計画経済に於る数学利用について

——O.ランゲの場合——

藤　森　頼　明

序

社会主義計画経済に於る数学的方法の理論的実践的意義の重要性については言を要しないだろう。特に日本のような先進資本主義国が社会主義に転化した場合，早急に精密な経済計画を作成実行する必要があるだろう。従って，経済理論の数学的展開を行なう事は，マルクス主義経済学の課題の一つである。

本稿では社会主義圏に於る数学利用の一例として，故O.ランゲの『再生産と蓄積の理論』及び，『サイバネティクスの光に照らした全体と発展』を取り上げ，その検討を通して，以後の研究の指針を得る事にする。但し，数学利用に関する方法論的考察については，別の機会に行なう事にする。亦，〔I〕～〔III〕で前者を検討し，〔IV〕で後者を取扱う。（以上の二つの著作については補注を参照されたい）

〔I〕

ランゲは，再生産及び再生産法則に関して，次のような見解を持っていた事を先ず指摘しておかなければならない。即ち，再生産とは生産手段の更新の過程を指し，再生産法則は，生産過程に於る技術的連関に関する生産の技術的＝バランス的法則という形で把握されている。この法則は，歴史的性格はもつものの，社会関係に直接依存するものではないとされる。しかし，このような彼の見解が誤りである事は言う迄もない。生産過程に於る技術的連関は再生産法

則の一部分として把握されねばならない。更に，彼は資本主義経済と社会主義経済とを，技術的＝バランス的法則の見地より，平行的に取扱っているが，これも誤りと言うべきであろう。たとえ形式的には同一の表式を用いるとしても，その表式の前提は，社会主義経済と資本主義経済の場合では全く異なるからである。

さて，彼が再生産バランスを組立てる際に，出発点とした再生産の多部門表式は次の様なものである。

v_i	x_{01}	x_{02}	……………	x_{0n}	x_0	X_0
C_i	x_{11}	x_{12}	……………	x_{1n}	x_1	X_1
	x_{21}	x_{22}	……………	x_{2n}	x_2	X_2
	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
	x_{n1}	x_{n2}	……………	x_{nn}	x_n	X_n
m_i	m_1	m_2	……………	m_n		
P_i	X_1	X_2	……………	X_n		

但し，記号について次の様に約束する。

X_i: 第 i 部門の総生産物

x_i: 第 i 部門の最終生産物

x_{ij}: 第 i 部門から第 j 部門への再生産フロー

X_0: 総労働力

x_{0i}: 第 i 部門で雇用された労働量

x_0: 物的生産分野以外で雇用された労働量，亦は，予備労働力

上記の表式の行和・列和をとる事により，$n+1$ コのバランス方程式と，n コの生産費用方程式とが得られる。即ち，

$$\begin{cases} X_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+x_i & (i=0.1,\cdots\cdots,n) \\ X_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+x_{0i}+m_i & (i=1,\cdots\cdots,n) \end{cases}$$

最終生産物は消費部分と投資部分とに分割される。即ち,

$$\begin{cases} x_i^{(0)}: & \text{消費部分} \\ I_{ij}: & \text{第 } i \text{ 部門から第 } j \text{ 部門への投資フロー} \end{cases}$$

従って,

$$x_i=x_i^{(0)}+\sum_{j=1}^{n} I_{ij}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

となる。これより,次のような動学分析の出発表式が得られる。これを生産の投入産出拡大バランス表と呼ぶ。

x_{01}	x_{02}	………	x_{0n}	x_{01}'	x_{02}' ………	x_{0n}'	$x_0^{(0)}$	X_0
x_{11}	x_{12}	………	x_{1n}	I_{11}	I_{12} ………	I_{1n}	$x_1^{(0)}$	X_1
x_{21}	x_{22}	………	x_{2n}	I_{21}	I_{22} ………	I_{2n}	$x_2^{(0)}$	X_2
⋮	⋮		⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
x_{n1}	x_{n2}	………	x_{nn}	I_{n1}	I_{n2} ………	I_{nn}	$x_n^{(0)}$	X_n

上記の表式より,バランス方程式

$$X_i=\sum_{j=1}^{n} x_{ij}+\sum_{j=1}^{n} I_{ij}+x_i^{(0)},\quad i=1,\cdots\cdots,n$$

が得られる。この方程式をランゲは次の様にして動学化する。即ち,X_i についての微分方程式体系を作成する。その為に,投入係数,投資係数,粗投資率を次の様に定義する。

$$a_{ij}=x_{ij}/X_j$$

$b_{ij}=I_{ij}/\varDelta X_{ij}$; 第 j 部門の総生産の一単位の増加に必要な第 i 部門からの投資フロー。

$$\alpha_i = 1 - \frac{x_i^{(0)}}{X_i}$$

b_{ij} の定義より,

$$I_{ij} = b_{ij} \Delta X_j$$

であるが,

$$\Delta X_j \fallingdotseq \frac{dX_j}{dt}$$

より,

$$I_{ij} = b_{ij} \frac{dX_j}{dt}$$

となる。

かくて,次の連立微分方程式が導かれる。

$$-\alpha_i X_i(t) + \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{dX_j(t)}{dt} = 0 \quad (i=1, \cdots, n) \tag{1}$$

