逐次モデルについて

神田祐一

この小論は連立方程式モデルの推定にかんする議論が端緒となって起ったモデルの逐次性と相互依存性という問題を逐次性の側からとらえ，逐次モデルの経済分析における位置を定めるとともに，従来の問題点を整理するために書かれたものである．

この小論は主としてベンツェル及びハンセンの論文の紹介からなる.[1] すなわち，第2節及び第3節の後半がそれであるが，第1節は逐次モデルを私なりに定式化してみたもの，また第3節の前半は従来の推定論を見方をかえて整理してみたものであり，第4節は主としてベンツェル及びハンセンの論文にたいする私のコメントである．

I 逐次モデルの概要

本節は逐次モデルの概要を説明するのが目的である．議論に入る前に以下のごとく記号を定めておく．経済理論を方程式の体系として定式化したものをモデルと呼ぶが，モデルはn個の方程式の体系から成るものとする．理論が説明しようとする変数は内生変数であり，$y_t(1)$, $y_t(2)$, …, $y_t(n)$ で示し，これらの変数の列ベクトルを $y_t=\{y_t(1), \cdots, y_t(n)\}$ と書くことにする. ここで添字 t は期間を示す. 次にモデルにおいて内生変数には影響を与えるが，それ自体は体系内の内生変数によって影響を受けない変数を外生変数と呼び， $x_{t-\gamma}(j)$ $(\gamma=0, 1, \cdots, p;\ j=1, \cdots, m)$ で示す．このモデルにはラグをともなった内生変数 $y_{t-\tau}(i)$ $(\tau=1, \cdots, q;\ i=1, \cdots, n)$ も含まれていることがある．外生変数とラグをともなった内生変数は期間 t においてモデルにたいし所与とみなされるから，この2者は先決変数と呼ばれる．先決変数の列ベクトルは $z_t=\{x^*, y^*\}=\{x_t, x_{t-1}, \cdots, x_{t-p};\ y_{t-1}, \cdots, y_{t-q}\}$ である．このベクトルは $m(p+1)+nq=s$ 個の要素をもつ．

以上で変数の定義をおわり，次にリニヤーモデルを次式のごとく定義する．

(1.1) $A\,y_t=B\,z_t+C$

ここで A は a_{ij} を要素とする非特異な $n \cdot n$ 係数行列である．またBは b_{ik} を要素とする $n \cdot s$ 係数行列であり，$C=\{c_1, \cdots, c_n\}$ は定数項である．

逐次モデルとは，リニヤーモデルの特殊な型としてつぎのふたつの条件を充たすも

---

1) R. Bentzel and B. Hansen; [1].

のを言う．

1. 内生変数のうち，少くともひとつは先決変数のみから決定され，その他の内生変数は先決変数及びすでに決定された内生変数からひとつづつ順に決定される．

2. 以上の内生変数の決定関係は一方的であり，逆方向に解釈することができない．

このふたつの条件はモデルがノンリニヤーの場合でも同じである．リニヤーモデル(1.1) において条件1は内生変数の係数行列Aが主対角要素すべて1の三角行列であることと同値である．この三角行列を A^* としよう．A^* はその要素 a_{ij} が $i<j$ なるときゼロ，$i=j$ なるとき1の行列である．条件1を充たす体系 $A^*y_t=Bz_t+C$ において条件2が加わるならば，この体系の i 番目の方程式において変数 $y_t(i)$ が z_t とすでに決定された $y_t(1),\cdots,y_t(i-1)$ とから一方的な原因結果の関係として決定される．次に $i+1$ 番目の方程式では，i 番目の方程式において決定された $y_t(i)$ が $y_t(i+1)$ を決定する原因となるのである．このようにして期間 t の内生変数はひとつづつすべて決定される．かくして i 番目の方程式において $a_{ii}=1$ を係数としてもつ内生変数 $y_t(i)$ は結果変数と呼ばれ，z_t 及び $y_t(1),\cdots,y_t(i-1)$ は原因変数と呼ばれるであろう．またこのような一方的な原因結果の関係は因果性と呼ばれる．かくして逐次モデルの意図するものは，経済諸量間に存在する一方的な原因結果の関係を記述することなのである．条件1と2を充たさないモデルを相互依存型のモデルと呼ぶことにする．相互依存型のモデルは逐次モデルのごとき因果性の記述を目的とせず，ふたつ以上の内生変数の同時的決定を説くモデルである．条件1を充たさないモデルはもちろん相互依存型であるが，この条件だけでは逐次モデルであるために充分ではないことに注意すべきである．[1]

