О ПИСЬМЕ С.А. ЯНОВСКОЙ ОТ 29-ГО ДЕК. 1955 Г. ПО НЕКОТОРЫМ ФИЛОСОФСКИМ ВОПРОСАМ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛОГИКИ

ТИКАЦУГУ ИВАСАКИ*

Уже до второй мировой войны София Александровна Яновская (1896 г.—1966 г.), покойный профессор Московского Государственного Университета, была известна среди многих ученых-демократов нашей страны. Ее статьи «Категория количества у Гегела и сущность математики» (1928) и «О математических рукописях Маркса» (1933) были переведены на японский язык, и внесли вклад в развитие изучения философских вопросов математики в Японии.

Когда с 1950 г. по 51. в журнале «Вопросы философии» по вопросу логики развернулась дискуссия, Яновская тоже приняла участие в этой дискуссии, опубликовав стаью, посвященную изучению сущности математической логики. В связи с этой статьей я предложил ей вопросы по следующим пунктам. Если изложить вкратце;

1. Как понимать «количество (в математике)»?——Если рассматривать математическую логику как часть математики, то нужно прежде всего характеризовать сущность математики как науки о количестве.
2. Какую сторону объективной реальности отражает математическая логика, если она—часть математики?
3. Относится ли теория Гильберта и Аккермана по традиционным формам суждения *A*, *E*, *I*, *O* к математике?
4. Недостаточна ли как наз. Аристотелевская логика для научного рассмотрения положений по отношению?

Она послала мне следующий подробный ответ. Она хотела, чтовы эти научные письма были опубликованы в журнале «Вопросы философии». К сожалению, это не осуществилось.

Она уже не на этом свете. В 1972 г. ее десять главных работ по истории математики, а также по методологии математики и математической логики были опубликованы в виде сборника, названного «Методологические проблемы науки». Теперь хочу напечатать ее письмо ко мне от 29-го дек. 1955 г., надеясь, что это будет являться дополнением к этому сборнику.

В некрологе С.А. Яновской было написано, «С.А. Яновская была человеком редких душевных качеств, удивительной доброты и отзывчивости. Она никогда не щадила своего времени и сил, чтовы помочь другим. Она всегда щедро делилась своими идеями со своими учениками.»† Ее душевное письмо ко мне, я думаю, свидетельствует о правильности этих слов.

* Профессор (*Kyōju*) Хитоцубаси Государственного Университета, Токио, Япония.

† София Александровна Яновская——некролог. Воп. фил., No. 11, 1966, стр. 183.

* * * * *

Глубокоуважаемый коллега Тикацугу Ивасаки

Вопросы, которые Вы мне поставили, действительно требуют ответа. Правда, ответ этот трудно сформулировать в кратком письме, но я все же попытаюсь это сделать, хотя бы в первом приближении. Должна также с самого начала оговориться, что и у нас в СССР есть разные точки зрения на эти вопросы, и мои ответы могут представлять только одну из них.

То обстоятельство, что одна и та же мысль может быть выражена на разных языках, уже само по себе достаточно ясно свидетельствует о существовании некоторых инвариантов, характерных для самих мыслей, и независимых от языка, на котором они выражены, подобно тому, как то обстоятельство, что разные товары обмениваются друг на друга, заставляет предполагать наличие у них чего-то общего, чем и оказывается их стоимость. В числе таких инвариантов, независимых от способа выражения мысли и определяющих ее структуру, особую роль играют инварианты, определяющие *логическую* структуру мысли. Я не буду пытаться давать сейчас строгое определение этого понятия, тем более, что круг вопросов, связанных с ним, фактически общеизвестен. Оно связано с вопросами о сущности и классификации понятий и суждений, о опособах образования и развития абстрактных понятий, о роли материальной оболочки мысли (языка) для оформления ее логической структуры, о способах выражения зависимости одних суждений от истинности (или ложности) других, и с многими другими вопросами. Здесь мне хотелось бы подчеркнуть только один момент. Именно: то обстоятельство, что какое-либо положение *логически* следует из другого (или других), имеет *объективный характер* и не зависит от аппарата, с помощью которого мы это обнаруживаем. Применяя и развивая свое мышление на практике, люди научились делать правильные логические заключения, и выяснение того, *как* именно они это делают в жизни и в науке, *что* такое логическое следствие, *чем* (и в какой мере) обеспечивается его правильность,—это один из важнейших циклов вопросов, принадлежащих к области логики.

