部分観測下の投資／消費決定問題における ベイズ解の明示的表現について

桑　名　陽　一

1．部分観測下の最適投資／消費決定問題

本稿では，部分観測下の連続時間金融市場における効用最大化問題を考察する．Merton (1971)によって導入された完全観測下におけるモデルでは，不確実性が存在する資産の価格過程が幾何ブラウン運動として定式化され，そのパラメータは既知と仮定される．しかしこの仮定はあまりに理想的である．部分観測下のモデルでは，パラメータに関する経済主体の事前的情報やレジーム・スイッチングなどを取り込むことで，応用上有益な結果を提供することが可能となる．

$n+1$種類の資産が連続時間で取引されている金融市場を考える．$(n+1)$番目の資産は一定の利子が支払われる債券で，価格過程は，

$$p_{n+1,t} = p_{n+1,0}e^{rt}$$

で与えられる．ここで，rは正の定数である．その他のn資産は予測不可能な価格変動を有し，次のようにモデル化される．$\mathbb{R}^n_+$に値をとる確率過程$\boldsymbol{p}_t = (p_{1,t}, ..., p_{n,t})', t \in [0,T]$の第$i$要素が第$i$資産の価格を表わすもの

とする．$\{\boldsymbol{p}_t\}_0^T$は，観測不可能な確率ドリフトをもつ幾何ブラウン運動

$$\mathrm{diag}\{p_{1,t}^{-1},\dots,p_{n,t}^{-1}\}d\boldsymbol{p}_t = d\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\mu}_t dt + \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}d\boldsymbol{W}_t \tag{1.1}$$

で与えられる．ここで，$\{\boldsymbol{W}_t\}_0^T$は$(\Omega,\sigma(\boldsymbol{Z}_s,\boldsymbol{\mu}_s,s\le T),P)$上の標準ブラウン運動である．また，$\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T$は$\mathbb{R}^n$に値をとる$\{\boldsymbol{W}_t\}_0^T$とは独立な確率過程，$\boldsymbol{\Sigma}$は既知かつ時不変な$n\times n$正値定符号行列である．(1.1)の確率構造については次節で詳述する．初期時点0に富$X_0=x_0$を賦与された投資家は時点$T<\infty$まで，この連続時間金融市場で投資活動を行い，同時に富の一部を消費する．投資額は市場の出来高に比して非常に小さいものであるため，投資行動は資産価格に影響を及ぼさないものと仮定する．富過程$\{X_s\}_0^T$は

$$\begin{aligned}X_s &= x_0 + \int_0^s X_\theta \sum_{i=1}^n \frac{\pi_{i,\theta}dp_{i,\theta}}{p_{i,\theta}} \\ &\quad + \int_0^s X_\theta\Big(1-\sum_{i=1}^n \pi_{i,\theta}\Big)\frac{dp_{n+1,\theta}}{p_{n+1,\theta}} - \int_0^s c_\theta X_\theta d\theta \\ &= x_0 + \int_0^s X_\theta \boldsymbol{\pi}'_\theta d\boldsymbol{Z}_\theta + \int_0^s X_\theta\left\{(1-\boldsymbol{1}'\boldsymbol{\pi}_s)r - c_\theta\right\}d\theta\end{aligned} \tag{1.2}$$

ここで$\boldsymbol{\pi}_\theta=(\pi_{1,\theta},\dots,\pi_{n,\theta})'$は，時点$\theta$において不確実性のある資産に投資される富の割合，$c_\theta$は時点$\theta$で消費される割合を表わす．また，確率1で$\int_0^T\|\boldsymbol{\pi}_s\|^2X_s^2ds<\infty$，$\int_0^T c_sX_sds<\infty$.であると仮定する．

$\{\boldsymbol{Z}_s\}_0^T$と$\{\boldsymbol{p}_s\}_0^T$は同じ情報を含むので，以後$\{\boldsymbol{Z}_s\}_0^T$のみを考える．簡単化のために，投資／消費戦略$(\boldsymbol{\pi}_s,c_s), s\in[t,T]$を$(\boldsymbol{\pi},c)$ と略記する．$\mathfrak{F}_s=\sigma(\boldsymbol{p}_\theta,0\le\theta\le s)=\sigma(\boldsymbol{Z}_\theta,0\le\theta\le s)$とし，許容的な投資／消費戦略の集合を

$$\mathfrak{A}=\{(\boldsymbol{\pi},c): X_s\ge 0 \text{ a.s.を満たす}\mathfrak{F}_s\text{-progressively measurableな過程}\}$$

とする．問題はT時点までの累積消費と最終時点Tでの富から得られる効用の和の期待値を最大化することである：

$$(1.3) \qquad \sup_{(\pi,c)\in\mathfrak{A}} E^P\left[\int_0^T e^{-\delta s}U_1(c_sX_s)ds + e^{-\delta T}U_2(X_T)\right].$$

ただし，$U_i(\alpha), i = 1,2$は狭義増加かつ狭義凹な効用関数，また割引率$\delta \in \mathbb{R}_+$は時不変の定数であるものとする．以下の議論では，必要に応じてU_iに関してさらに強い仮定をおく．

2．フィルタリング

ここでは，部分観測問題を解くために必要なフィルタリング理論からの結果を示す．$[0,T]$で定義され$\mathbb{R}^n$に値をとる連続関数の集合を$C_n([0,T])$とする．$\mathfrak{B}(C_n([0,T]))$を一様位相に関する$C_n([0,T])$上のBorel $\sigma-$集合体とする．また，$(C_n([0,T]), \mathfrak{B}(C_n([0,T])))$上の標準Wiener測度を$Q_1$とする．同様に$D_n([0,T])$を$[0,T]$で定義された$\mathbb{R}^n$値 càdlàg関数の集合とし，$\mathfrak{B}(D_n([0,T]))$をSkorokhod位相に関するBorel $\sigma-$集合体とする．また，$(D_n([0,T]), \mathfrak{B}(D_n([0,T])))$上の確率測度を$Q_2$とする．積空間$\Omega = C_n([0,T]) \times D_n([0,T])$と積測度$Q = Q_1 \times Q_2$を考え，$(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), Q)$上で確率過程$\{\boldsymbol{B}_t\}_0^T$および$\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T$をそれぞれ$C_n([0,T])$，$D_n([0,T])$座標への射影として定義する．$\{\boldsymbol{B}_t\}_0^T$と$\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T$とは独立であることを注記しておく．$\mathfrak{F}_t = \sigma(\boldsymbol{B}_s, s \le t)$，$\mathfrak{G}_t = \sigma(\boldsymbol{B}_s, \boldsymbol{\mu}_s, s \le t)$と書くことにする．

さて，

$$\zeta_t = \exp\left[\int_0^t \boldsymbol{\mu}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}d\boldsymbol{B}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \boldsymbol{\mu}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_s ds\right]$$

とすると，$\{\zeta_t, \mathfrak{G}_t, 0 \le t \le T\}$が$Q$-優マルチンゲールであり，

$$E^Q\left[\exp\left[\int_0^t \boldsymbol{\mu}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}d\boldsymbol{B}_s\right]\middle|\boldsymbol{\mu}_s, s \le t\right] = \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \boldsymbol{\mu}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_s ds\right]$$

となることが容易にわかる．$\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T$と$\{\boldsymbol{B}_t\}_0^T$の独立性より，

$$E^Q[\zeta_t] = E^Q\left[E^Q[\zeta_t|\mu_s, s \le t]\right] = 1 \tag{2.1}$$

が成立するから，$\{\zeta_t\}_0^T$はフィルトレーション$\{\mathfrak{G}_t\}$に関してマルチンゲールである．したがってGirsanovの定理（たとえば，Karatzas and Shreve (1988, p. 199)を参照）から，

$$d\boldsymbol{W}_t = d\boldsymbol{B}_t - \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{\mu}_t dt$$

として与えられる過程$\{\boldsymbol{W}_s\}$は$(\Omega, \{\mathfrak{G}_t\}, P)$上の$n$次元ブラウン運動となることが結論できる．ただし，$P(\cdot)$は，$A \in \mathfrak{G}_T$について，

$$P(A) = E^Q[1_A \zeta_T]$$

となるような確率測度である．$\boldsymbol{Z}_0$を定数とし，$\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{Z}_0 + \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}\boldsymbol{B}_t$とする．$\boldsymbol{\Sigma}$は時不変な正値定符号行列であるから，$\boldsymbol{Z}_t$によって生成されるフィルトレーションは$\{\mathfrak{F}_t\}$であり，

$$d\boldsymbol{Z}_t = \boldsymbol{\mu}_t dt + \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} d\boldsymbol{W}_t \tag{2.2}$$

となる．$\sigma(\boldsymbol{\mu}_s, s \le T)$に関して条件付期待値をとれば，確率測度$P$の下での$\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T$と$\{\boldsymbol{W}_t\}_0^T$の同時分布が，確率測度$Q$の下での$\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T$と$\{\boldsymbol{B}_t\}_0^T$の同時分布と同じになることがわかる．換言すると，任意の$A \in \mathfrak{B}(D_n([0,T]))$および$B \in \mathfrak{B}(C_n([0,T]))$に関して，

$$\begin{aligned}
&P(\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T \in A, \{\boldsymbol{W}_t\}_0^T \in B)\\
=&E^Q\left[1\left\{\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T \in A\right\} E^Q\left[1\left\{\{\boldsymbol{W}_t\}_0^T \in B\right\}\zeta_T\middle|\boldsymbol{\mu}_s, s \le T\right]\right]\\
=&E^Q\left[1\left\{\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T \in A\right\}\right.
\end{aligned}$$

$$(2.3)\quad \times E^{Q}\left[1\left\{\left\{\boldsymbol{B}_t-\int_0^t \boldsymbol{\mu}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}ds\right\}_0^T\in B\right\}\zeta_T\middle|\boldsymbol{\mu}_s, s\le T\right]\Bigg]$$

$$=Q(\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T\in A)Q(\{\boldsymbol{B}_t\}_0^T\in B)$$

$$=Q(\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T\in A,\{\boldsymbol{B}_t\}_0^T\in B)$$