明らかにこの方程式は同次系である。これは彼のバランス方程式が持つ一つの特徴である。(1)

微分方程式(1)の解は,(1)の特性方程式を解く事によって決定される。(1)の特性方程式は,行列式

$$\begin{vmatrix} -\alpha_1 + a_{11} + b_{11}\nu & a_{12} + b_{12}\nu & \cdots\cdots\cdots & a_{1n} + b_{1n}\nu \\ a_{21} + b_{21}\nu & -\alpha_2 + a_{22} + b_{22}\nu & \cdots\cdots\cdots & a_{2n} + b_{2n}\nu \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + b_{n1}\nu & a_{n2} + b_{n2}\nu & \cdots\cdots\cdots & -\alpha_n + a_{nn} + b_{nn}\nu \end{vmatrix} = 0$$

で現わされる。これは ν についての n 次の多項式であり,その根として n 個の $\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n$ が求まる。$\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n$ を用いて,(1)の解 $X_i(t)$ は,一般的には,

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^{n} h_j k_{ij} e^{\nu_j t} \tag{2}$$

と現わされる。但し,h_j はウェイト付の係数で,任意不変のパラメータである。亦,$\nu_1 \cdots\cdots \nu_n$ は各々異なる場合を考える。(2)

特性方程式から明らかなように,$\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n$ は a_{ij}, b_{ij}, α_i に,即ち,生産の技術的経済的構造に依存している。特に,α_i に依存している事は,$\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n$ が消費と投資に関する経済的決定に依存している事を意味する。では,次に

$\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n$ の経済的意味を考えよう。

$\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n$ が実数である場合，$\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n$ は該当部門の総生産物の成長率を現わす。実際，$X_i(t)$ が唯一つの項で現わされるならば，

$$\frac{\frac{dX_i(t)}{dt}}{X_i(t)}=\frac{h_1k_{i1}\nu_1e^{\nu_1t}}{h_1k_{i1}e^{\nu_1t}}=\nu_1$$

となり，亦，$X_i(t)$ が一般的に(2)で現わされるならば，

$$\frac{\frac{dX_i(t)}{dt}}{X_i(t)}=\frac{\sum_{j=1}^{n}h_jk_{ij}\nu_je^{\nu_jt}}{\sum_{j=1}^{n}h_jk_{ij}e^{\nu_jt}} \tag{3}$$

となる。これは，$\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n$ のウェイト付の平均と解し得る。(3)によって決定される成長率を一般的成長率と云い，$\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n$ を部分的成長率と呼ぶ。

更に，この場合 $\nu_1, \cdots\cdots, \nu_n$ の符号を考えてみよう。$\nu_j>0$, $\nu_j=0$, $\nu_j<0$ に従って，$e^{\nu_jt}\to\infty$, $e^{\nu_jt}=1$, $e^{\nu_jt}\to 0$ である。従って，時間の経過するにつれて，最大の部分成長率に応じる項が支配的になる。即ち，(2)で示される $X_i(t)$ の成長は，n 個のトレンドから構成されているが，最大の部分成長率に対応するトレンドが支配的なのである。

次に，特性根の若干個が複素数である場合を考える。$\nu_j=\mu_j+i\xi_j$ と置くと，対応する項は，

$$h_jk_{ij}e^{\nu_jt}=h_jk_{ij}e^{\mu_jt}(\cos\xi_jt+i\sin\xi_jt)$$

となる。周知の様に，三角函数は周期函数であるから，この場合 $X_i(t)$ の成長過程にはサイクルが発生している事が判る。このサイクルの振幅は μ_j によって決まる。即ち，$\mu_j>0$, $\mu_j=0$, $\mu_j<0$ に従って，発散一定減衰振幅となる。十分時間が経過した後には，最大の μ_j が振幅を決定する。これはトレンドの場合と同様である。サイクルの周期は ξ_j によって決定される。この場合，$2\pi/\xi_j$ が周期である。

ところで，ランゲは虚数単位 i の存在について特別の注意をしてはいないが，i の存在は無視出来ない。実際，ある特性根が複素数であるならば，$X_i(t)$ も複素数値を一般にとる。部門総生産物が複素数値で示される事になる。従って，