---

1) たとえば需要 x_t^D と供給 x_t^S との各期における瞬間的均衡を説明するモデル

$$x_t^D=ap_t+b$$
$$x_t^S=cp_{t-1}+d$$
$$x_t^D=x_t^S \qquad \text{（ここで } p_t \text{ は価格をあらわす）}$$

において，内生変数は x_t^D, x_t^S, p_t である．需要方程式を p_t について規準化し，方程式の順序を入れかえれば，このモデルは

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & e & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_t^S \\ x_t^D \\ p_t \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} cp_{t-1}+d \\ 0 \\ f \end{pmatrix} \qquad \text{ここで } e=-\frac{1}{a},\ f=\frac{b}{a}$$

となるが，p_t は需要方程式において x_t^D を説明する変数であり，x_t^D によって決定される変数ではない．なお以下の叙述においても，このモデルにおけると同じように，本節で用いられた記号 y_t, x_t, z_t を必ずしも用いることなく，経済学において慣例となっている記号を場合に応じて用いることにする．

逐次モデルの内生変数の係数行列が三角になるという条件については，竹内

II 逐次モデルの経済理論的基礎

モデルの逐次性と相互依存性を区別するのに因果性なる概念が強調されたが，逐次モデルは経済理論的にみてどのような基礎の上にたつものであろうか．逐次性と相互依存性の区別に対応する経済理論的基礎は，不均衡分析と均衡分析である．動学理論において均衡分析が各期における経済諸量間の瞬間的均衡を主張するのにたいし，不均衡分析にあっては均衡は特殊な条件のもとでしか成立しないものとして排除される．この不均衡法はストックホルム学派の期間分析の主要なトゥールであり，経済理論のごく抽象的な段階においてモデルを構成する場合，不均衡法によれば逐次モデルの構成がつねに可能となるということがベンツェル及びハンセンによって詳細に説明されている.[1] このようなきわめて高い抽象度で構成されるモデルは basic model と呼ばれ，次のような定義がなされる．すなわち，考察対象たる社会の各経済主体及び各単一財にたいし完全で explicit な関心の払われているモデルが basic model である．basic model と期間分析の方法との結びつきは次のようなものである．

経済は経済主体がそれぞれの計画を実現しようと努力することによって発展していくのであるが，経済主体の行動様式に注目するならば，彼等はまず前期の結果を評価し（accounting），その評価によって未来にたいする期待を生み（expectation），期待にもとづいて計画をたて（plan），これを実現しようと努める（action）．ところで計画は必ずしもそのまま実現されるとは限らないから，一般に計画と結果との間にはくい違いが生ずるであろう．ここに期待ないし計画をあらわす事前的な ex ante 変数と行動ないしその結果を示す事後的な ex post 変数とが区別される．また計画がひとたびたてられるならば，事後的な結果に照らして再び新たにたてられるまでの時間の長さが期間として定義されるのも，以上のごとき考察にもとづくわけである．

ストックホルム学派の期間分析によれば basic model はどんな場合にも逐次モデルとして構成することができるという basic model の逐次的性格にかんしては，前記ベンツェル及びハンセンの論文において詳細に展開されているが，ここではのちに紹介する議論のため，不均衡法にもとづいて構成されたモデルの例を引用しておく．以下の記号は Y: 所得，C: 消費，I: 投資で a, b, c は定数．プライム（$'$）は事前的変数であることを示す．

まず今期において期待される所得は前期に実現された所得の1次函数である．

清；［3］p.218 から示唆を受けたものである．

モデルが逐次モデルであるために私が条件1と2の両方をとりあげたのは，逐次モデルの意味する因果性を強調せんがためであるが，この点にかんしては溝口敏行氏からの示唆をいただいた．

1) R. Bentzel and B. Hansen；［1］，pp. 156〜160.