Математическая логика (у нас предпочитают этот термин употребляемому Вами: "символическая логика") предполагает такую общую логику, которая занимается всеми этими вопросами, и относится к ней,—если позволить себе воспользоваться некоторой аналогией,—как телефон к человеческому слуху, или телескоп, микроскоп,—пусть, хотя бы, бинокль—к человеческому зрению. Без ушей и глаз человек не может воспользоваться ни телефоном, ни микроскопом. Без обычной логики не может воспользоваться и аппаратом математической логики. Больше того, в практике обычного мышления люди не выводят логические следствия ни с помощью совершенной конъюнктивной нормальной формы, как это делается, например, в учебнике Гильберта и Аккермана; ни с помощью сокращенных нормальных форм по методам Блэка, Куайна, Нельсона, ни пользуясь методами Порецкого или Шредера, ни даже по фигурам и модусам Аристотеля. Но в более сложных—точнее, более громоздких—случаях такие аппараты помогают. Логика объективных связей вещей, отражаемая логикой человеческого мышления, одна, а таких вспомогательных аппаратов может быть бесчисленное множество. Каждый из них может быть хорош в определенных условиях[1] и плох в других. Каждый представляет собой в некотором смысле машину. Человека нельзя заменить машиной, но люди строят машины в помощь себе, и только реакционеры могут отказываться от помощи машин.

Такие вспомогательные логические "машины" строятся *как математические исчисления*, и уже поэтому относятся в большей мере к области математики. Их построением занимаются преимущественно математики, и притом в связи с решением трудных проблем не только логического обоснования математики, но и самой математики. Вспомним, например, замечательные работы П.С. Новикова и его ученика С.И. Адяна, в которых дается полное решение трудной проблемы тождества "слов" в теории групп (выясняется несуществование алгоритма, решающего эту и ряд аналогичных "массовых" проблем теории групп). Но, конечно, Вы правы, замечая, по существу, что такого рода соображений еще недостаточно для решения вопроса о том, принадлежит ли математическая логика к области математики или нет; что ответ на него зависит от ответа на вопросы о том, что такое математика и как следует оценивать те изменения, которые произошли в этой науке, начиная с конца 19-го века.

Ведь прежде всего ясно, что если математическая логика есть математическая дисциплина, то ее нельзя рассматривать только с оперативной точки зрения. Как наука или как часть науки (отдельная научная дисциплина) она есть не просто аппарат, а некоторая научная *теория*, отражающая какую-то сторону действительного. С марксистской точки зрения всякая правильная (научная) теория должна быть оперативной: закон (объективный закон природы и общества) есть руководство к действию. Если математическая логика есть подлинная наука, то ее оперативность должна быть связана с тем, что она способна правильно отражать какие-то стороны объективной действительности (и отражающего эту действительность мышления). Что же именно способна отражать (в действительном мире и в мышлении) математическая логика? И почему ее следует относить к области математики?

Хорошо обоснованный с марксистской точки зрения ответ на вопрос о том, что такое математика, Вы можете найти в статьях "Математика", "Геометрия" и др., опубликованных во II-ом издании Большой Советской Энциклопедии. Если Вам они недоступны, я попрошу Издательство выслать Вам оттиски этих статей. Со своей стороны мне хотелось бы добавить только, что Энгельс, само собою разумеется не случайно, объединяет изучение пространственных форм и количественных отношений действительного мира в одну науку—математику. Общие черты и тех и других, которые еще у древних вавилонян нашли выражение в *арифметико*-алгебраическом решении *геометрических* задач, а у древних греков в *геометрическом* решении квадратных (у Архимеда и кубических) уравнений,

[1] где им достаточно хорошо отражаются существенные стороны и связи рассматриваемых предметов.

были полностью выявлены созданием теории множеств и затем,—уже в наши дни,—теории алгоритмов. Именно с теорией множеств и теорией алгоритмов и связана, прежде всего, математическая логика.