我々は複素数の経済的意味を明確にする努力を怠ってはならないのである。

以上に見てきた様に，各部門の総生産物の成長過程には，生産の技術的経済的構造（a_{ij}, b_{ij}, α_i）を原因とするトレンドとサイクルが存在する。ランゲは，この様な理論的結果が具体的現実に照応する事を主張している。トレンドについては異論は無いが，サイクルについては彼は，生産手段への投資過程との関係に於てのみ理解している。即ち，資本主義経済の場合には利潤率に関係した投資による景気循環なるサイクルが存在する。亦，社会主義経済の場合には，工業化の過程に於る大量の生産手段投下及びその更新がサイクルの原因とされる。しかし，社会主義経済に於るサイクルの存在は，より根源的に，資源配分の問題と関連させて解明しなければならないだろう。

次に，固定生産手段の減価償却と更新に関する彼の展開をみる事にする。

〔II〕

従来，固定生産手段の運動を取扱う場合，その耐用年数は一定とされるのが常であった。ランゲの更新理論の独自性は，耐用年数の多様性を直接取上げた点にある。

固定生産手段の集合体は，その成員の「死亡」と「誕生」とが観察される人口と解釈する事ができる。この点に着目すると，人口統計学の理論を適用する事ができる。

人口統計学の用語に従い，単純再生産を想定して，更新方程式を作成してみよう。その為に記号を次のように約束する。

N: 第 t 年度に於る成員数，一定値。

$N(\tau)$: Nの内，τ 才のものの数。

$B(t)$: 第 t 年度の出生率。出生者数のNに対する比率である。

$p(\tau)$: τ 才迄生きる確率，$N(\tau)/N(0)$ に等しい。

$f(\tau)$: τ 才での死亡確率，$-p'(\tau)$ $(\geqq 0)$ に等しい。

ω: 最大寿命。

$V(t)$: 第 t 年度の死亡総数。

目標は次の二つの命題である。即ち，

命題1　固定的生産手段の更新過程にはサイクルが生じているが，それは減衰振幅サイクルである。

命題2　サイクルの周期は最大寿命よりも小さい。

上記の約束より，

$$\begin{aligned} V(t) &= NB(t)f(0)+NB(t-1)f(1)+\cdots\cdots+NB(t-\omega)f(\omega) \\ &= N\sum_{\tau=0}^{\omega} B(t-\tau)f(\tau) \end{aligned}$$

連続的死亡過程を考えると，

$$V(t)=N\int_0^{\omega} B(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

しかるに，単純再生産であるから，

$$V(t)=N\cdot B(t)$$

従って，更新方程式

$$B(t)=\int_0^{\omega} B(t-\tau)f(\tau)d\tau \qquad (4)$$

が得られる。これは未知函数 B(t) に関する第一種 Fredholm 型積分方程式である。

(4)の特性方程式は，$B(t)=Qe^{\rho t}$ を(4)に代入する事によって得られる。

$$\int_0^{\omega} e^{-\rho\tau} f(\tau)=\tau \qquad (5)$$

特性方程式(5)を満たす ρ の値は無限に存在する。従って(4)の解は一般的に，

$$B(t)=\sum_{i=1}^{\infty} Q_i e^{\rho_i t}$$

と現わされる。(5)を基にして ρ について考察する。今，

$$R(\rho)=\int_0^{\omega} e^{-\rho\tau} f(\tau)d\tau$$

とおく。被積分関数は二つの正関数の積であり，

$$f(\tau)\geqq 0$$

$$\frac{de^{-\rho\tau}}{d\rho}<0$$

であるから，$R(\rho)$ は減少関数である。更に，$\rho\to\infty$ の時，$R(\rho)\to 0$，$\rho\to-\infty$ の時，$R(\rho)\to\infty$ となる。従って，$R(\rho)=1$ をみたす実数，即ち(5)の実根は唯一つである。それは $\rho=0$ である。これは単純再生産の想定よりする当然の帰結である。それは出生率 $B(t)$ のトレンドが定値である事を意味している。

特性方程式(5)の他の根は複素根となる。そこで，$\rho_j=\alpha_j+i\beta_j$ と置くと，$B(t)$ は，

$$B(t)=Q_0+\sum_{j=1}^{\infty}Q_j e^{\alpha_j t}(\cos\beta_j t+i\sin\beta_j t)$$

と示される。右辺から明らかなように，更新過程には固有のサイクルが発生している事が判る。このサイクルを分析する為に，複素根 $\rho=\alpha+i\beta$ を(5)に代入する。

$$\int_0^{\omega}e^{-(\alpha+i\beta)t}f(\tau)d\tau=1$$

即ち，

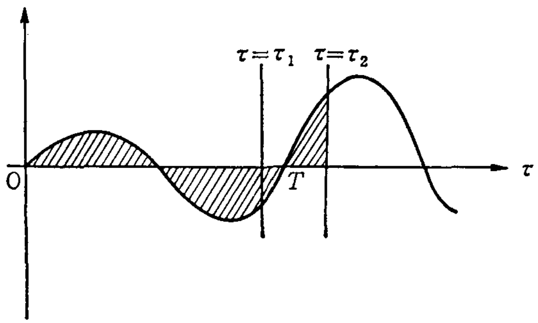
$$\int_0^{\omega}e^{-\alpha\tau}\cos\beta\tau\cdot f(\tau)d\tau=1 \tag{6}$$