となる．ここで，確率空間$(\Omega,\sigma(\boldsymbol{B}_s,s\le T),Q(\cdot|\boldsymbol{\mu}_s,s\le T))$上の確率過程$\{\boldsymbol{B}_t-\int_0^t\boldsymbol{\mu}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}ds\}_0^T$ に関してGirsanovの定理を用いた．

ζ_tが$\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T$に依存することを明示するため，$\{\boldsymbol{\mu}_t\}_0^T$の経路が与えられたとき，

$$\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}=\zeta_t=\exp\left[\int_0^t\boldsymbol{\mu}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}d(\boldsymbol{Z}_s-\boldsymbol{Z}_0)-\frac{1}{2}\int_0^t\boldsymbol{\mu}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_s ds\right]$$

と表記することにする．さらに，

$$\begin{aligned}\hat{\zeta}_t&=\exp\left[\int_0^t\hat{\boldsymbol{\mu}}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}d\boldsymbol{B}_s-\frac{1}{2}\int_0^t\hat{\boldsymbol{\mu}}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_s ds\right]\\&=\exp\left[\int_0^t\hat{\boldsymbol{\mu}}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}d(\boldsymbol{Z}_s-\boldsymbol{Z}_0)-\frac{1}{2}\int_0^t\hat{\boldsymbol{\mu}}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_s ds\right]\end{aligned}$$

によって，$\hat{\zeta}_t$を定義する．ここで，

$$\hat{\boldsymbol{\mu}}_t=E^P[\boldsymbol{\mu}_t|\mathfrak{F}_t]=\frac{E^Q[\boldsymbol{\mu}_t\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}|\mathfrak{F}_t]}{E^Q[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}|\mathfrak{F}_t]}$$

である．次の定理は，$\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}$と$\hat{\zeta}_t$の非常に有用な関係を与えるものである．

定理2.1.

$$(2.4)\qquad E\int_0^T\left\{\int_{D_n([0,T])}\boldsymbol{\mu}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}_s(\zeta_s^{\boldsymbol{\mu}})^2Q_2(d\boldsymbol{\mu})\right\}ds<\infty$$

と仮定する．このとき，

$$\hat{\zeta}_t = \int_{D_n([0,T])} \zeta_t^{\boldsymbol{\mu}} Q_2(d\boldsymbol{\mu}) \tag{2.5}$$

が成立する．また，$\hat{\zeta}_t$は，$(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}_0^T, Q)$上のマルチンゲールとなる．

証明． 伊藤の補題から，$\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}$は，

$$\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}} = 1 + \int_0^t \zeta_s^{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu}_s' \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} d\boldsymbol{B}_s$$

を満たすことがわかる．測度Q_2に関して両辺を積分する．確率積分とQ_2に関する積分の順序を交換するために，Protter (1990, p.160　Theorem 46)によるFubiniの定理の拡張を使えば，

$$E^{Q_2}[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}] = 1 + \int_0^t E^{Q_2}[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}} \boldsymbol{\mu}_s'] \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} d\boldsymbol{B}_s$$

を得る．Fubiniの定理を適用するための十分条件は，(2.4)で保証される．$\log E^{Q_2}[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}]$に伊藤の補題を適用すると，

$$\begin{aligned} d(\log E^{Q_2}[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}]) &= \frac{1}{E^{Q_2}[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}]} d(E^{Q_2}[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}]) \\ &\qquad - \frac{1}{2\{E^{Q_2}[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}]\}^2} (d(E^{Q_2}[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}]))^2 \\ &= \hat{\boldsymbol{\mu}}_t \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} d\boldsymbol{B}_t - \frac{1}{2} \hat{\boldsymbol{\mu}}_t' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_t dt \\ &= d(\log \hat{\zeta}_t) \end{aligned}$$

となるので，両辺の積分をとれば(2.5)が得られる．上記の表現から，

$$E^Q[\hat{\zeta}_t] = E^Q[E^{Q_2}[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}]] = E^Q[\zeta_t^{\boldsymbol{\mu}}] = 1$$

したがって，$\hat{\zeta}_t$はマルチンゲールである． □

次に定理2.1を使ってフィルタリング定理を証明する．この結果はよく知られていて，通常はquadratic variationに関するLévy'の定理を用いて証明される．たとえば，Karatzas and Xue (1991) が参考になる．ここでの証明はもう少し直接的である．

定理2.2. 条件(2.4)が満たされているものとする．このとき，

$$\hat{\boldsymbol{W}}_t = \boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{Z}_0 - \int_0^t \hat{\boldsymbol{\mu}}_s ds \tag{2.6}$$

は，$(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}, P)$上の標準ブラウン運動となる．ただし，$\mathfrak{F}_t = \sigma(\boldsymbol{Z}_s, s \leq t)$である．

証明． 定理2.1より，$\hat{\zeta}_t = \exp\left[\int_0^t \hat{\boldsymbol{\mu}}'_s \boldsymbol{\Sigma}^{-1/2} d\boldsymbol{B}_s - \frac{1}{2}\int_0^t \hat{\boldsymbol{\mu}}'_s \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \hat{\boldsymbol{\mu}}_s ds\right]$は$(\Omega, \{\mathfrak{F}_t\}_0^T, Q)$上のマルチンゲールである．Girsanovの定理から，(2.6)によって定義される確率過程は，確率測度P'に関するn次元標準ブラウン運動である．ここでP'は，

$$P'(A) = E^Q[1_A \hat{\zeta}_T], A \in \mathfrak{F}_T$$

によって定義される．定理2.1から，

$$\begin{aligned} P'(A) &= E^Q[1_A \hat{\zeta}_T] = E^Q[1_A E^{Q_2}[\zeta_T^{\mu}]] = E^Q[E^{Q_2}[1_A \zeta_T^{\mu}]] \\ &= E^Q[1_A \zeta_T^{\mu}] = P(A) \end{aligned}$$

だから，P'とPは$\mathfrak{F}_T$上で同一である． □

e 3. 一定値確率ドリフトの場合のベイズ問題

(2.5)式右辺のQ_2に関する積分を計算することは一般的に難しいが，確率ドリフトが一定値である場合には容易に計算できる．結果として得られる等式(2.5)はHamilton-Jacobi-Bellmann(HJB)方程式を明示的に解くために用いられる．

$\boldsymbol{\mu}_t$は時間を通じて一定で，事前分布関数$Q_2\{\boldsymbol{\mu}_t \leq \boldsymbol{m}\} = F(\boldsymbol{m}), \boldsymbol{m} \in \mathbb{R}^n$を持つ確率変数であるというアンの状況を想定する．このとき条件(2.4)は，

$$
\begin{aligned}
&E\int_0^T \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} \right. \\
&\qquad \left. \times \exp\left[2\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1/2}\boldsymbol{B}_s - \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}s\right] dF(\boldsymbol{\mu}) \right\} ds \\
&= \int_0^T \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} \exp\left[\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}s\right] dF(\boldsymbol{\mu}) \right\} ds \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}T\right] dF(\boldsymbol{\mu}) - 1 \\
&< \infty
\end{aligned}
$$

となる．等式(2.5)は，

$$
\begin{aligned}
&\exp\left[\int_0^t \hat{\boldsymbol{\mu}}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}d(\boldsymbol{Z}_s - \boldsymbol{Z}_0) - \frac{1}{2}\int_0^t \hat{\boldsymbol{\mu}}_s'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}_s ds\right] \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{Z}_0) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}t\right] dF(\boldsymbol{\mu})
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

ただし，

$$
\begin{aligned}
\hat{\boldsymbol{\mu}}_t &= \hat{\boldsymbol{\mu}}(t, \boldsymbol{Z}_t) \\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\mu} \exp\left[\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{Z}_0) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}t\right] dF(\boldsymbol{\mu})}{\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{Z}_0) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}t\right] dF(\boldsymbol{\mu})}
\end{aligned}
\tag{3.2}
$$

である．$\eta(t, \boldsymbol{Z}_t) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left[\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{Z}_t - \boldsymbol{Z}_0) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}t\right] dF(\boldsymbol{\mu})$ に直接，伊藤の補題を適用しても(3.1)が得られる．この場合にはFubiniの定理の適用を避けることができるが，代わりに関数$\eta(t, \boldsymbol{z})$が積分記号下で微分できるための条件をチェックする必要がある．（Robbins and Siegmund (1973)）

さて，ここで投資／消費決定問題に話を戻す．定理2.2より，価格過程(1.1)は次のように書ける．

$$
\mathbf{diag}\{p_{1,t}^{-1}, \ldots, p_{n,t}^{-1}\}d\boldsymbol{p}_t = d\boldsymbol{Z}_t = \hat{\boldsymbol{\mu}}_t dt + \boldsymbol{\Sigma}^{1/2} d\hat{\boldsymbol{W}}_t \tag{3.3}
$$

ここで，$\hat{\boldsymbol{\mu}}_t = E^P[\boldsymbol{\mu}_t|\mathfrak{F}_t]$ は(3.2)で与えられる．このフィルタリング式(3.3)によって，一定値確率ドリフトの場合の最大化問題は，部分観測状態から完全観測状態へと変換されることになる．変換後はマルコフ決定問題となるので，初期時点として0よりも一般の$t \in [0, T]$を考えた方が都合がよい．つまり，

$$
\begin{aligned}
X_s^{t,x,\boldsymbol{z}} = x &+ \int_t^s X_\theta^{t,x,\boldsymbol{z}} \left\{(1 - \mathbf{1}'\boldsymbol{\pi}_s)r - c_\theta\right\} d\theta \\
&+ \int_t^s X_\theta^{t,x,\boldsymbol{z}} \boldsymbol{\pi}'_\theta d\boldsymbol{Z}_\theta^{t,\boldsymbol{z}}
\end{aligned} \tag{3.4}
$$

$$
\boldsymbol{Z}_s^{t,\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{z} + \int_t^s \hat{\boldsymbol{\mu}}(\theta, \boldsymbol{Z}_\theta^{t,\boldsymbol{z}}) d\theta + \boldsymbol{\Sigma}^{1/2}(\hat{\boldsymbol{W}}_s - \hat{\boldsymbol{W}}_t), \quad s \in [t, T] \tag{3.5}
$$