Во-первых, всякое логико-математическое исчисление, носящее даже специфически логический (дедуктивный) характер, представляет собою алгоритм: аппарат математического доказательства, позволяющий выводить следствия из данных посылок по определенным, строго фиксированным правилам. В этой связи мне хотелось бы отметить, что на соответствующую особенность математических доказательств также обратил внимание Энгельс, когда он объяснял "положительную достоверность, присущую математическим действиям", тем, что они допускают "материальное доказательство, проверку,—так как они основаны на непосредственном материальном созерцании, хотя и абстрактном" (см. Ф. Энгельс, Анти-Дюринг, 1948, стр. 318). При этом Энгельс специально подчеркивал, что обычным логическим умозаключением такая "положительная достоверность" отнюдь не свойственна. Мы бы сказали теперь, что они отнюдь не носят алгоритмического характера.

В настоящее время хорошо известно, что уже для элементарной арифметики не существует логико-математического исчисления, по правилам которого были бы доказуемы *все* содержательно-истинные предложения арифметики (так называемая, 1-ая теорема Геделя); что, иными словами, человеческое мышление не может быть заменено машиной. Из этого не следует, однако, будто человек должен тратить свое время на такие вещи, которые могут быть выполнены—и притом с исключительной быстротой—машной. Тем более, что для разных целей возможны и разные мешины и что последние допускают все большее усовершенствование.

Чтобы покончить с этой стороной вопроса, я хотела бы обратить Ваше внимание на две новые книги: (1) А.А. Марков, Теория алгорифмов (1954) и (2) Н.А. Шанин, О некоторых логических проблемах арифметики (1955), которые я Вам высылаю одновременно с настоящим письмом. Я лично не во всем согласна с А.А Марковым и Н.А. Шаниным, но материальный, хотя в то же время и абстрактный, характер математических доказательств, о котором говорит Энгельс, при изучении этих глубоко продуманных книг делается особенно понятным. (В книге Маркова с этой точки зрения особенно интересны первые две главы и вводные замечания к главе V, стр. 190–191).

Другая сторона логических исчислений, разрабатываемых математической логикой, также делающая их частью математики и связанная с первой,[2] относится к их интерпретации, к тому, что в современной литературе часто называется "семантикой", хотя, на мой взгляд, здесь гораздо лучше было бы употреблять материалистический термин "отражение", которым пользуетесь и Вы.

Что же *отражается* основными логическими исчислениями?——Хорошо известно, что исчисление высказываний может быть истолковано как теория функций от конечного числа аргументов, принимающих, каждый, одно из двух разных значений,—функций, которые сами принимают одмо из этих же двух значений,—

[2] Связь между алгоритмичностью исчисления и существованием у него арифметической модели, как известно, хорошо выражается тем, что всякое непротиворечивое логическое исчисление имеет арифметическую модель, в которой все его доказуемые предложения являются истинными.

т.е. как некоторая, практически очень важная (для счетных машин или электрических релейно-контактных схем, например), математическая теория. Больше того, известно, что само исчисление высказываний (а также его различные видоизменения) можно представить как некоторую алгебраическую систему. Так, и классическое и конструктивное (без закона исключенного третьего) исчисление высказываний суть импликативные структуры, т.е. структуры (*lattices*: частично-упорядоченные множества с двумя операциями: "сложением" и "умножением", соответствующими отысканию точной верхней и точной нижней грани двух элементов), в которых импликацию можно рассматривать как "деление" (отыскание наибольшего "частного" при делении с остатком), если за "умножение" принять конъюнкцию; классическое исчисление высказываний можно представить как дистрибутивную структуру с дополнениями, или, как кольцо вычетов по модулю 2, и т.п. Примеры структур (*lattices*) встречаются в самых различных разделах математики (в теории множеств, в топологии, в теории чисел, в теории вероятностей, в проективной геометрии и многих других). Как и группы или кольца, структуры отображают очень общие свойства некоторых систем объектов, их отношений и операций, относящих к одним объектам системы другие. То обстоятельство, что *исчисление высказываний* также оказывается структурой, подтверждает, с одной стороны, математический характер этого исчисления и свидетельствует, с другой стороны, о том, что и в этом исчислении находят отражение реальные количественные и пространственные отношения вещей действительного мира, проявляющиеся и в некоторых законах мышления. (В применении к модусам силлогизма топологическая интерпретация была, как известно, разработана еще Эйлером и нашла яркое выражение в его сравнении умозаключения по модусу *Barbara* с пространственным отношением включения: "*Если* деньги у меня в кошельке, *а* кошелек в кармане, *то* деньги в кармане.") Наиболее общие законы мышления не случайно совпадают с законами материального мира: ведь мышление отражает этот, существующий независимо от него, мир.