$$\int_0^{\omega}e^{-\alpha\tau}\sin\beta\tau\cdot f(\tau)=0 \tag{7}$$

(6)より，$\alpha<0$ が示される。即ち，命題一が証明される。実際，(6)を(5)と比較してみると，$\tau\neq 0$ の時 $\cos\beta\tau<1$ であるから，$\alpha\geqq 0$ とすると(5)の左辺の定積分は1より小さくなる。故に，$\alpha<0$。従って，出生率に生じるサイクルは減衰振幅である。

更に，ランゲは命題二の証明を次のように行なう。

(7)の被積分函数のグラフを描くと，次頁の図の様になる。($\alpha<0$ 故，被積分函数は増加振幅をもつ)。定積分は面積を現わすから，この図に於て，τ 軸より上の斜線部と，下になる斜線部の面積とが等しくなる。この値を求めると，τ_1 亦は τ_2 の場合(7)が成立つ。ランゲは τ_1 を全く無視して，τ_2 を選び，$\omega=\tau_2>T$ として命題二の論証としている。しかし，τ_1 を選べば，逆に $\omega<T$ であるから，彼の論証の不備は明らかである。[(3)]



以上の彼の展開によると，コダマ現象の原因は，結局，耐用年数の多様性という事になり，狭隘な見地と言わざるを得ない。

〔III〕

以上の行論の内に若干のコメントを述べてあるが，その他の点について，ここで一括して検討する。

再生産表式と産業連関表（＝投入・産出拡大バランス表）との関連について，ランゲはどのような見解をもっていたのだろうか。彼によれば，産業連関表は再生産表式の具体化である。どの点が具体化されたのかと言えば，第一部門が多部門に細分された点である。従って，再生産表式と産業連関表とは同一次元に属するものになる。しかし，再生産表式は価値視点と使用価値視点の統一に立脚しているのに対し，産業連関表は両者の分離から出発している，と言う本質的な差異が存在する。(4) 特に産業連関表の場合には，使用価値の側面に重点が置かれており，再生産表式を物動計画の観点から発展させたものである。この点，彼の見解は誤りである。

ランゲの投入産出表の独自的な性格は，労働力部門を含む点にある。再生産論の分野に於て，労働力部門の表式への編入の問題が極めて重要である事は言を俟たない。生産力の高度化・経済発展の窮極の要因は人間労働にあるのであるから，計画化の理論的基礎としての表式に労働力部門を編入する事は急務である。この点についての彼の試みは成功したとは言えない。彼自身，バランス

方程式の展開に於て，労働力部門を省いてしまっている。

今一つの再生産論上の問題として，所謂 D−R の問題がある。減価償却基金の一部が投資の源泉になり得る事は既に指摘されているが，その運動の内部まで立入って分析する必要がある。ランゲの更新理論は決してこの問題を解明するものでない。社会主義経済では生産の物質的基盤もより強固であるから，固定生産手段に関する諸研究は精密に行なわれる必要があり，この点彼の研究を過小評価する事はできないが，しかし彼の更新理論は，彼自身の投入産出分析との結合力も未だ弱いものである。

動学的投入産出分析としても，彼の展開は，解の運動・安定性，諸パラメーター間の関係等，問題を残している。技術進歩，労働生産性向上の問題の表式的解明も，計画経済に於て重要である。

再生産表式の計画経済に於る理論的意義が最もよく現われるのは，最適国民経済計画モデル作成の場合であろう。ランゲは社会主義計画経済に於ては，投資率は計画的に決定される，と述べている。α_i は定義から明らかな様に，不等式

$$0 \leqq \alpha_i \leqq 1$$

を充たしている。この不等式を充たすをどのように選ぶか，という問題は当然計画経済論の数学的展開に於て解明されなければならない。これは「再生産の自由度[(5)]」と関係している。α_i は当然の事ながら均衡条件をも充たさなければならないが，均衡条件のみでは α_i は決定されない。

最適計画の見地より α_i を決定するとするならば，目的函数が必要である。目的函数としては，社会的厚生や一定期間内の総生産等を採用する事もできる。バランス方程式や再生産の均衡条件等は，この目的函数に対する条件式を構成する。従って，このような計画モデルは，再生産法則の支配の下に何等かの経済量の最大（最小）化問題を現わす事になる。ランゲのバランス方程式に見られるように，動学分析では微分方程式や差分方程式等の函数方程式が基礎となっているので，この計画モデルの展開は，変分法等の応用を必要とするであろう[(6)]。