というマルコフ・ダイナミクスの下で，最大化問題

$$
\begin{aligned}
u(t, x, \boldsymbol{z}) = \sup_{(\boldsymbol{\pi}, c) \in \mathfrak{A}_M} E^P\bigg[&\int_t^T e^{-\delta s} U_1(c_s X_s^{t,x,\boldsymbol{z}}) ds \\
&+ e^{-\delta T} U_2(X_T^{t,x,\boldsymbol{z}}) \bigg]
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

を考える．ただし，$\mathfrak{A}_M \subset \mathfrak{A}$はマルコフ制御の集合である．また$\hat{\boldsymbol{\mu}}$: $[0,T] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$は，

$$
(3.7) \qquad \begin{cases} \hat{\boldsymbol{\mu}}(\theta, \boldsymbol{z}) = \dfrac{\int_{\mathbb{R}^n} \boldsymbol{\mu} L(\theta, \boldsymbol{z}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{z}_0) dF(\boldsymbol{\mu})}{\int_{\mathbb{R}^n} L(\theta, \boldsymbol{z}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{z}_0) dF(\boldsymbol{\mu})} \\ L(\theta, \boldsymbol{z}; \boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{z}_0) = \exp\left[\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{z} - \boldsymbol{z}_0) - \dfrac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\theta\right] \end{cases}
$$

によって与えられる非確率的な関数である．

4．マルチンゲール・アプローチと2つのコーシー問題

フィルタリングによって完全観測状態に帰着された部分観測問題は，Karatzas, Lehoczky and Shreve (1987)，Cox and Huang (1989)らによるマルチンゲール・アプローチによって解析することができ，最適戦略の存在が示されるが，一般的に最適戦略をフィードバック形で表現することは容易でない．$\hat{\boldsymbol{\mu}}_s$が上記の時不変ドリフトの場合のようにマルコフ表現を持つならば，HJB方程式を導出することができる．ただし，このHJB方程式は必然的に退化(degenerate)するので技術的に取り扱いが難しい．確率微分方程式(3.4)と(3.5)はインプリシットな形をしており，状態変数の次元を落とすことは困難である．従って，非退化性の仮定に基づくHJB方程式の有効性についての議論をそのままの形でこの問題に適用することはできない．

本節と次節では，退化したマルコフ最適投資／消費決定問題に関するKuwana (1997)の結果を適用して，ベイズ問題に付随するHJB方程式を導出する．まず，次のような確率過程 $\{K_s^{t,y}\}, s \in [t,T], (t,y) \in [0,T] \times \mathbb{R}$を

考える．

$$K_s^{t,y} = y + \int_t^s \{\delta - r - \frac{1}{2}||\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\mu}}(\theta, \boldsymbol{Z}_\theta^{t,z}) - r\mathbf{1})||^2\}d\theta \\ - \int_t^s (\hat{\boldsymbol{\mu}}(\theta, \boldsymbol{Z}_\theta^{t,z}) - r\mathbf{1})'\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}d\hat{\boldsymbol{W}}_\theta. \tag{4.1}$$

この$K_s^{t,y}$を使って，関数 $\mathcal{G}(t,y,\boldsymbol{z})$を，

$$\mathcal{G}(t,y,\boldsymbol{z}) = E\Bigg[\int_t^T e^{-\delta(\theta-t)}U_1(I_1(\exp[K_\theta^{t,y}]))d\theta \\ + e^{-\delta(T-t)}U_2(I_2(\exp[K_T^{t,y}]))\Bigg] \tag{4.2}$$

と定義する．ただし，$I_i(\cdot), i=1,2$は$dU_i(x)/dx, i=1,2$の逆関数である．（これら逆関数の存在条件は後で議論する．）また，関数 $\mathcal{H}(t,y,\boldsymbol{z})$を，

$$\mathcal{H}(t,y,\boldsymbol{z}) = e^{-y}E\Bigg[\int_t^T e^{-\delta(\theta-t)}\exp[K_\theta^{t,y}]I_1(\exp[K_\theta^{t,y}])d\theta \\ + e^{-\delta(T-t)}\exp[K_T^{t,y}]I_2(\exp[K_T^{t,y}])\Bigg] \tag{4.3}$$

とする．$(t,\boldsymbol{z}) \in [0,T] \times \mathbb{R}^n$が与えられたとき，$\mathcal{K}(t,x,\boldsymbol{z})$を $\mathcal{H}(t,y,\boldsymbol{z})$の引数$y \in \mathbb{R}$に関する逆関数として定義する．つまり，

$$\mathcal{H}(t,\mathcal{K}(t,x,\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}) = x \quad , \quad (t,x,\boldsymbol{z}) \in [0,T] \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n \tag{4.4}$$

が成立する．

さて，マルチンゲール・アプローチから，期待効用の最大値および最適消費過程はそれぞれ以下のように与えられる．（議論の詳細はKuwana (1997)を参照のこと．）

$$u(t,x,\boldsymbol{z}) = e^{-\delta t}\mathcal{G}(t,\mathcal{K}(t,x,\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z}), \tag{4.5}$$

$$C_s^{t,x,z,*} = I_1(K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}). \tag{4.6}$$

また，最適な富過程は，

$$\begin{aligned}
X_s^{t,x,z,*} &= E^{\tilde{P}}\left[\int_s^T e^{-r(\theta-s)} I_1(\exp[K_\theta^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}])d\theta \right.\\
&\qquad\qquad \left. + e^{-r(T-s)} I_2(\exp[K_T^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}]) \middle| \mathfrak{F}_s\right]\\
&= E\left[\int_s^T M_\theta^s e^{-r(\theta-s)} I_1(\exp[K_\theta^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}])d\theta \right.\\
&\qquad\qquad \left. + M_T^s e^{-r(T-s)} I_2(\exp[K_T^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}]) \middle| \mathfrak{F}_s\right] \qquad (4.7)\\
&= \exp[-K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}]\times\\
&\quad E\left[\int_s^T e^{-\delta(\theta-s)} \exp[K_\theta^{s,K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}}] I_1(\exp[K_\theta^{s,K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}}])d\theta \right.\\
&\qquad \left. + e^{-\delta(T-s)} \exp[K_T^{t,K_s^{s,\mathcal{K}(t,x,z)}}] I_2(\exp[K_T^{s,K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}}])\right]\\
&\qquad\qquad\qquad \text{(マルコフ性による)}\\
&= \mathcal{H}(s, K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}, Z_s^{t,z})
\end{aligned}$$

と計算される．

マルチンゲール・アプローチと確率解を適用するためには，事前分布$F(\mu)$と効用関数$U_i(x), i = 1, 2$が以下の３項目を保証すればよい：

(a) フィルタンリング表現(2.8),

(b) Kuwana (1997)の条件2.1,

(c) $\mathcal{H}(t, y, z)$がyに関して狭義単調であること．$\mathcal{G}(t, y, z)$および$\mathcal{H}(t, y, z)$が有限で滑らかであること．

次のような関数$\eta(t,z)$を定義する．

$$\eta(t,z)=\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left[\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(z-z_0)-\frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}t\right]dF(\boldsymbol{\mu}). \tag{4.8}$$

もし，

$$\eta(0,z)<\infty,\quad \forall z\in\mathbb{R}^n \tag{4.9}$$

が成立するならば，$\eta(t,z)$は積分記号下で微分可能であることが容易にわかる．この場合フィルタリング表現(2.8)は成立する．(b)の条件については，Novikov条件：

$$E\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^T\|\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_s-r)\mathbf{1}\|^2ds\right]<\infty$$

を仮定する．Kuwana (1997)の補題3.1より，$\mathcal{G}(t,y,z)$および$\mathcal{H}(t,y,z)$が狭義単調，有限かつ滑らかであることは，(1) $K_s^{t,y}$および$\boldsymbol{Z}_s^{t,z}$が$\mathcal{L}$-微分可能過程で，$U_i(I_i(e^y)),e^yI_i(e^y),i=1,2$が連続かつ２階連続微分可能で多項式成長条件を満たす，あるいは，(2) $K_s^{t,y}$および$\boldsymbol{Z}_s^{t,z}$ が有界な$\mathcal{L}$-微分可能過程で$U_i(I_i(e^y)),e^yI_i(e^y),i=1,2$が連続かつ２階連続微分可能で，指数成長条件を満たす，のいづれかが成立していれば保証される．以上をまとめると次のようになる．

条件 4.1.

(a) $F(\boldsymbol{\mu})$はコンパクトな台を持つ．

(b) $U_i(x),i=1,2$は$(0,\infty)$で３階連続微分可能であり，$\lim_{x\to\infty}\frac{d^2U_i(x)}{dx^2}=0$および$\lim_{x\downarrow 0}\frac{dU_i(x)}{dx}=\infty$を満たす．さらに

$$\varphi_i(y)=|U_i(I_i(e^y))|+|e^yI_i(e^y)|+\left|e^y\frac{dI_i(e^y)}{dy}\right|+\left|e^y\frac{d^2I_i(e^y)}{dy^2}\right|,i=1,2$$

が，ある定数$K, a > 0, 0 < \gamma < 2$に関して指数成長条件

$$\varphi_1(y) + \varphi_2(y) \le Ke^{a|y|^\gamma} \quad , \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

を満たす．

条件4.2.