О количественном характере *узкого исчисления предикатов* достаточно ясно свидетельствует уже то, что выполнимые (но не тожественно-истинные) формулы этого исчисления определяют нижнюю или верхнюю грань *числа* предметов области, в которой они истинны: т.е. говорят нам что-то о количестве предметов этой области.[3] Расширенное же исчисление предикатов, с теорией типов или без нее, и есть не что иное, как та иная версия современной *теории множеств*. Основные трудности и наиболее интересные теоремы математической логики связаны с математической *бесконечностью*, рассматриваемой именно как таковая —в ее отношении к *конечному* и к порядковым соотношениям в области бесконечного, т.е. с бесконечностью, рассматриваемой с количественной (в широком смысле слова) точки зрения. Те качественные различия, которые и при таких

---

[3] Это положение остается, как известно, верным и при расширении узкого исчисления, состоящем в добавлении к нему предиката равенства ($x=y$) и кванторов по предикатам, т.е. для так называемого исчисления предикатов второй ступени (с равенством). Именно: утверждение об истинности (или о выполнимости) в данной предметной области некоторой формулы этого исчисления (не являющейся всегда-истинной и всегда-ложной) эквивалентно высказыванию о числ предметов этой области.

рассмотрениях неизбежно обнаруживаются, суть качественные различия в области количественных отношений, а не "качества", как таковые.

Аргументацию в пользу того, что математическая логика есть одна из ветвей современной математики можно было бы развить и продолжить. Здесь мне хотелось бы еще раз отметить только, что относение математической логики к области математики стнюдь не означает ее бесполезности для общей логики. Ведь математика нужна людям не сама по себе, а в связи с ее познавательным значением и практическими приложениями,—в том числе и к развитию других наук. Возвращаясь к уже использованной мною аналогии, можно смело сказать, что вооружившись биноклем математической логики, мы можем лучше разрабатывать и вопросы общей логики, как науки о законах правильного человеческого мышления ("правильного", т.е. верно отражающего то, что происходит в действительном мире).

По поводу других Ваших вопросов более частного характера я позволю себе ограничиться следующими замечаниями:

(1) Вопрос о том, какую сторону действительности отражает импликация, решается не для импликации, как таковой, а для *всего* логического исчисления, в котором мы имеем дело с этой операцией, и притом в зависимости от той или иной интерпретации (модели) этого исчисления. Так, я уже говорила, что в импликативных структурах импликация соответствует, в известном смысле, "делению"—*операции*, обратной конъюнкции (иногда ее называют в этой связи "относительным псевдодополнением". См., напр. *G. Birkhoff*, *Lattice theory*, 1948). Поэтому, если в этих системах имеет смысл конъюнкция, то имеет смысл и импликация. В исчислении классов *импликации* рассматриваемой как отношение, соотвествует отношение *включения* одного класса в другой. В конструктивном исчислении задач А.Н. Колмогорова *истинной импликации* $\vdash A \rightarrow B$ соответствует *сведение* решения задачи B к решению задачи A. В исчислении "массовых проблем" предложенном учеником А.Н. Колмогорова, Ю.Т. Медведевым, *импликации* как отношению $\vdash A \rightarrow B$ соответствует алгоритм, сводящий решение "массовой проблемы" B к решению "массовой проблемы" A. В "натуральном исчислении" Генцена *доказанной импликации* $\vdash A \rightarrow B$ соответствует наличие вывода (по правилам исчисления) формулы B из формулы A. В табличном (матричном) построении классического исчисления высказываний импликация есть одна из действительно существующих 16-ти функций от двух аргументов, отменить существование которой так же невозможно, как запретить существование любого реального предмета, и т.д. Впрочем, об импликации и "парадоксах", связанных с некоторыми ее интерпретациями, существует огромная литература, подробно реферируемая, например, в журнале "*Symbolic Logic*", почему мне и представляется возможным ограничиться сейчас этим общим замечанием.