〔IV〕

ランゲは国民経済管理の諸問題にサイバネティクスを応用する事を試み，その研究を通じて，サイバネティクス的思考が，全体と自己発展の過程の問題という哲学的問題の解決に役立つ，という結論に達した。ランゲによれば，全体とは，諸要素が因果関係の連鎖によって結びつけられている物質のシステムで，このシステムは構成諸要素の性質とは異なる性質をもち，要素の運動法則そのものからは導出されない固有の運動法則をもつ。例えばある社会構成体は全体の一つである。かかる全体の存在は，発展過程の弁証法的性格と関係があるが，ランゲは矛盾による発展過程をサイバネティクスの観点より次のように考える。即ち，全体をなすシステムの中には，不変の状態ではシステムの持続を不可能にするような矛盾が現われ，これを消滅させるような変化をシステムの中に呼起こす。しかし，この変化は次には矛盾の導き手になり，更にシステムの中に新しい変化が呼起こされる。このようにして，全体をなすシステムは決して不変の状態に留まる事はなく，発展過程を踏む。この過程で，システムには「新しい性質」と「新しい法則性」が生じる。

以上の全体及びその発展過程に関する彼の考察は次の三つの part に分ける事が出来る。

〔1〕「全体」の数学的像の確立・運動の主体について；システムは input（入力）及び output（出力）で現わされる働き＝作用をもつ作用素なる元により構成される集合であり，各元は input，output を通じて相互に関係し合い，特に feedback という結合の仕方が重要である。

〔2〕「運動」の数学的表現，発展法則の展開：作用素の結合がシステムの働き（＝全体としての法則性）を形成する。更に，時間を導入する事により，システムのエルゴード的な発展法則が得られる。エルゴード性と feedback との関連について。

〔3〕以上の数理的展開と，弁証法的発展との関係。総括。

彼の試論の概要は上記の通りであるが，以下順を追って検討する。

〔1〕

システムを構成する作用素とは，物質的対象であって，一定の仕方で他の物質的対象に影響を与えるものを言う。ある作用素への他の作用素からの影響がEの input であり，Eから他へのそれがEの output である。どの作用素も少なくとも一つの input 及び少なくとも一つの output をもつものとし，input は output を一意的に定めるものとする。作用素 E_r の input 及び output は次のようにベクトルで現わし得る。

input ベクトル　$x^{(r)}=(x_1^{(r)},\cdots\cdots,x_m^{(r)})$

output ベクトル　$y^{(r)}=(y_1^{(r)},\cdots\cdots,y_n^{(r)})$

作用素の働きは，$x^{(r)}$ と $y^{(r)}$ との関係として，変換

$$y^{(r)}=T_r(x^{(r)})$$

で現わすことができる。

今，E_1, E_2 の二つの作用素が作用し合っているとする。例えば，E_1 の output が E_2 の input になっているとすると，

$$x_j^{(2)}=y_i^{(1)}\quad(i=1,\cdots\cdots,n;\ j=1,\cdots\cdots,m)$$

でなければならない。この関係，即ち，結びつきは行列を用いて，

$$x^{(2)}=s_{12}y^{(1)}$$

と現わされる。行列 s_{12} を結びつき行列と言う(7)。同様にして，作用素が数多く結びついている場合を考える事ができる。$E_1, E_2, E_3,\cdots\cdots$ 等が結びついている場合，結びつきの chain は

$$x^{(2)}=s_{12}y^{(1)}$$

$$x^{(3)}=s_{23}y^{(2)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

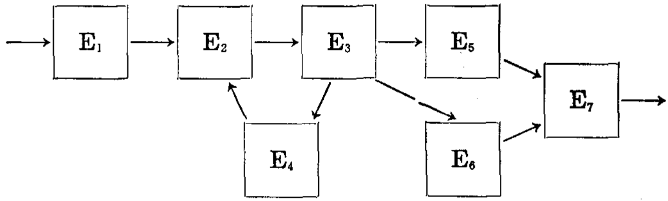
で現わされる。この chain の中で，前に現われた作用素への結びつきがあるならば，それを feedback という。それを現わすベクトル方程式は，例えば，

$$x^{(1)}=s_{r1}y^{(1)}\quad(r>1)$$

のような型をしている。

とまれ，作用素の結びつき方は様々であるが，色々な結びつきの多様な組合

せの集合を結びつきの net（網）と呼ぶ。これは，例えば，次の図の如く示される。



以上の諸定義に引続き，ランゲは，作用素のシステムとは，結びつけられた作用素の集合の事であり，システムの構造とは，システムの作用素の間の結びつきの net の事である，と定義している。