(a) Fの積率母関数が存在する．つまり，$\eta(0, z) < \infty \quad , \quad \forall z \in \mathbb{R}^n$ が成り立つ．

(b) *Novikov*条件

$$E \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^T \|\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\mu}}_s - r\mathbf{1})\|^2 ds\right] < \infty$$

が成立する．

(c) $\|\hat{\boldsymbol{\mu}}(t, z) - r\mathbf{1}\|^2$が$z$に関して*Lipschitz*連続であり，ある定数$K, a > 0$が存在して，

$$\sum_i \left\|\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\mu}}(t, z)}{\partial z_i}\right\| + \sum_{i,j}\left\|\frac{\partial^2 \hat{\boldsymbol{\mu}}(t, z)}{\partial z_i \partial z_j}\right\| \le K(1 + \|z\|^a)$$

が成立する．

(d) $U_i(x), i = 1, 2$は$(0, \infty)$で3階連続微分可能であり，$\lim_{x \to \infty} \frac{d^2 U_i(x)}{dx^2} = 0$および$\lim_{x \downarrow 0} \frac{dU_i(x)}{dx} = \infty$を満たす．さらに条件*4.1*において定義した関数$\varphi_i, i = 1, 2$が，ある定数$K, a > 0$に関して多項式成長条件

$$\varphi_1(y) + \varphi_2(y) \le K(1 + |y|^a) \quad , \quad \forall y \in \mathbb{R}$$

を満たす．

$F(\boldsymbol{\mu})$がコンパクトな台を持てば，(4.9)は自動的に満たされる．また(4.9)から，$\eta(t,\boldsymbol{z})$が$\boldsymbol{z}$に関して積分記号下で微分できることが保証されるので，$\hat{\boldsymbol{\mu}}(t,\boldsymbol{z})$は$\boldsymbol{z}$に関して連続微分可能で，

$$\frac{\partial \hat{\boldsymbol{\mu}}(t,\boldsymbol{z})}{\partial \boldsymbol{z}'} = \boldsymbol{\Sigma}\left\{\frac{\eta_{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}'}}{\eta} - \frac{\eta_{\boldsymbol{z}}}{\eta}\cdot\frac{\eta_{\boldsymbol{z}'}}{\eta}\right\} = \left\{E[\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\mu}'|\boldsymbol{Z}_t^{t,\boldsymbol{z}}] - \hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}'\right\}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$$

は有界であり，$\hat{\boldsymbol{\mu}}(t,\boldsymbol{z})$はLipschitz連続である．２階微分の連続性と有界性も同様に示される．条件4.2(a)，(b)，(c)は，条件4.1では(a)に集約されている．また，対数効用関数$U_i(x) = \log(x+m_i), m_i > 0$および双曲絶対危険回避型(HARA)効用関数$U_i(x) = x_i^{\alpha}, 0 < \alpha_i < 1$は条件4.2(d)を満たさないことに注意しておく．

さて，$\mathcal{G}(t,y,\boldsymbol{z})$および$e^y\mathcal{H}(t,y,\boldsymbol{z})$に確率解の手法を適用すると，次のようなコーシー問題が得られる．

命題4.3. 条件*4.1*あるいは条件*4.2*が満たされているとする．このとき，$\mathcal{G}(t,y,\boldsymbol{z})$と$\mathcal{H}(t,y,\boldsymbol{z})$はそれぞれ以下のコーシー問題の滑らかな一意解として与えられる．

$$(4.10)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\dfrac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} \\ \qquad - (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})'\dfrac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y \partial \boldsymbol{z}} + \dfrac{1}{2}\mathbf{tr}\boldsymbol{\Sigma}\dfrac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{z}\partial \boldsymbol{z}'} \\ \qquad + \left(\delta - r - \dfrac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\right)\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} \\ \qquad + \hat{\boldsymbol{\mu}}'\dfrac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{z}} - \delta\mathcal{G} + U_1(I_1(e^y)) \\ \mathcal{G}(T,y,\boldsymbol{z}) = U_2(I_2(e^y)), \end{cases}$$

$$
(4.11)\qquad \begin{cases} 0 = \dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y^2} \\ \qquad - (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})'\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y \partial \boldsymbol{z}} + \dfrac{1}{2}\mathbf{tr}\boldsymbol{\Sigma}\dfrac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{z}\partial \boldsymbol{z}'} \\ \qquad + \left(\delta - r + \dfrac{1}{2}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\right)\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} \\ \qquad + r\mathbf{1}'\dfrac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{z}} - r\mathcal{H} + I_1(e^y) \\ \mathcal{H}(T, y, \boldsymbol{z}) = I_2(e^y). \end{cases}
$$

命題4.3は，$\hat{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu}$，$\mathcal{G}(t, y, \boldsymbol{z}) = G(t, e^y)$，$\mathcal{H}(t, y, \boldsymbol{z}) = \mathcal{X}(t, e^y)$とおけば，Karatzas, Lehoczky, and Shreve (1987)によって導出されたコーシー問題を特別な場合として含むことがわかる．

5．Hamilton-Jacobi-Bellman 方程式

本節では，(3.6)で与えられる最大化された期待効用$u(t, x, \boldsymbol{z})$が次のような退化したHJB方程式の初期値問題を満たすことを示す．

$$
\begin{aligned}
&\sup_{\boldsymbol{\pi}, c}\left\{\frac{\partial u}{\partial t} + e^{-\delta t}U_1(cx) + (r - c)x\frac{\partial u}{\partial x}\right. \\
(5.1.a)\qquad &\quad + \boldsymbol{\pi}'(\hat{\boldsymbol{\mu}}(t, \boldsymbol{z}) - r\mathbf{1})x\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{\mu}}(t.\boldsymbol{z})'\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{z}} \\
&\quad \left. + \frac{1}{2}\boldsymbol{\pi}'\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{\pi}x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\boldsymbol{\pi}'\boldsymbol{\Sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial \boldsymbol{z}} + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\boldsymbol{\Sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial \boldsymbol{z}\partial \boldsymbol{z}'}\right\} = 0 \\
(5.1.b)\qquad &\qquad u(T, x, \boldsymbol{z}) = e^{-\delta T}U_2(x)
\end{aligned}
$$

まず，$\mathcal{K}(t, x, \boldsymbol{z})$の各微分係数はうまく定義され，かつ滑らかであること

に注意する．$\mathcal{H}(t,\mathcal{K}(t,x,z),z)=x$の各微分を計算すると，

$$\frac{\partial\mathcal{K}(t,x,z)}{\partial t}=-\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right)\bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)},$$

$$\frac{\partial\mathcal{K}(t,x,z)}{\partial x}=\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-1}\bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)},$$

$$\frac{\partial\mathcal{K}(t,x,z)}{\partial z}=-\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)},$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{K}(t,x,z)}{\partial x^2}=-\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-3}\cdot\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y^2}\bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)},$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{K}(t,x,z)}{\partial x\partial z}=\left\{-\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-2}\cdot\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y\partial z}+\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-3}\cdot\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\right\}\bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)},$$

$$\frac{\partial^2\mathcal{K}(t,x,z)}{\partial z\partial z'}=\left\{-\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial z\partial z'}+2\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-2}\cdot\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y\partial z}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z'}-\left(\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-3}\cdot\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y^2}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z}\cdot\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z'}\right\}\bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)}.$$

また，

$$\frac{\partial\mathcal{G}(t,y,z)}{\partial y}=e^y\frac{\partial\mathcal{H}(t,y,z)}{\partial y}. \tag{5.2}$$

となるので，(4.5)の右辺を微分して，(5.2)と先の$\mathcal{K}(t,x,z)$の計算式を使うと，$u(t,x,z)$の各微係数が次のように計算できる．

$$\frac{\partial u(t,x,z)}{\partial t}=\left\{e^{-\delta t}\left(\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t}-\delta\mathcal{G}-e^y\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right)\right\}\bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)},$$

$$\frac{\partial u(t,x,z)}{\partial x} = e^{\mathcal{K}(t,x,z)-\delta t},$$

$$\frac{\partial u(t,x,z)}{\partial z} = \left\{ e^{-\delta t}\left(\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial z} - e^{y}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right)\right\}\Bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)},$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x,z)}{\partial x^2} = e^{y-\delta t}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-1}\Bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)},$$

$$\frac{\partial^2 u(t,x,z)}{\partial x \partial z} = \left\{ -e^{y-\delta t}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\right\}\Bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)},$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u(t,x,z)}{\partial z \partial z'} = e^{-\delta t}\Bigg\{ & \frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z \partial z'} - e^{y}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial z \partial z'} \\ & + e^{y}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-1}\cdot\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z}\cdot\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z'}\Bigg\}\Bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)}.\end{aligned}$$

以上の計算から次の命題が示される.

命題5.1. 条件*4.1*あるいは条件*4.2*が成立しているものとする. このとき$u(t,x,z)$は退化したHJB方程式の初期値問題*(5.1.a)*, *(5.1.b)*を満たす. この問題の解はコーシー問題*(4.10)*および*(4.11)*の解から得られる.