(2) Я не совсем поняла Ваш 3-ий вопрос. Повидимому, Вы хотите спросить, следует ли изложенную во второй главе учебника Гильберта и Аккермана теорию традиционным форм суждения A, E, I, O противопоставлять теории, принятой в обычных учебниках логики, как математическую—нематематческой?——На этот счет могу сказать следующее:

(a) Силлогистика Аристотеля с ее фигурами и модусами, в известном смысле, так же относится к современным логическим исчислениям, как "Начала" Евклида к современной математике. Она есть тоже некоторый логический аппарат, который может быть использован при выводе логических умозаключений, но которым люди в практике своего повседневного мышления мало пользуются. Здесь (на практике) приходится иметь дело с различными "энтимемами", с использованием дополнительных посылок, которые молча подразумеваются, и т.д. и т.п. Недавно в Институте философии Академии Наук СССР мне пришлось выступать оппонентом по диссертации Ш.Г. Адеишвили, где именно этот вопрос и подвергался изучению. В диссертации выявлялись различные молча подразумеваемые в высказываниях видов A, E, I, O посылки и в соответствии с этим, строилась расширенная теория силлогизмов, более близкая к тому, что действительно имеет место на практике, чем аналогичная теория, развитая во II-ом томе "Алгебры логики" Шредера (*E. Schröder*). Это, мне кажется, хороший пример в пользу того, что разработка соответствующего логического аппарата позволяет лучше разобраться и в явлениях, имеющих место в практике обычного мышления, не происходящего в строгом соответствии с какой-нибудь заранее выработанной программой (как это делается машиной).

(б) Одним из таких логических аппаратов (только одним, отнюдь не обязательным при всех условиях) является изложенная во II-ой главе учебника Гильберта и Аккермана теория суждений форм A, E, I, O (на мой взгляд, кстати, довольно неудачная: недостаточно наглядная). Эта теория (или ее более удачные варианты) пригодна там, где *приходится* иметь дело с понятиями, объем которых неизвестен и может сказаться пустым. Особенно там, где именно эту пустоту и нужно доказывать (не это ли Вы имеете в виду, говоря о *reductio ad impossibile*?). Если мы имеем дело с суждениями: "Киты—млекопитающие", "Киты имеют плавники", то, конечно, мы будем совершенно правы, заключив по модусу *Darapti*, что "Некоторые млекопитающие имеют плавники", потому что киты *заведомо* существуют.

Однако, имея дело с посылками:

"Все действительные числа, равные в квадрате двум, суть *действительные числа*",

"Все действительные числа, равные в квадрате двум, суть *квадратные корни из двух*",

(в тривиальной истинности которых вряд ли кому-нибудь придет в голову сомневаться), мы уже вряд ли будем считать себя вправе сделать (из них!) заключение:

"Некоторые действительные числа суть квадратные корни из двух".

Ведь достаточно в этом выводе заменить всюду "действительные числа" на "рациональные числа" (отчего истинность посылок не нарушится), чтобы получить ложное заключение:

"Некоторые *рациональные числа* суть квадратные корни из двух".

Ясно, что там, где непустота среднего термина не очевидна, нужно либо не допускать правил, аналогичных модусу *Darapti*, либо наложить какие-нибудь ограничения на употребление квантора "все" (не считать, напр., суждение "Все A суть A" всегда-истинным). Словом, применяя какой-нибудь вспомогательный логический аппарат, необходимо заботиться о том, чтобы он был действительно пригоден в данных условиях, чтобы в нем правильно отражались эти условия: обстоятельство, которое *в конечном счете* всегда решается с помощью материалистического *критерия практики*.

Ясно таким образом, что никаких оснований для противопоставления одного из таких аппаратов другому, как математического—нематематическому, не может быть, несмотря даже на то, что в обычных для математики условиях теория, приведенная в учебнике Гильберта и Аккермана, оказывается более подходящей.