(2.1)　$Y'_t = a_1 Y_{t-1} + a_2$　　(expectation)

この期待所得のもとで消費者は次のような消費計画をたてる.

(2.2)　$C'_t = b_1 Y'_t + b_2$　　(plan)

一方，投資計画は前記の所得に依る.

(2.3)　$I'_t = c_1 Y'_{t-1} + c_2$　　(plan)

われわれの例では，消費及び投資はたまたま計画どうり実現されるものとする.

(2.4)　$C_t = C'_t$　　(action)

(2.5)　$I_t = I'_t$　　(action)

事後的な所得は次のような恒等式をとうして現われてくる.

(2.6)　$Y_t = C_t + I_t$　　(accounting)

かくして期間における変数は残らず決定された. 同じ体系は期間 $t+1$ にたいしても変数の値を生む. すなわち

$$Y'_{t+1} = a_1 Y_t + a_2$$

等々. 体系 (2.1)−(2.6) は6個の内生変数を含む6個の方程式の体系からなる逐次モデルであることが明らかである.

Ⅲ　逐次モデルの推定

次に実際にデータを逐次モデルに適用して分析を行う場合について考えよう. まず逐次モデルの推定はどのようにして行われるであろうか. モデル (1.1) に攪乱ないし残差項 $e_t = \{e_t(1), \cdots, e_t(n)\}$ を導入した確率モデル

(3.1)　$Ay_t = Bz_t + C + e_t$

を考えよう. ここで $Ee_t(i)z_t = 0$ 及び $Ee_t(i)e_{t-\tau}(i) = 0$ ($\tau = 1, \cdots, q$) を仮定する. さて $A = A^*$であるならば，i番目の方程式において $Ee_t(i)\ y_t(i-k) = 0$ が $k = 1, \cdots, i-1$ のすべてについて 充たされていることと $Ee_t(i)\ e_t(i-k) = 0$ が $k = 1, \cdots, i-1$ のすべてについて 充たされていることとは 同値であることが 容易に 明らかとなる. $A \neq A^*$ なるときにはこのような関係は充たされない. 以上の関係は次のことを示すものである. すなわち，逐次モデルにおいては各方程式の残差項の間に相関が存在しなければ，各方程式に原因変数として入ってくる内生変数とその方程式の残差項には相関が存在しないということである. よって逐次モデルにおいては残差項の間に相関が存在しないものと仮定しよう. この仮定と $Ee_t(i)e_{-\tau}(i) = 0$ なる仮定から $Ee_t(i)\ e_{t-\tau}(i) = 0$ ($i \neq j, \tau = 1, \cdots, q$) が導かれる. このような仮定のもとでは, 個々の方程式に，結果変数を被説明変数，原因変数を説明変数として別々に最小自乗法を適用して，パラメータの不偏かつ一致の推定値を得ることができる. この場合，残差項には特定の分布を仮定しなくてもよい. これがウォルトのいわゆる distribution-free なる方法であるが，管理実験が不可能であり，正規分布の仮定の充たされないことが多い経済現象の分析においてかかる方法をとりあげたことは彼の merit として注目さ

れる.[1] なおこの場合，残差に正規分布を仮定すれば最小自乗推定値は最尤推定値と一致する.[2]