さて，N コの作用素からなるシステムの構造を数学的に表現しよう。この時，作用素の結びつきは，N(N－1) コの方程式

$$x^{(s)}=s_{rs}y^{(r)} \quad (r, s=1, \cdots\cdots, \mathrm{N};\ r\neq s)$$

で現わされる。$r=s$ の時，s_{rs} は 0-行列とすると，システムの構造行列

$$s=\begin{bmatrix} 0 & s_{12} & \cdots\cdots & \mathrm{S}_{1\mathrm{N}} \\ s_{21} & 0 & \cdots\cdots & \mathrm{S}_{2\mathrm{N}} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \mathrm{S}_{\mathrm{N}1} & \mathrm{S}_{\mathrm{N}2} & \cdots\cdots & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる。この行列はシステムの構造の性質を現わしている。細胞行列 $s_{rs}(r>s)$ は，もしそれが 0-行列でないならば，feedback を示している。

システムとシステムとが相合して，より高次のシステムを形成する場合にも，以上と同様の議論が成立つ。

〔2〕

システムの作用素の働きは，変換 T_r を用いて，

$$y^{(r)}=\mathrm{T}_r(x^{(r)}) \quad (r=1, \cdots\cdots, \mathrm{N})$$

と現わされる。一方，$x^{(s)}=s_{rs}y^{(r)}$ であるから，

$$x^{(s)}=s_{rs}\mathrm{T}_r(x^{(r)})$$

となる。今，

$$R_{rs}=s_{rs}T_r$$

と置けば,

$$x^{(s)}=R_{rs}(x^{(r)}) \qquad (8)$$

が得られる。全く同様にして,

$$y^{(s)}=P_{rs}(y^{(r)}) \quad 但し, \quad P_{rs}=T_s s_{rs} \qquad (9)$$

となる。

この変換(8), (9)がシステムの働きを現わしており，システムの作用素のinput亦は output が新しい input 亦は output にどのように変換されるかを示している。ランゲは，マルクスの表現を借りて，この変換を“システムの運動の内的法則”と呼んでいる。

ここで，システムの作用素の input の状態ベクトルを

$$X=(x^{(1)}, \cdots\cdots, x^{(N)})$$

で定義し，亦，output のそれを，

$$Y=(y^{(1)}, \cdots\cdots, y^{(N)})$$

で現わす。(8) 亦，X，Y の変換後の状態を X′，Y′，システムの作用素の働きの行列 T,

$$T=\begin{pmatrix} T_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & T_N \end{pmatrix}$$

システムの構造行列を S，更に変換のオペレーター R，P を

$$R=\begin{pmatrix} 0 & R_{12} & \cdots\cdots & R_{1N} \\ R_{21} & 0 & \cdots\cdots & R_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{N1} & R_{N2} & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}, \quad P=\begin{pmatrix} 0 & P_{12} & \cdots\cdots & P_{1N} \\ P_{21} & 0 & \cdots\cdots & P_{2N} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ P_{N1} & P_{N2} & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

で現わす。(8)は行列方程式の型式で,

$$\begin{pmatrix} 0 & x^{(2)} & \cdots\cdots & x^{(N)} \\ x^{(1)} & 0 & \cdots\cdots & x^{(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{(1)} & x^{(2)} & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & R_{12}(x^{(1)}) & \cdots\cdots & R_{1N}(x^{(1)}) \\ R_{21}(x^{(2)}) & 0 & \cdots\cdots & R_{2N}(x^{(2)}) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ R_{N1}(x^{(N)}) & R_{N2}(x^{(N)}) & \cdots\cdots & 0 \end{pmatrix}$$

のように現わされるから，

$$X'=R(X) \qquad \text{但し } R=TS$$

同様にして，

$$Y'=P(Y) \qquad \text{但し } P=ST$$

が得られる。この二つの式より明らかなように，システムの働きを規定するのは，行列T及びSである。このように作用素のシステムは，全体としてのシステムがもつ独自の働き＝“運動法則”に従う。Sによって表現される構造は，システムに全体としての特質を与えるものに他ならない。同一の作用素から構成される二つのシステムも，作用素の結びつきが異なれば，異なる働きをもつ異なるシステムとして区別される。かくして，全体の問題，即ち，その作用の法則性が，各々の作用素の作用だけからは導びかれない，と言う問題が説明される事になる。

以上のような“運動法則”を動学化する為に，$x^{(r)}$ と $y^{(r)}$ との時間的づれ＝反応時間 θ を導入する。この時，運動法則は，

$$x^{(s)}_{t+\theta^{(r)}}=R_{rs}(x_t{}^{(r)}), \qquad y^{(s)}_{t+\theta^{(s)}}=P_{rs}(y_t{}^{(r)})$$