(3) Что касается Вашего 4-го вопроса, относящегося к теории отношений, то я лично считаю, что положительные результаты, достигнутые в этой теории, во всяком случае заслуживают изучения с материалистической точкой точки зрения. К вопросу же о структуре суждения (из субъекта и предиката) они имеют лишь косвенное отношение: ведь всякое суждение можно представить как предицирующее что-либо некоторому субъекту, которым могут быть, в частности, и упорядоченные пары или тройки, вообще группы из n предметов. Так, приведенные Вами примеры можно представить в виде: "Для пары <3, 2> (порядок существенен!) выполняется предикат "больше""; "Про пару <Джон, Мери> можно сказать, что они "встречаются""; "Для (упорядоченной) пары <Джон, Мери> выполняется предикат "дает яблоки"". Конечно, это будет насилие над языком, но с логической точки зрения это примерно то же самое, что и замена функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ функцией $f(x)$, где x-вектор в n-мерном пространстве. Таким образом, суждение всегда можно рассматривать как говорящее *что-то* о *чем-то*, независимо от того, идет ли в нем речь о предикате от *одного* аргумента (и соответствующем ему *свойстве*) или о предикате от нескольких аргументов (и соответствующем ему *отношении*). Правда, на па последнем из Ваших примеров особенно ярко видно также, что выделение субъекта и предиката можно производить, вообще говоря, разными способами: можно сказать, напр., что для тройки: <Мери, некоторое множество яблок, Джон>, выполняется предикат: "*Кому-то* получать *нечто* от *кого-то*". Ясно, что и суждение: 3>2, можно различным образом подразделить на субъект и предикат, толкуя его либо как приписывающее предикат "быть больше двух" субъекту 3, либо как приписывающее предикат "быть меньше трех" субъекту 2, либо как приписывающее предикат "больше" упорядоченной паре <3, 2>(что и было сделано выше). Если по какой-либо причине нам необходимо изучить свойство "быть больше двух", мы должны будем выделить в качестве субъекта "3". Но если нас интересует именно отношение "больше", то, чтобы изучить это отношение как таковое, нам придется сделать переменными оба предмета, связываемых им, и изучать то общее (инвариант), что сохраняется в этих изменениях (ведь отношения не существуют без вещей, находящихся в этих отношениях, и лишь изменяя эти вещи, мы и можем выделить (абстрагировать) отношение).

Вероятно, мне уже давно пора остановиться, хотя, быть может, многое еще осталось неясным. Но мне кажется, что основное, что следовало сказать, уже в той или иной мере высказано. И притом высказано не только мною, но и Вами. Ибо это основное состоит в том, что изучая какую-либо теорию, мы должны прежде всего интересоваться тем, что именно отражается ею и где поэтому она может с успехом применяться. Решение вопроса о том, является ли математическая логика матсматической дисциплиной или нет, как раз и нужно для того, чтобы не делать из нее успехов идеалистических выводов (препятствующих, в частности, ее же дальнейшему развитию) и правильно пользоваться ею на практике (в том числе и для развития общей логики).

Что же касается моих конкретных утверждений, то, повторяю, я могу высказать только мою личную точку зрения. Но так как Вас, само собою разумеется, интересуют и другие, существующие у нас в СССР, взгляды на затронутые Вами вопросы, то, может быть, Вы разрешите мне обратиться в редакцию журнала "Вопросы философии" с просьбою опубликовать в журнале Ваше письмо и мой ответ в порядке именно постановки вопроса.

Если Вы почему-либо хотите сохранить инкогнито, я могла бы ограничиться несколькими выдержками из письма без упоминания Вашего имени. Само собою разумеется, что если мои ответы не удовлетворяют Вас или Вы не разделяете моей точки зрения, мне было бы очень интересно узнать об этом (и сообщить редакции).

Весьма признательна Вам за намерение прислать вышедшие номера Вашего журнала "Материализм" (пока я их еще не получила). Должна также попросить извинения за то, что не умею писать достаточно просто и не сумела выполнить моего первоначального намерения написать Вам *краткое* письмо.

С сердечным приветом— С. Яновская

29-го декабря 1955 г.