証明. 初期条件(5.1.b)は明らかである. (5.1.a)右辺の最大化戦略$(\boldsymbol{\pi}^*, c^*)$は,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Pi}^* &= \boldsymbol{\pi}^* x \\ &= -\left\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}(t,z) - r\mathbf{1})\frac{\partial u(t,x,z)}{\partial x} + \frac{\partial^2 u(t,x,z)}{\partial x \partial z}\right\} \\ &\qquad \times \left(\frac{\partial^2 u(t,x,z)}{\partial x^2}\right)^{-1},\end{aligned} \tag{5.3}$$

$$C^* = c^* x = I_1\left(e^{\delta t}\frac{\partial u(t,x,z)}{\partial x}\right) \tag{5.4}$$

となる．(4.10)，(4.11)，(5.2)および先の微係数から，(5.1.a)の左辺が次のように計算される．

$$
\begin{aligned}
&(5.1.\mathrm{a})\text{の左辺}\\
=&\frac{\partial u}{\partial t} + e^{-\delta t}U_1\left(I_1\left(e^{\delta t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right)\\
&+\left\{rx - I_1\left(e^{\delta t}\frac{\partial u}{\partial x}\right)\right\}\frac{\partial u}{\partial x} + \hat{\boldsymbol{\mu}}'\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\boldsymbol{\Sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial z'}\\
&-\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^{-1}\left\|\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}\left\{(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\frac{\partial u}{\partial x} + \boldsymbol{\Sigma}\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial z}\right\}\right\|^2\\
=&e^{-\delta t}\left\{U_1(I_1(e^y)) - \delta\mathcal{G} + \frac{\partial\mathcal{G}}{\partial t} + \hat{\boldsymbol{\mu}}\frac{\partial\mathcal{G}}{\partial z}\right.\\
&\qquad + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\boldsymbol{\Sigma}\frac{\partial^2\mathcal{G}}{\partial z\partial z'} - e^y\left(I_1(e^y) - r\mathcal{H} + \frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t}\right.\\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\|^2\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\\
&\qquad\quad \left.\left.+ r\mathbf{1}'\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial z\partial z'}\right)\right\}\Bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)}\\
=&e^{y-\delta t}\left\{\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial t} + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\|^2\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y^2}\right.\\
&\qquad - (\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})'\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial y\partial z} + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\boldsymbol{\Sigma}\frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial z\partial z'}\\
&\qquad + \left(\delta - r + \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\|^2\right)\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial y}\\
&\qquad \left.+ r\mathbf{1}'\frac{\partial\mathcal{H}}{\partial z} - r\mathcal{H} + I_1(e^y)\right\}\Bigg|_{y=\mathcal{K}(t,x,z)}\\
=&0
\end{aligned}
$$

従って，$u(t,x,z)$は(5.1.a)を満足することがわかる．　$\square$

uの微係数についての表現から，(5.3)と(5.4)によって与えられる(5.1.a)の左辺を最大化する戦略$(\boldsymbol{\pi}^*, c^*)$は以下のように書き換えられる．

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}^* x &= -e^{-y+\delta t}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\left\{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}(t,\boldsymbol{z})-r\mathbf{1})e^{y-\delta t}\right. \\
&\qquad\left.\left. - e^{y-\delta t}\left(\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y}\right)^{-1}\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \boldsymbol{z}}\right\}\right|_{y=\mathcal{K})t,x,\boldsymbol{z})} \\
&= -\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}(t,\boldsymbol{z})-r\mathbf{1})\left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x}\right)^{-1} - \left(\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial \mathcal{K}}{\partial \boldsymbol{z}},
\end{aligned}
\tag{5.5}
$$

$$
c^* x = I_1\left(e^{\mathcal{K}(t,x,\boldsymbol{z})}\right). \tag{5.6}
$$

これらが実際に最適な戦略であることは，次の命題によって確認される．

命題5.2. 以下の式で与えられる戦略$(\boldsymbol{\pi}^{t,x,\boldsymbol{z},*}, c^{t,x,\boldsymbol{z},*})$

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\pi}_s^{t,x,\boldsymbol{z},*} X_s^{t,x,\boldsymbol{z},*} \\
&= -\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}}(s,\boldsymbol{Z}_s^{t,\boldsymbol{z}})-r\mathbf{1})\left(\frac{\partial \mathcal{K}(s, X_s^{t,x,\boldsymbol{z},*}, \boldsymbol{Z}_s^{t,\boldsymbol{z}})}{\partial x}\right)^{-1} \\
&\qquad - \left(\frac{\partial \mathcal{K}(s, X_s^{t,x,\boldsymbol{z},*}, \boldsymbol{Z}_s^{t,\boldsymbol{z}})}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial \mathcal{K}(s, X_s^{t,x,\boldsymbol{z},*}, \boldsymbol{Z}_s^{t,\boldsymbol{z}})}{\partial \boldsymbol{z}}
\end{aligned}
\tag{5.7}
$$

$$
c_s^{t,x,\boldsymbol{z},*} X_s^{t,x,\boldsymbol{z},*} = I_1\left(\exp[\mathcal{K}(s, X_s^{t,x,\boldsymbol{z},*}, \boldsymbol{Z}_s^{t,\boldsymbol{z}})]\right) \tag{5.8}
$$

は最適戦略である．ただし，$X_s^{t,x,\boldsymbol{z},*}$は，(4.7)によって与えられる最適な富過程である．

証明. (4.7)より,

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(s, X_s^{t,x,z,*}, Z_s^{t,z}) &= \mathcal{K}(s, \mathcal{H}(s, K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}, Z_s^{t,z}), Z_s^{t,z}) \\ &= K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}\end{aligned}$$

が成立する. 従って, (5.8)は(4.6)に一致する, 伊藤の補題を(4.7)に適用すると,

$$\begin{aligned}dX_s^{t,x,z,*} &= d\mathcal{H}(s, K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}, Z_s^{t,z}) \\ &= \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t} ds + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial y} dK_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)} \\ &\quad + \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial z} dZ_s^{t,z} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y^2} \|\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\|^2 ds \\ &\quad - \frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial y \partial z'}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1}) ds + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\frac{\partial^2 \mathcal{H}}{\partial z \partial z'}\mathbf{\Sigma} ds \\ &= \Bigg\{ - \|\mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\mu}}(t, Z_s^{t,z}) - r\mathbf{1})\|^2 \frac{\partial \mathcal{H}(s, K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}, Z_s^{t,z})}{\partial y} \\ &\quad + (\hat{\boldsymbol{\mu}}(t, Z_s^{t,z}) - r\mathbf{1})' \frac{\partial \mathcal{H}(s, K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}, Z_s^{t,z})}{\partial z} \\ &\quad + r\mathcal{H}(s, K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}, Z_s^{t,z}) \\ &\quad - I_1\left(\exp[\mathcal{K}(s, X_s^{t,x,z,*}, Z_s^{t,z})]\right) \Bigg\} ds \\ &\quad + \Bigg\{ - \mathbf{\Sigma}^{-\frac{1}{2}}(\hat{\boldsymbol{\mu}}(t, Z_s^{t,z}) - r\mathbf{1}) \frac{\partial \mathcal{H}(s, K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}, Z_s^{t,z})}{\partial y} \\ &\quad + \mathbf{\Sigma}^{\frac{1}{2}} \frac{\partial \mathcal{H}(s, K_s^{t,\mathcal{K}(t,x,z)}, Z_s^{t,z})}{\partial z} \Bigg\}' d\hat{\mathbf{W}}_s \\ &= \Big\{ (\boldsymbol{\pi}_s^{t,x,z,*})'(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1}) + r - c_s^{t,x,z,*} \Big\} X_s^{t,x,z,*} ds \\ &\quad + X_s^{t,x,z,*}(\boldsymbol{\pi}_s^{t,x,z,*})' d\hat{\mathbf{W}}_s.\end{aligned}$$

以上で$\boldsymbol{\pi}_s^{t,x,z,*}$の最適性が示された．　□

6．コーシー問題の解析解

ここでは，コーシー問題(4.10)と(4.11)の解析解を導出する．一見したところ，これらの問題を解くのは容易ではないようだが，ブラウン運動の尤度比に関する性質を用いると，定数係数の放物型偏微分方程式に関するコーシー問題に変換できる．まず，

$$\mathcal{G}(t,y,\boldsymbol{z}) = \tilde{\mathcal{G}}(t, w(t,y,\boldsymbol{z}), \boldsymbol{z})/\eta(t,\boldsymbol{z})$$

と書くことにする．ただし，

$$w(t,y,\boldsymbol{z}) = y + \log\eta(t,\boldsymbol{z}) - r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z} - (\delta - r - r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)t$$

である．$(t,y,\boldsymbol{z}) \to (t,w,\boldsymbol{z})$の対応が1対1であることから，関数$\tilde{\mathcal{G}}(t,w,\boldsymbol{z})$がうまく定義されることは明らかである．$\mathcal{G}(t,y,\boldsymbol{z})$の微分係数を$\tilde{\mathcal{G}}(t,w(t,y,\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z})$で表現すると以下のようになる．

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial t} = \eta^{-1}\left\{\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial t} - \left(\delta - r - \frac{r^2}{2}\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1} - \eta^{-1}\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial w} - \eta^{-1}\frac{\partial \eta}{\partial t}\tilde{\mathcal{G}}\right\},$$

$$\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial y} = \eta^{-1}\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial w}, \qquad \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \boldsymbol{z}} = \eta^{-1}\left\{\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial \boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial w} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}\tilde{\mathcal{G}}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y^2} = \eta^{-1}\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{G}}}{\partial w^2},$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial y \partial \boldsymbol{z}} = \eta^{-1}\left\{\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{G}}}{\partial w \partial \boldsymbol{z}} + \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{G}}}{\partial w^2} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial w}\right\},$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{G}}{\partial z \partial z'} = \eta^{-1}\left\{ \frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{G}}}{\partial z \partial z'} + 2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{G}}}{\partial w \partial z'} \right.$$
$$+ \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})(\hat{\boldsymbol{\mu}} - r\mathbf{1})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\frac{\partial^2 \tilde{\mathcal{G}}}{\partial w^2} - 2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial z'}$$
$$+ \left(\eta^{-1}\frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial z'} - \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}(3\hat{\boldsymbol{\mu}} - 2r\mathbf{1})'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right)\frac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial w}$$
$$\left. + \left(2\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}\hat{\boldsymbol{\mu}}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1} - \eta^{-1}\frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial z'}\right)\right\}.$$

以上の計算では，右辺のwに$w = w(t, y, \boldsymbol{z})$を代入する．また $\eta^{-1}\frac{\partial \eta}{\partial \boldsymbol{z}} = \boldsymbol{\Sigma}^{-1}\hat{\boldsymbol{\mu}}$ という関係式を用いている．

ηに関しては，次の重要な等式

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{2}\mathbf{tr}\boldsymbol{\Sigma}\frac{\partial^2 \eta}{\partial z \partial z'} = 0,$$