となる。これより，

$$X_{t+\theta}=R(X_t), \qquad Y_{t+\theta}=P(Y_t)$$

となる。ところで，時間に伴う作用の仕方により，作用が一回限りの場合，漸次的且段階的な場合，漸次的且連続的な場合の三つの case が考えられる。各々の case について，変換を現わす方程式，

$$X_t=R(X_{t-\theta}), \qquad X_t=\sum_{\tau=0}^{\theta} R(X_{t-\tau,\tau})$$

$$X_t=\int_0^{\theta} R(X_{t-\tau},\tau)\,d\tau$$

が得られる。Yについても同様。このように，システムの運動法則はベクトル函数方程式で現わされる。システムの働きは，時間に伴うシステムの発展という特徴をもつ。方程式をシステムの運動の時間的法則，その解をシステムの発展法則と呼ぶ。[9]

ランゲは，システムの発展とエルゴード性とを結合する。エルゴード過程と

は，時間に伴なう推移が，システムの初期状態に依存しないような発展過程である。今，このような発展を現わす方向函数を $\hat{X}_t$ とすると，$\hat{X}_t$ はシステムの状態のスタンダードな値を定めている。エルゴード性の表現は

$$\lim_{t\to\infty} X_t=\hat{X}_t$$

であるが，発展の乱れ $\varDelta X_t$ を

$$\varDelta X_t=X_t-\hat{X}_t$$

で定義すると，エルゴード性は

$$\lim_{t\to\infty} \varDelta X_t=0 \tag{10}$$

で示される。

乱れ $\varDelta X_t$ が余り大きくないならば，その時刻を $t=z$ として，第二の場合には，方程式

$$\varDelta X_t=\sum_{\tau=0}^{\theta}\left[\frac{\partial R(\tau)}{\partial X_{t-\tau}}\right]_{X_{t-\tau}=\hat{X}_{z-\tau}}\varDelta X_{t-\tau}$$

が得られる。この場合の特性方程式は，

$$\left|\sum_{\tau=0}^{\theta}\left[\frac{\partial R(\tau)}{\partial X_{t-\tau}}\right]_{X_{t-\tau}=\hat{X}_{z-\tau}}\lambda^{-\tau}-I\right|=0 \tag{11}$$

となる。特性根を $\lambda_j(z)$ とすると，解は，

$$\varDelta X_t=\sum_j K_j(z)(\lambda_j(z))^t$$

と現わされる。(10)が成立つ為には，$|\lambda_j(z)|<1$ でなければならない。その為の必要十分条件は，

$$\sum_{\tau=0}^{\theta}\left[\frac{\partial R(\tau)}{\partial X_{t-\tau}}\right]'\sum_{\tau=0}^{\theta}\left[\frac{\partial R(\tau)}{\partial X_{t-\tau}}\right]_{X_{t-\tau}=\hat{X}_{z-\tau}}-I$$

が定号負値の行列となる事である。[10] 更に，エルゴード性と feedback との間には次のような重要な関係がある。

命題　少なくとも一つの feedback をもつシステムだけがエルゴード的に発展し得る。

実際，(11)に於て，$\left[\frac{\partial R(\tau)}{\partial R_{t-\tau}}\right]_{X_{t-\tau}=\hat{X}_{z-\tau}}$ の対角要素は0であり，しかももしシステムが feedback をもたなければ，対角線より下にある要素も0となる。[11] 従

って(11)の根 $\lambda=0$，この時，ΔX_t は不定であり，0に収束しない。

このような feedback を補償作用をもつ feedback といい，システムの舵とも呼ぶ。そして，乱れの消滅の過程を自動制御と呼ぶ。

エルゴード的な発展過程については，次の三つの問題が考えられる。即ち，i）エルゴード性の領域の問題。ii）エルゴード性の時間的持続の問題。iii）乱れの消滅の速さ。この三つは相互に密接に関係している。成長（熟練）したシステムは，大きな乱れ ΔX_t にも耐えられるし，長期間エルゴード性を保持し得る。亦，乱れも速やかに消滅していく。これに反し，老化したシステムは，エルゴード性の領域も狭く，小さな乱れに対処し得ず，エルゴード性を短時間保持するに過ぎない。亦，乱れの消滅も緩やかである。老化したシステムは乱れに対する抵抗力を失い，自然淘汰されていく。

〔3〕 以上に見てきたような発展過程の弁証法的性格はどこにあるのだろうか。ランゲは次のように云う。若し一部の input と output とが発展の方程式を満たすならば，他の input と output とは満たさないような状態をとる場合，システムの各々の作用素の input 及び output の状態の間に矛盾がある，という。即ち，システムの発展過程は，システムの中に生じる矛盾がその絶え間ない運動と発展とを引起すような過程である。

以上がランゲによる弁証法的発展過程の数学的定式化である。次に若干の問題点を指摘する。

先ず，彼の「全体」像の数学的把握は，弁証法的唯物論を引合に出す程完全なものでは無い。その事は彼の弁証法的発展過程をみれば明らかになる。即ち，彼は矛盾を〔3〕で述べたように把握するのであるが，その矛盾は発展過程に於て乱れとなって現われる。この矛盾を解決・止揚するものが feedback である。このような矛盾の把え方では，運動の原動力たる矛盾の極く一部を把えたに過ぎないであろう。しかも，彼はこの矛盾の原因を何等説明していないのである。彼は全体の一例として社会構成体を上げたが，その場合，生産力と生産関係との矛盾は，彼の矛盾の把握とどういう風に関係するのであろうか。[12] 更に，発展過程に関して言えば，方向函数，エルゴード仮設の導入は全く天下り的である。

