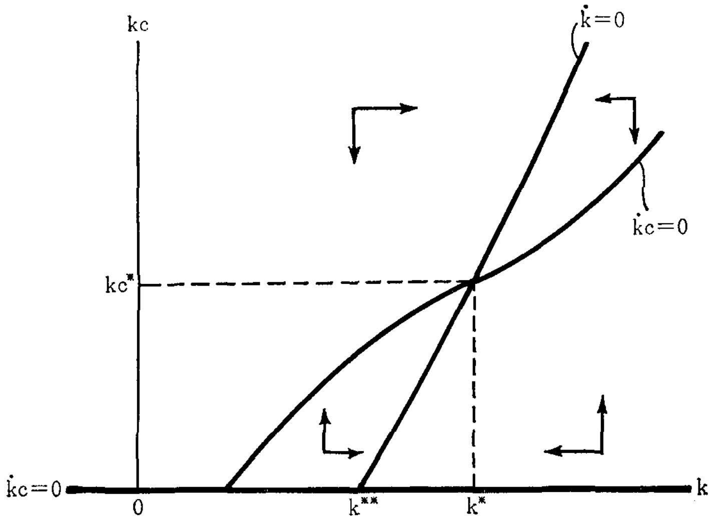
またこのモデルでは，資本家は自己の貯蓄を自己の資本ストックの増加にあて，労働者自身の貯蓄は自己の資本ストックの増加にふりわけられるとされている。この仮定に対して，それぞれの階級の貯蓄は必ずしも自己の資本ストッ

第 1 図



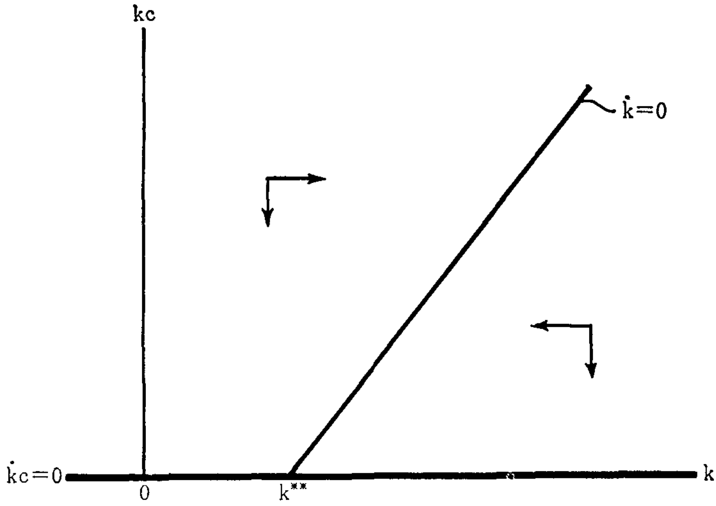
$\dot{k}c$
1
$\dot{k}=0$
kc
$\dot{k}c=0$
$\dot{k}c=0$
k
0
$k^{**}$
$k^{*}$