が成立する．これと先に導出した$\mathcal{G}$の微分係数から，コーシー問題(4.10)は次のように単純化できる．

$$\text{(6.1)} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial \tilde{\mathcal{G}}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\mathbf{tr}\boldsymbol{\Sigma}\dfrac{\partial^2 \tilde{\mathcal{G}}}{\partial z \partial z'} - \delta\tilde{\mathcal{G}} + G_1(t, w, \boldsymbol{z}) = 0 \\ \tilde{\mathcal{G}}(T, w, \boldsymbol{z}) = G_2(T, w, \boldsymbol{z}) \end{cases},$$

ここで$G_i(t, w, \boldsymbol{z}), i = 1, 2$は，

$$\text{(6.2)} \qquad \begin{aligned} &G_i(t, w, \boldsymbol{z}) \\ =&\eta(t, \boldsymbol{z})U_i\left(I_i\left(\frac{e^{w + r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z} + (\delta - r - r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)t}}{\eta(t, \boldsymbol{z})}\right)\right) \end{aligned}$$

と与えられる．

(6.1)では，wを実際の変数として扱う必要がないので，問題は非常に単純になる．換言すると，退化した問題(4.10)の次元を落として，退化していない問題(6.1)へと変換できたことになる．

同様にして(4.11)は，変換

$$\mathcal{H}(t,w,\boldsymbol{z}) = e^{-y}\tilde{\mathcal{H}}(t,w(t,w,\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z})/\eta(t,\boldsymbol{z})$$

を用いて，$\tilde{\mathcal{H}}(t,w,\boldsymbol{z})$に関するコーシー問題

$$(6.3)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\tilde{\mathcal{H}}}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\mathbf{tr}\boldsymbol{\Sigma}\dfrac{\partial^2\tilde{\mathcal{H}}}{\partial\boldsymbol{z}\partial\boldsymbol{z}'} - \delta\tilde{\mathcal{H}} + H_1(t,w,\boldsymbol{z}) = 0 \\ \tilde{\mathcal{H}}(T,w,\boldsymbol{z}) = H_2(T,w,\boldsymbol{z}) \end{cases}$$

へと変換できる．ここで，$H_i(t,w,\boldsymbol{z}), i=1,2$は

$$(6.4)\qquad \begin{aligned} H_i(t,w,\boldsymbol{z}) &= e^{w+r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}+(\delta-r-r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)t} \\ &\qquad\times I_i\left(\frac{e^{w+r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{z}+(\delta-r-r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)t}}{\eta(t,\boldsymbol{z})}\right) \end{aligned}$$

である．

コーシー問題(6.1)-(6.2)と(6.3)-(6.4)の解は，ブラウン運動に関する標準的なFeynman-Kacの公式（たとえば，Friedman (1975)，p.147を参照）を適用することによって得られる．$\boldsymbol{B}_s$をn次元標準ブラウン運動とすると，

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{G}}(t,w,\boldsymbol{z}) &= E\Bigg[\int_t^T e^{-\delta(\theta-t)}G_1(\theta,w,\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{B}_\theta-\boldsymbol{B}_t))d\theta \\ &\qquad\qquad + e^{-\delta(T-t)}G_2(T,w,\boldsymbol{z}+\boldsymbol{\Sigma}^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{B}_T-\boldsymbol{B}_t))\Bigg] \\ &= \int_t^T\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(\theta-t)}G_1(\theta,w,\boldsymbol{\xi})\phi(\theta,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi}d\theta \\ &\qquad + e^{-\delta(T-t)}\int_{\mathbb{R}^n} G_2(T,w,\boldsymbol{\xi})\phi(T,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi}, \end{aligned}$$

および，

$$
\begin{aligned}
\tilde{\mathcal{H}}(t,w,z) = E\Bigg[\int_t^T & e^{-\delta(\theta-t)} H_1(\theta, w, z + \Sigma^{\frac{1}{2}}(B_\theta - B_t))d\theta \\
& + e^{-\delta(T-t)} H_2(T, w, z + \Sigma^{\frac{1}{2}}(B_T - B_t))\Bigg] \\
= \int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} & e^{-\delta(\theta-t)} H_1(\theta, w, \xi)\phi(\theta, \xi; t, z, \Sigma)d\xi d\theta \\
& + e^{-\delta(T-t)} \int_{\mathbb{R}^n} H_2(T, w, \xi)\phi(T, \xi; t, z, \Sigma)d\xi
\end{aligned}
$$

という解析表現を得る．ここで，

$$
\phi(\theta, \xi; t, z, \Sigma) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} |\det\Sigma|^{-\frac{1}{2}} (\theta - t)^{-\frac{n}{2}} \exp\left[-\frac{\|\Sigma^{-\frac{1}{2}}(\xi - z)\|^2}{2(\theta - t)} \right].
$$

はn次元標準ブラウン運動の推移確率密度である．$w = w(t, y, z)$を代入することにより，もとのコーシ問題(4.10)および(4.11)の解析解が得られる．

命題6.1. 条件4.1あるいは条件4.2のどちらかが満足されているものとする．また，

$$
(6.5) \qquad \sum_{i=1}^{2} \{|G_i(t,w,z)| + |H_i(t,w,z)|\} \leq K(w)e^{a\|z\|^\gamma}
$$

を満たすような$K(w)$とt, w, zに依存しない定数$a > 0, 0 < \gamma < 2$が存在したとする．このとき，$\mathcal{G}(t,y,z)$と$\mathcal{H}(t,y,z)$の滑らかな一意解は，

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{G}(t,y,z) \\
=&\tilde{\mathcal{G}}(t, w(t,y,z), z)/\eta(t,z)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(\theta-t)} \frac{\eta(\theta,\boldsymbol{\xi})}{\eta(t,\boldsymbol{z})} U_1\left(I_1\left(\frac{e(\theta,\boldsymbol{\xi};t,y,\boldsymbol{z})\eta(t,\boldsymbol{z})}{\eta(\theta,\boldsymbol{\xi})}\right)\right) \\
&\qquad \times \phi(\theta,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi}d\theta \\
&\quad + e^{-\delta(T-t)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta(T,\boldsymbol{\xi})}{\eta(t,\boldsymbol{z})} U_2\left(I_2\left(\frac{e(T,\boldsymbol{\xi};t,y,\boldsymbol{z})\eta(t,\boldsymbol{z})}{\eta(T,\boldsymbol{\xi})}\right)\right) \\
&\qquad \times \phi(T,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi},
\end{aligned} \tag{6.6}
$$

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{H}(t,y,\boldsymbol{z}) \\
&= e^{-y}\tilde{\mathcal{H}}(t,w(t,y,\boldsymbol{z}),\boldsymbol{z})/\eta(t,\boldsymbol{z}) \\
&= e^{-y} \int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(\theta-t)} e(\theta,\boldsymbol{\xi};t,y,\boldsymbol{z}) I_1\left(\frac{e(\theta,\boldsymbol{\xi};y,t,\boldsymbol{z})\eta(t,\boldsymbol{z})}{\eta(\theta,\boldsymbol{\xi})}\right) \\
&\qquad \times \phi(\theta,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi}d\theta \\
&\quad + e^{-y} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(T-t)} e(T,\boldsymbol{\xi};t,y,\boldsymbol{z}) I_2\left(\frac{e(T,\boldsymbol{\xi};t,y,\boldsymbol{z})\eta(t,\boldsymbol{z})}{\eta(T,\boldsymbol{\xi})}\right) \\
&\qquad \times \phi(T,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})\boldsymbol{\xi},
\end{aligned} \tag{6.7}
$$

と与えられる．ただし，$e(\theta,\boldsymbol{\xi};t,y,\boldsymbol{z})$は

$$
e(\theta,\boldsymbol{\xi};t,y,\boldsymbol{z}) = e^{y+r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{z})+(\delta-r-r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)(\theta-t)}.
$$

である．

(6.5)の十分条件は次の命題で与えられる．

命題6.2. 条件4.1が成立すれば，(6.5)は満たされる．

証明. $F(\boldsymbol{\mu})$がコンパクトな台を持てば，

$$
\eta(t,\boldsymbol{z}) \le \eta(0,\boldsymbol{z}) \le \int_{\mathbb{R}^n} e^{\|\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\|\cdot\|\boldsymbol{z}\|} dF(\boldsymbol{\mu}) \le e^{M_0\|\boldsymbol{z}\|}
$$

および

$$\eta(t,z) \geq \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|\Sigma^{-1}\mu\|\cdot\|z\|-\mu'\Sigma^{-1}\mu/2} dF(\mu) \geq K_0 e^{-M_0\|z\|}$$

を満たす$M_0 > 0$と$1 \geq K_0 > 0$が存在する．従って，

$$|\log \eta(t,z)| \leq K_1(1+\|z\|)$$

を満たすような$K_1 > 0$が存在する．よって，

$$\begin{aligned} |G_i(t,w,z)| &\leq \eta(t,z) K e^{a|u+r\mathbf{1}'\Sigma^{-1}z+(\delta-r-r^2\mathbf{1}'\Sigma^{-1}\mathbf{1}/2)t-\log\eta(t,z)|^\gamma} \\ &\leq K e^{M_0\|z\|}(1+K_2(w)\exp[a_1\|z\|^\gamma + K_1^\gamma(1+\|z\|)^\gamma]) \\ &\leq K_3(w) e^{a_2\|z\|^{\max\{1,\gamma\}}} \end{aligned}$$

となる．$H_i(t,w,z)$についても同様に，

$$|H_i(t,w,z)| \leq K_4(w) \quad e^{a_3\|z\|^{\max\{1,\gamma\}}}$$

が成立する． □

7．対数および双曲型絶対危険回避効用関数の場合

本節では，事前分布がコンパクトな台を持つとき，対数および双曲型絶対危険回避（HARA）効用関数の場合に関する最適戦略を計算する．正規事前分布の場合，これらの効用関数は有限な最大化期待効用を保証しないことも示される．