さて前節でみるとおり，逐次モデルの一般性が保証されるのは不均衡法にもとづく basic model においてであったが，basic model を用いて直ちに実証分析を行うことができるわけではない．現実の経済分析において適用可能なモデルはきわめて高い抽象度で論じられる basic model にたいし，変数の消去，aggregation，その他の単純化を行い，データを適用することができるような型とした derived model である．このような derived model においてもなお逐次性が保証されるであろうか．ふたたびベンツェル及びハンセンはさきに例示した国民所得モデルを用いて，モデルに逐次性が失われ相互依存性の現われる3つの理由をあげている.[3]

1　モデルには事前的変数と事後的変数の2通りが含まれているが，事前的変数の値はこれを知ることができない．従ってデータを適用して分析を行う際にはモデル(2.1)−(2.6) から事前的変数を消去し，事後的変数のあいだの関係

(3.2)　$C_t=b_1^*\ Y_{t-1}+b_2^*$　　ここで $b_1^*=a_1b_1$，$b_2^*=b_2+a_2b_1$

(3.3)　$I_t=c_1Y_{t-1}+c_2$

(3.4)　$Y_t=C_t+I_t$

を用いて分析を行う．従ってもしわれわれが消費の事前的関係を示すパラメータ b_1，b_2 を推定しようとしても，直接には推定可能でない．そこで b_1，b_2 を直接に推定出来るようにするため，新たに変数 $y_t=Y_t-Y'_t$（期待されない所得）を定義し，この変数を確率変数と考える．$Y_t=Y'_t+y_t$ を (2.1) に代入し，(2.1)−(2.6) から事前的変数を消去すれば，体系

(3.5)　$C_t=b_1Y_t+b_2+z_t$　　ここで $z_t=-b_1y_t$

(3.6)　$I_t=c_1Y_{t-1}+c_2$

(3.7)　$Y_t=C_t+I_t$

が得られる．この体系は相互依存型である．この例は，事後的変数と事前的変数との差を確率変数と考えることによってモデルに逐次性が失われ，相互依存性の現われることがしばしば起りうることを示している．

2　次に問題となるのは時間にかんする aggregation の結果である．単純化のため，事後的変数のあいだのみについて成立する関係 (3.2)，(3.4) と，(3.3) のかわりに投資が外生変数 Z によって決定されるという仮説から導かれる (3.3)′ $I=F(Z)$ を加えた体系 (3.2)，(3.3)′，(3.4) を考えてみよう．ところでこのような逐次モデル

---

1) H. Wold；[5].

2) たとえば L. R. Klein；[2]，pp. 111〜113. なお H. Wold；[4] をも参照.

3) R. Bentzel and B. Hansen；[1]，pp. 160〜164.

の単位期間はストックホルム学派のきわめて短い単位期間であるから，実際にデータを適用して分析を行う際には，モデルにたいし数期間にわたる aggregation を行い，より長い時間間隔にたいして成立する関係を決定しなければならない．いまかかる長い時間間隔——これを１年としよう——が（$n+1$）単位期間を含むものとすると，１年間について成立する消費，投資，所得のあいだの関係は

(3.8)　$\Sigma C_{t+i}=b_1{}^*\Sigma Y_{t+i-1}+b_2{}^*(n+1)$

(3.9)　$\Sigma I_{t+i}=(n+1)\ F(Z)$

(3.10)　$\Sigma Y_{t+i}=\Sigma C_{t+i}+I_{t+i}$

である．ここで合計は $i=0$ から n まで行われる．ΣC_{t+i}, ΣI_{t+i}, ΣY_{t+i} をそれぞれ，C_T, I_T, Y_T と書く．n が大で体系が発散的でないかぎり $\Sigma Y_{t+i-1}\doteqdot\Sigma Y_{t+i}=Y_T$ である．次に比較の便宜上 $Z=Y_{T-1}$ と仮定すれば，1年間について成立する関係は