第 2 図

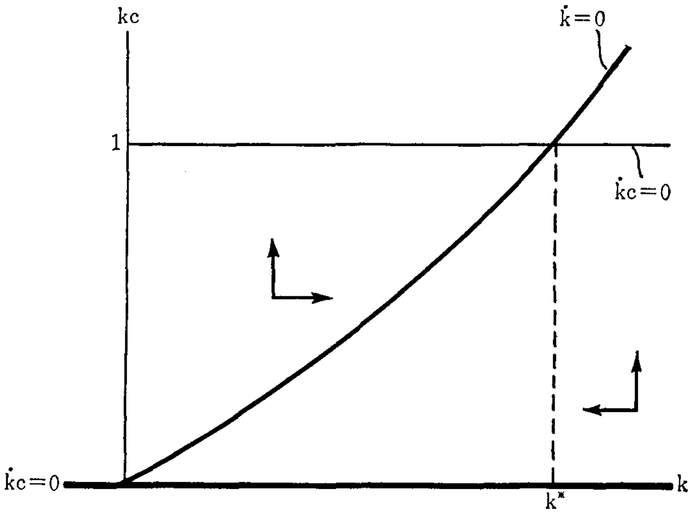


kc
$\dot{k}=0$
$\dot{k}c=0$
$kc^{*}$
$\dot{k}c=0$
k
0
$k^{**}$
$k^{*}$

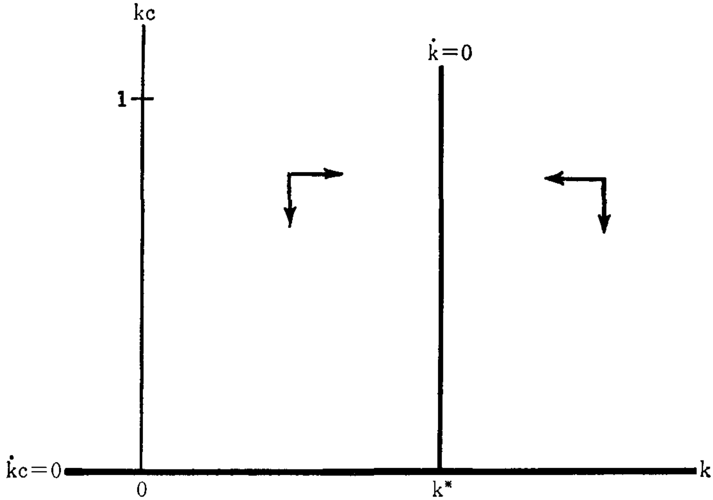
第 3 図




第 4 図



第 5 図




クの増加にではなく，経済全体の資本ストックの増加にむけられると考えることはできないであろうか。またこのように考えうるとしたら，階級間での資本ストックの配分はいかなる基準のもとになされるのであろうか。

## 参 考 文 献

〔1〕 Conlisk, J. and Ramanathan, R., "Expedient Choice of Transforms in Phase-Diagramming", RES (July, 1970).
〔2〕 Furuno, Y., "Convergence Time in the Samuelson-Modigliani Model," RES (April, 1970).
〔3〕 Meade, J. E., "The Rate of Profit in a Growing Economy," EJ (December 1963).
〔4〕 Meade, J. E. and Hahn, F. H., "The Rate of Profit in a Growing Economy," EJ (June 1965).
〔5〕 Meade, J. E., "The Outcome of the Pasinetti Process—A Note," EJ (March 1966).
〔6〕 Pasinetti, L. L., "Rate of Profit and Income Distribution in Relation to the Rate of Economic Growth," RES (October 1962).
〔7〕 Pasinetti, L. L., "The Rate of Profit in a Growing Economy—A Reply," EJ (March 1966).

〔8〕 Samuelson. P. A. and Modigliani, F., "The Pasinetti Paradox in Neoclassical and More General Models," RES (October, 1966).

〔9〕 Sato, K., "The Neoclassical Theorem and Distribution of Income and Wealth," RES (Oct. 1962).

〔10〕 "New Results in an Old Framework," RES(October 1966). 〔8〕に対しての Pasinetti, J. Robinson, N. Kaldor のコメント, Pasinetti と Robinson に対しての P. Samuelson と F. Modigliani による reply.

EJ *Economic Journal*

RES *Review of Economic Studies*

追加ノート

第1図（$\sigma<1$）の場合には, $k^{**}\leqq k\leqq\bar{k}$（ただし $\bar{k}$ は $\theta(\bar{k})=s_w/s_c$ の解1, $0\leqq k_c\leqq 1$ である（$k$, $k_c$）に, 第2図（$\sigma>1$）の場合には, $k^{**}\leqq k<\infty$, $0\leqq k_c\leqq 1$ である（$k$, $k_c$）に, 変数のとりうる範囲に限定される。

大域的安定性に関して若干の修正を加えねばならない。$\sigma<1$ の場合には,

$$G_1(k, k_c)+H_2(k, k_c)$$

の値は正あるいは負に確定するとはいえず, Bendixon の第1定理により, limit cycle が生じる可能性を排除できない。

（住所　東京都小金井市前原町2の21の17　鈴木方）