A. 対数効用関数

$F(\boldsymbol{\mu})$がコンパクトな台を持つとする．効用関数$U_i(x) = b_i \log(x + m_i), b_i, m_i > 0, i = 1, 2$が条件4.1 (b) を満たすことは容易に確認できる．従って命題6.2から，$G_i(t, u, z), H_i(t, u, z), i = 1, 2$は(6.5)を満たすことがわかる．$\mathcal{G}(t, y, z)$と$\mathcal{H}(t, y, z)$を計算するため，

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\theta, \boldsymbol{\xi}) \phi(\theta, \xi; t, z, \boldsymbol{\Sigma}) d\boldsymbol{\xi} &= \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} e^{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\xi}} \phi(\theta, \boldsymbol{\xi}; t, z, \boldsymbol{\Sigma}) d\boldsymbol{\xi} \right\} \\
&\qquad e^{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1} z_0 - \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu}\theta/2} dF(\boldsymbol{\mu}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{\boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1} z - \boldsymbol{\mu}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{\mu} t/2} dF(\boldsymbol{\mu}) \\
&= \eta(t, z)
\end{aligned} \tag{7.1}
$$

となることに注意すると，

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}(t, y, z) = & \int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(\theta - t)} \frac{\eta(\theta, \boldsymbol{\xi})}{\eta(t, z)} b_1 \log\left(\frac{b_1 \eta(\theta, \boldsymbol{\xi})}{e(\boldsymbol{\xi}, \theta; t, y, z)\eta(t, z)} \right) \\
& \quad \times \phi(\theta, \boldsymbol{\xi}; t, z, \boldsymbol{\Sigma}) d\boldsymbol{\xi} d\theta \\
& + e^{-\delta(T - t)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta(T, \boldsymbol{\xi})}{\eta(t, z)} b_2 \log\left(\frac{b_2 \eta(T, \boldsymbol{\xi})}{e(\boldsymbol{\xi}, T; t, y, z)\eta(t, z)} \right) \\
& \quad \times \phi(T, \boldsymbol{\xi}; t, z, \boldsymbol{\Sigma}) d\boldsymbol{\xi} \\
= & -y f(t) + h(t, z),
\end{aligned} \tag{7.2}
$$

また

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(t, y, z) = & e^{-y} \int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(\theta - t)} e(\theta, \boldsymbol{\xi}; t, y, z) \\
& \quad \times \left\{ \frac{b_1 \eta(\theta, \boldsymbol{\xi})}{e(\theta, \boldsymbol{\xi}; t, y, z)\eta(t, z)} - m_1 \right\} \phi(\theta, \boldsymbol{\xi}; t, z, \boldsymbol{\Sigma}) d\boldsymbol{\xi} d\theta \\
& + e^{-y} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(T - t)} e(T, \boldsymbol{\xi}; t, y, z)
\end{aligned} \tag{7.3}
$$

$$\times \left\{ \frac{b_1\eta(T,\boldsymbol{\xi})}{e(T,\boldsymbol{\xi};t,y,\boldsymbol{z})\eta(t,\boldsymbol{z})} - m_2 \right\} \phi(T,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi}$$
$$= e^{-y}f(t) - g(t)$$

と計算される．ただし，f, g, hはそれぞれ

$$f(t) = b_1(1 - e^{-\delta(T-t)})/\delta + b_2 e^{-\delta(T-t)}, \tag{7.4}$$

$$\begin{aligned} g(t) =& m_1 \int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} e^{r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{z})-(r+r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)(\theta-t)} \\ & \times \phi(\theta,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi}d\theta \\ & + m_2 \int_{\mathbb{R}^n} e^{r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{z})-(r+r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)(T-t)} \\ & \times \phi(T,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi} \\ =& m_1 \int_t^T e^{-r(\theta-t}d\theta + m_2 e^{-r(T-t)} \\ =& m_1(1 - e^{-r(T-t)})/\delta + m_2 e^{-r(T-t)}, \end{aligned} \tag{7.5}$$

$$\begin{aligned} h(t,\boldsymbol{z}) = b_1 \int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} & e^{-\delta(\theta-t)} \frac{\eta(\theta,\boldsymbol{\xi})}{\eta(t,\boldsymbol{z})} \Bigg\{ - r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{z}) \\ & - (\delta - r - r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)(\theta - t) + \log\left(\frac{b_1\eta(\theta,\boldsymbol{\xi})}{\eta(t,\boldsymbol{z})}\right) \Bigg\} \\ & \times \phi(\theta,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi}d\theta \\ + b_2 e^{-\delta(T-t)} & \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta(T,\boldsymbol{\xi})}{\eta(t,\boldsymbol{z})} \Bigg\{ - r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\xi}-\boldsymbol{z}) \\ & - (\delta - r - r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)(T - t) + \log\left(\frac{b_2\eta(T,\boldsymbol{\xi})}{\eta(t,\boldsymbol{z})}\right) \Bigg\} \\ & \times \phi(T,\boldsymbol{\xi};t,\boldsymbol{z},\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi} \end{aligned} \tag{7.6}$$

と与えられる．

対数効用関数の場合，$\mathcal{G}(u,y,z)$の表現においてyとzは加法的に変数分離可能であり，また$\mathcal{H}(t,y,z)$はzに依存しないことに注意しておく．

さて命題5.2から，最適戦略$(\pi^{t,x,z,*},c^{t,x,z,*})$は容易に計算できる．

$$\mathcal{K}(t,x,z)=-\log\left(\frac{x+g(t)}{f(t)}\right),$$

であるから，

$$(7.7)\qquad \begin{cases} \pi_s^{t,x,z,*}X_s^{t,x,z,*}=(X_s^{t,x,z,*}+g(s))\Sigma^{-1}(\hat{\mu}(s,Z_s^{t,z})-r\mathbf{1}) \\ c_s^{t,x,z,*}X_s^{t,x,z,*}=\dfrac{b_1(X_s^{t,x,z,*}+g(s))}{f(s)}-m_1. \end{cases}$$

を得る．(7.7)は，確実性同値原理（certainty equivalence principle）が，対数効用関数$U_i(x)=b_i\log(x+m_i), i=1,2$の場合に成立することを示す．より一般的な確率ドリフトの場合にも確実性同値原理が成立することが示される．逆に確実性同値原理が成立するのは対数効用関数の場合に限られることが知られている．これらの証明については，Kuwana (1995a)を参照されたい．　□

B. 双曲型絶対危険回避効用関数

Aの場合と同様に，$F(\mu)$がコンパクトな台を持つと仮定する．効用関数を$U_i(x)=b_ix^\alpha, b_i>0, 0<\alpha<1, i=1,2$とする．$U_i(x)$ が条件4.1 (b)を満たすことは容易に確認できる．$\mathcal{G}(t,y,z)$および $\mathcal{H}(t,y,z)$は次のように計算できる．

$$\mathcal{G}(t,y,z)=\int_t^T\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\delta(\theta-t)}\frac{\eta(\theta,\xi)}{\eta(t,z)}b_1\left(\frac{\alpha b_1\eta(\theta,\xi)}{e(\theta,\xi;t,y,z)\eta(t,z)}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}$$

$$
\begin{aligned}
&\times \phi(\theta, \boldsymbol{\xi}; t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\Sigma}) d\boldsymbol{\xi} d\theta \\
&+ e^{-\delta(T-t)} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\eta(T, \boldsymbol{\xi})}{\eta(t, \boldsymbol{z})} b_2 \left(\frac{\alpha b_2 \eta(T, \boldsymbol{\xi})}{e(T, \boldsymbol{\xi}; t, y, \boldsymbol{z}) \eta(t, \boldsymbol{z})} \right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \\
&\qquad \times \phi(T, \boldsymbol{\xi}; t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\Sigma}) d\boldsymbol{\xi} \\
&= e^{-\frac{\alpha y}{(1-\alpha)}} k(t, \boldsymbol{z})
\end{aligned}
\tag{7.8}
$$

$$
\begin{aligned}
\mathcal{H}(t, y, \boldsymbol{z}) &= e^{-y} \int_t^T \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(\theta-t)} e(\theta, \boldsymbol{\xi}; t, y, \boldsymbol{z}) \\
&\quad \times \left(\frac{\alpha b_1 \eta(\theta, \boldsymbol{\xi})}{e(\theta, \boldsymbol{\xi}; t, y, \boldsymbol{z}) \eta(t, \boldsymbol{z})} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \phi(\theta, \boldsymbol{\xi}; t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\Sigma}) d\boldsymbol{\xi} d\theta \\
&\quad + e^{-y} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\delta(T-t)} e(T, \boldsymbol{\xi}; t, y, \boldsymbol{z}) \\
&\quad \times \left(\frac{\alpha b_1 \eta(T, \boldsymbol{\xi})}{e(T, \boldsymbol{\xi}; t, y, \boldsymbol{z}) \eta(t, \boldsymbol{z})} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \phi(T, \boldsymbol{\xi}; t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\Sigma}) \boldsymbol{\xi} \\
&= e^{-\frac{y}{1-\alpha}} l(t, \boldsymbol{z}).
\end{aligned}
\tag{7.9}
$$

ここで$k(t, \boldsymbol{z})$は,

$$
\begin{aligned}
k(t, \boldsymbol{z}) &= \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} b_1^{\frac{1}{1-\alpha}} \int_t^T \exp\left[-\frac{(\delta - \alpha r - \alpha r^2 \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}/2)(\theta - t)}{1-\alpha} \right] \\
&\quad \times \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\eta(\theta, \boldsymbol{\xi})}{\eta(t, \boldsymbol{z})} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left[-\frac{r \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{z})}{1-\alpha} \right] \right. \\
&\quad \left. \times \phi(\theta, \boldsymbol{\xi}; t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\Sigma}) d\boldsymbol{\xi} \right\} d\theta \\
&\quad + \alpha^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} b_2^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left[-\frac{(\delta - \alpha r - \alpha r^2 \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} \mathbf{1}/2)(T - t)}{1-\alpha} \right] \\
&\quad \times \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\eta(T, \boldsymbol{\xi})}{\eta(t, \boldsymbol{z})} \right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left[-\frac{r \mathbf{1}' \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{z})}{1-\alpha} \right] \\
&\quad \times \phi(T, \boldsymbol{\xi}; t, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\Sigma}) d\boldsymbol{\xi},
\end{aligned}
\tag{7.10}
$$