(3.11)　$C_T=b_1{}^*Y_T+B_2$　　ここで $B_2=b_2{}^*(n+1)$

(3.12)　$I_T=g(Y_{T-1})$　　ここで $g=(n+1)\ F$

(3.13)　$Y_T=C_T+I_T$

となって，相互依存型のモデルが得られる．結局時間にかんする aggregation が相互依存性をもたらしたことになる．

3　1単位期間内の aggregation もまた derived model に相互依存性の生じる原因となる．いま basic model が A，B，C，Dという四つの経済主体の行動を記述するものとする．そしてBの行動はAの行動に，Cの行動はBの行動に，Dの行動はCの行動にそれぞれ依存するものとしよう．このとき derived model を構成する際に，AとCにかんする量について aggregation を行い，BとDにかんする量について agreggation を行うことが必要となるならば，このような aggregation を行うことによって derived model は相互依存型のものとなるであろう．

以上のごとき３つの理由によって derived model に相互依存性が生じうるならば，逐次モデルの経済分析における立場は，たとえばウォルトの主張するごとき，[4] 一般的なものではないであろう．従って逐次モデルの実証的分析における適用可能性ないし有用性がどの程度のものであるかを吟味するためにはベンツェル及びハンセンによって提起されたこれら３つの理由を詳細に検討していかなければならないであろう．この作業は，もちろん，この小論においてはたすことのできることではなく，あとにゆづりたい．私はこれまでにとりあげてきた議論について簡単なるコメントを与えるとともに，今後の解決の方向についての私見を述べることによって本稿をむすびたいと思う．

---

4) H. Wold; [4]〜[6].

Ⅳ 結論にかえて

連立方程式モデルとして逐次型が優れているか相互依存型が優れているかという問題は，最初推定上の問題から起ったことは周知である．ところで小論においてとりあげてきたベンツェル及びハンセンの行論はこの問題にたいし経済理論からする接近を行い，私見によれば，次のごとく問題解決の方向を示したものである．

1　モデルの逐次性と相互依存性とをわける経済理論的な基礎は均衡分析と不均衡分析にある．

2　ストックホルム学派の期間分析によれば，basic model が不均衡法によってつねに逐次モデルとして構成されうる．

3　しかし basic model がつねに逐次型であっても，それからみちびかれる derived model には相互依存性の現われる充分なる理由が存在する．

従って今後になさるべき点は，前節でも述べたごとく，derived model に相互依存性の現われる3つの理由の検討である．これらの理由は逐次モデルが動学モデルとしてきわめて一般的な性質をもつというウォルトの主張にたいして否定的な解答を与えるには充分であろう．なかんずく，第2の理由は逐次モデルを実際の分析に用いようとする場合致命的なものとなることが考えられる．第1の理由については，相互依存性をもたらす原因となった確率変数の導入という手続きが一般的であるかどうかが問題となるし，また第3の理由については，このような理由そのものが納得のゆくものであるかどうかについての疑いももたれるのである．ところで第2の理由について考えてみるかぎり，解決の示唆は理論的な面からの接近ではなく，個々の分析対象に応じた実証的接近によって得られるように思われる．単位期間の長さは分析対象によって異るのであり，農産物の供給にみるごとく，1年前の価格によって決定される関係も存在するわけである．

文　　献

［1］ R. Bentzel and B. Hansen; "On Recursiveness and Interdependency in Economic Models," *The Review of Fconomic Studies*, vol. XXII (3), No. 59, 1954, 153〜168.

［2］ R. L. Klein; *A Textbook of Econometrics*, 1953.

［3］ 竹内清;「最小自乗法をめぐっての若干の覚書」, 商学討究7巻, 2・3号, 1958, 207〜221.

［4］ H. Wold; "Statistical Estimation of Economic Relationships," *Econometrica*, vol. 17, Supplement, 1949, 1〜22.

［5］ ——; *Demand Analysis*, 1953.

［6］ ——; "Causality and Econometrics," *Econometrica*, vol.22, 1954, 162〜77.