少なくとも，$\hat{X}_t$ がどのように決定されるのか，その決定の論理を弁証法的に説明する必要がある。彼の展開は，むしろ混合経済体制論の展開であって，弁証法的発展過程のそれではない。このように，彼の「全体」なるものは，弁証法的運動の中に措定されるとしても，螺旋的発展過程の局所にあるに過ぎないのである。

このように見てくる時，彼の試論はその目的を達成したとは言い難い。

ところで，以上の彼の展開の中で，どれだけサイバネティクスが有効であったかは疑問である。しかし，「システム」という考え方は経済学に於ても重要である。従来のシステムという概念は，固定的な存在を意味するものであり，その限りでは，一国民経済の把握に際し，限界がある事は否定出来ない。だが，我々がサイバネティクスや，情報科学を適用して経済現象を分析する場合，既存の，自然科学・工学の分野で発展した理論を機械的に応用するのではなく，むしろ，経済分析がそれらの理論の一の母体になるべく，適用すべきであろう。

サイバネティクス等を応用した経済分析は，再生産分析のより発展したものとして位置付けられなければならないだろう。再生産表式分析や投入産出分析等は主として物的生産の部面を対象としているが，再生産構造の総体的把握を行なう為には，上述のような研究が必要とされるであろう。社会内分業の全ての諸環とそれらの機能が把握されて，初めて資源配分の問題も解決されるのである。

以上で主な問題点を指摘し得たと思う。その一つ一つを解明していく事が，筆者の今後の課題である。

〔注〕

(1) 彼は最終生産物が輸出される場合も考えており，必らずしも closed な場合だけを考えているのではない。

(2) 重根の場合も議論は本質的に変らない。

(3) τ_1, τ_2 以外にも(7)を成立させる点が軸上に存在する。τ_1 以外の点を選ぶと，$\omega>T$ が成立つ。従って，彼の主張を全面的に否定はできない。猶を，命題一は拡大再生産の場合にも同様に成立つ。

(4) これを指摘したのは B. ダダヤンである。「社会主義的再生産の経済モデル」B. ネムチノフ編『経済学研究に於る数学利用』II巻，1961年。更に高須賀義博

『再生産表式分析』新評論，1968年。を参照されたい。

（5） B. ダダヤン『社会主義再生産の経済数学的モデル化』，1963年。

（6） ポントリャーギンの最大値原理等有効であろう。

（7） s_{12} の元は 0 亦は 1 である。実際，$x_j^{(2)}=y_i^{(1)}$ が成立てば，s_{12} の (i, j) 元は 1 であり，成立ない場合は 0 になる。更に，全ての行及び列には高々一回限り 1 が現われる。

（8） ランゲは，$X=(x^{(1)}, \cdots\cdots, x^{(N)})$ は

$$X=\begin{pmatrix} x^{(1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & x^{(N)} \end{pmatrix} \text{亦は,} \quad X=\begin{pmatrix} 0 & x^{(2)} & \cdots\cdots & x^{(N)} \\ x^{(1)} & 0 & \cdots\cdots & x^{(N)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x^{(1)} & x^{(2)} & \cdots\cdots & x^{(N)} \end{pmatrix}$$

と同値であると考えており，三つが各々混用されている。これは内容的同一性に基づく同値関係であろう。

（9） この事に関して，ランゲは次のような命題を得ている。即ち，システムの初期状態が与えられれば，システムのその後の発展全体が決定される。

(10) P. サムエルソン『経済分析の基礎』，邦訳 456 頁参照。

(11) 数式操作の都合で，$\left[\dfrac{\partial R(\tau)}{\partial X_{t-\tau}}\right]_{X_{t-\tau}=\hat{X}_{z-\tau}}$ は転置されている。従って，正確には，この行列の対角要素より上にある要素が feedback を現わしている。

(12) 構造行列 S は一の関係を現わしている。しかし，これを生産関係と対比する事はできない。猶を，彼の場合，T と S とは全く独立して存在しているが，彼の所説の範囲内でも，両者が関連しあっているとすべきであろう。作用素の作用と結合とは，決して無関係ではないのである。

補注．本稿で取上げた O．ランゲの著書には次の様な邦訳がある。

『再生産と蓄積の理論』玉垣良典・岩田昌征訳，日本評論社，1966年。

『システムの一般理論』鶴岡重成訳，合同出版，1969年。

(1970. 10. 12)

(筆者の住所：東京都町田市相原町 1133-32)