また$l(t,z)$は,

$$l(t,z)=\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}b_1^{\frac{1}{1-\alpha}}\int_t^T \exp\left[-\frac{(\delta-\alpha r-\alpha r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)(\theta-t)}{1-\alpha}\right]$$
$$\times\left\{\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\eta(\theta,\boldsymbol{\xi})}{\eta(t,z)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\exp\left[-\frac{r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\xi}-z)}{1-\alpha}\right]\right.$$
$$\left.\times\,\phi(\theta,\boldsymbol{\xi};t,z,\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi}\right\}d\theta$$
$$(7.11)\qquad +\alpha^{\frac{1}{1-\alpha}}b_2^{\frac{1}{1-\alpha}}\exp\left[-\frac{(\delta-\alpha r-\alpha r^2\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\mathbf{1}/2)(T-t)}{1-\alpha}\right]$$
$$\times\int_{\mathbb{R}^n}\left(\frac{\eta(T,\boldsymbol{\xi})}{\eta(t,z)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}\exp\left[-\frac{r\mathbf{1}'\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\xi}-z)}{1-\alpha}\right]$$
$$\times\,\phi(T,\boldsymbol{\xi};t,z,\boldsymbol{\Sigma})d\boldsymbol{\xi}$$

で与えられる．以上から,

$$\mathcal{K}(t,x,z)=(\alpha-1)\log\left(\frac{x}{l(t,z)}\right)$$

となり，最適戦略$(\pi^{t,x,z,*},c^{t,x,z,*})$は,

$$(7.12)\qquad\begin{cases}\pi_s^{t,x,z,*}=\dfrac{\boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\hat{\mu}(s,Z_s^{t,z})-r\mathbf{1})}{1-\alpha}-\dfrac{1}{l(s,Z_s^{t,z})}\dfrac{\partial l(s,Z_s^{t,z})}{\partial z}\\[2ex] c_s^{t,x,z,*}=\dfrac{(\alpha b_1)^{1-\alpha}}{l(s,Z_s^{t,z})}\end{cases}$$

と計算される．$\pi_s^{t,x,z,*}$の表現における第2項の存在から確実性同値原理がHARA効用関数の場合には成立しないことがわかる．□

C. 4.2 (d)を満たす効用関数の例

先に述べたように，一般によく用いられる対数効用関数およびHARA効用関数はどちらも条件4.2 (d).を満たさない．ここでは，条件4.2 (d)を満たすような効用関数の一例を示す．

$$I_i(c) = -1_{\{0<c<e^{-1}\}} \log c + 1_{\{c \geq e^{-1}\}} \left\{ 2 - 2\Phi \left((1+\log c)\sqrt{\pi/2} \right) \right\}$$

によって与えられる関数Iを考える．ただし，$\Phi(\cdot)$は標準正規分布の分布関数である．$I_i(c)$は連続な狭義減少関数であり，$\lim_{c\downarrow 0} I_i(c) = \infty$，$\lim_{c\to\infty} I_i(c) = 0$であるから，逆関数$\frac{dU_i(c)}{dc}$はうまく定義され，連続かつ狭義減少で$\lim_{x\downarrow 0} U_i(x) = \infty$，$\lim_{x\to\infty} U_i(x) = 0$を満たす．従って，一階導関数の逆関数が$I_i(c)$となるような狭義凸効用関数$U_i(x)$が存在する．$a>0$のとき，$\lim_{y\to\infty} e^y(1-\Phi(ay+b)) = 0$だから，

$$\begin{aligned} |e^y I_i(e^y)| &= \left| -ye^y 1_{\{y<-1\}} + e^y \left\{ 2 - 2\Phi\left((y+1)\sqrt{\pi/2} \right) \right\} 1_{\{y \geq -1\}} \right| \\ &\leq M_1 + |y| \end{aligned}$$

を満たすようなある定数$M_1 > 0$が存在する．また，

$$e^y \frac{dI_i(e^y)}{dy} = -e^y 1_{\{y<-1\}} - e^{-\frac{y^2+1}{2}} 1_{\{y \geq -1\}}$$

は有界連続であり，さらに

$$e^y \frac{d^2 I_i(e^y)}{dy^2} = (y+1) e^{-\frac{y^2+1}{2}} 1_{\{y \geq -1\}}$$

もまた有界連続である．最後に

$$\begin{aligned} U_i(I_i(e^y)) =& \text{定数} - e^y 1_{\{y<-1\}} \\ & - \left\{ e^{-1} + \sqrt{\frac{2\pi}{e}} (\Phi(y) - \Phi(-1)) \right\} 1_{\{y \geq -1\}} \end{aligned}$$

もまた有界連続であるから，U_iは条件4.2 (d)を満たす． □

D.正規事前分布の場合

事前分布に正規分布を仮定すると，ドリフトのベイズ推定量がZ_tに関して線形になることから，取り扱いが容易であるように見える．しかし，正規事前分布は条件4.1の仮定を満足しないので，条件4.2を適用できるような効用関数を用いる必要がある．もちろん条件4.1および4.2は十分条件であるが，正規事前分布と対数あるいはHARA効用関数の組み合わせでは，効用最大化問題の値関数が無限大になることから，HJB方程式は成立しなくなる．

Gennotte (1986)，Dothan and Feldman (1986)，Feldman (1989)，Detemple (1991)らは，ドリフトにOrnstein-Uhlenbeck過程を想定し，HJB方程式の有効性検証することなしに，対数効用関数の場合について変数分離によって形式的に解を求めている．ここでの正規事前分布の場合の反例はOrnstein-Uhlenbeckドリフトの特別な場合として考えることができる．

簡単化のために，1次元の場合を考え，$\Sigma = 1$，事前分布を$N(0,1)$とする．$\eta(t,z)$は，

$$\eta(t,z) = (t+1)^{-\frac{1}{2}} \exp\left[\frac{z^2}{2(t+1)}\right]$$

と計算できる．$k(t,z)$の第2項の積分は，

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\eta(T,\xi)}{\eta(t,z)}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \exp\left[-\frac{r(\xi-z)}{1-\alpha}\right] \phi(\xi,T;t,z,1)d\xi \\ =&c(t,z)\int_{\mathbb{R}} \exp\left[\frac{1}{2}\left\{\frac{T-(2-\alpha)t-(1-\alpha)}{(1-\alpha)(t+1)(T-t)}\right\}\xi^2 - \frac{r\xi}{1-\alpha}\right]d\xi\end{aligned}$$

のように表現できる．従って，$T-(2-\alpha)t-(1-\alpha) \geq 0$のとき積分は無限大となり，$T$が大きく$t$が小さいとき値関数は無限大になる．この

場合，HJB方程式は意味を持たない．同様に対数効用関数の場合にも，7.A.で定義した$h(t,z)$が無限大になる． □

参考文献

1. Cox, J. and C. Huang (1989). "Optimal Consumption and Portfolio Policies When Asset Prices Follow a Diffusion Process." *J. Econ. Theory*, **49**, 33-83.
2. Detemple, J. B. (1991). "Further Results on Asset Pricing with Incomplete Information." *J. Econ. Dyn. Control*, **15**, 425–453.
3. Dothan, M. U. and D. Feldman (1986). "Equilibrium Interest Rates and Multiperiod Bonds in a Partially Observable Economy." *J. Finance*, **41**, 369–382.
4. Feldman, D. (1989). "The Term Structure of Interest Rates in a Partially Observable Economy." *J. Finance*, **44**, 789–811.
5. Friedman, A. (1975). *Stochastic Differential Equations and Applications.* Vol. 1., San Diego, Academic Press.
6. Gennotte, G. (1986). "Optimal Portfolio Choice under Incomplete Information." *J. Finance*, **41**, 733–746.
7. Karatzas, I., J. Lehoczky and S. Shreve (1987). "Optimal Portfolio and Consumption Decisions for a 'Small Investor' on a Finite Horizon." *SIAM J. Control Optim.*, **25**, 1557–1586.
8. Karatzas, I. and S. Shreve (1988). *Brownian Motion and Stochastic Calculus.* New York, Springer-Verlag.
9. Karatzas, I. and X. Xue (1991). "A Note on Utility Maximization under Partial Observations." *Math. Finance*, **1**, 57–70.

10. Krylov, M. V. (1980). *Controlled Diffusion Processes.* New York, Springer-Verlag.

11. Kuwana, Y. (1995a). "Certainty Equivalence and Logarithmic Utilities in Consumption / Investment Problems." *Mathematical Finance*, 4, pp. 297–309.

12. Kuwana, Y. (1995b). "An Extension of Krylov's Approach to Stochastic Solutions : The Space $\mathcal{L}E$. " *Hitotsubashi Journal of Economics*, 36, pp. 219–234.

13. Kuwana, Y. (1997). "Optimal Consumption/Investment Decisions in Markovin Dynamic Systems. " *Hitotsubashi Journal of Economics*, 38, pp. 149–166.

14. Merton, R. (1971). "Optimal Consumption and Portfolio Rules in a Continuous Time Model." *J. Econ. Theory*, **3**, 373–413.

15. Protter, P. (1990). *Stochastic Integration and Differential Equations.* New York, Springer-Verlag.

16. Robbins, H. and D. Siegmund (1973). "Statistical Tests of Power One and the Integral Representation of the Solutions of Certain Partial Differential Equations." *Bull. Inst. Math. Acad. Sinica*, **1**, 93–120.