金利の期間構造決定モデル

高　橋　　一

序

本稿では1-ファクター，及び2-ファクターの金利の期間構造モデルを主に無裁定条件下で導出した *Vasicek* ［1977］を中心に考察する．Vasicek モデルの2-ファクターモデルへの拡張は第3章に示したとおり簡単に行われる．さらにリスク中立型経済における債券価格のマルチンゲール表現定理（*Harrison and Pliska* ［1981］）を尤度比と鏡像原理から導出する為の方法について Heuristic な議論を展開する．本稿で用いる確率論の結果中，伊藤の公式，Feynman-Kac の公式，そして Maruyama-Girsanov の定理は最後に付録として載せてある．

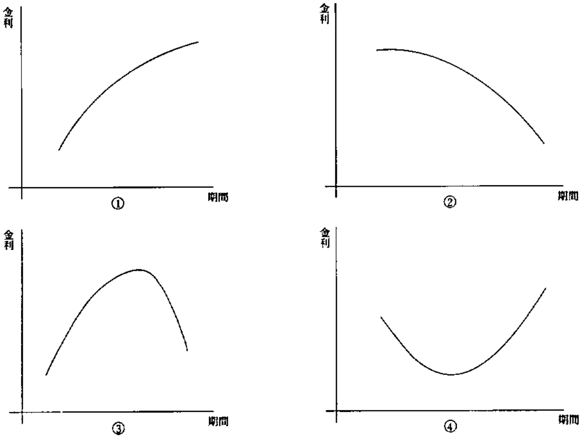
第1章　金利の期間構造

一口に金利と言っても，実は何種類もの異なった金利が存在する．今日借りて（または貸して）明日一番で返済する時に支払われる利子率と，長

＊謝辞： 本論文は（財）全国銀行学術振興財団の平成6年度研究助成の援助のもとに書かれたものである．この場を借りて，同財団に深く感謝したい．

期間に渡り借りる（貸す）時の利子率は当然異なってくるだろう．長期に渡る時には，貸し手は一般に短期の場合より大きなリスクを負う事になり，その分高い利子率を要求するであろう．又別の状況では，もしも将来利子率が低下するとの強い予想が市場を支配しているならば長期利子率は逆に短期利子率よりも低くなるかも知れない．いずれにせよ，利子率は満期日までの関数と見る事が可能であり，その関数を“金利の期間構造（Term Structure of Interest Rate)”と呼び，そのグラフをイールドカーブ（Yield Curve）と呼ぶ．一般には金利は満期までの期間の増加関数と考えられるが，現実には色々なパターンが存在し得る．以下に示すものは代表的な 4 つのパターンである．特に①のケースを順イールド，②を逆イールドと呼ぶ．期間構造は日々変化していく．1980 年代のある時期には逆イールドが観測された．一方現在は順イールドの世界である．

金利の期間構造決定モデルには大きく言って 2 つの流れがある．第 1 番には，*Cox, Ingersoll and Ross*［1987］の論文に代表される一般均衡型モデルに基づく方法，他方は *Vasicek*［1979]，*Heath, Jarrow and Morton*［1992］等による無裁定条件からのモデル導出法である．本論では主に後者の“無裁定モデル”に沿って分析を進める．その流れの中で，金利の期間構造の（変化の）決定メカニズムを与える代表的な Vasicek モデルの概観とその 2-ファクターモデルへの拡張について論じる事にしよう．又 Vasicek は基本的には派生証券価格式が満足する偏微分方程式を求めているが，それとマルチンゲール法との関連について *Siegmund*［1985］で示された鏡像原理と尤度比法との組み合わせによる方法の適用可能性を論じる．又本稿で使用される確率論からの幾つかの結果については確率論に馴染みのない読者の為に最後の章に付録としてまとめてある．



第2章　準備

先ず金利とは具体的に何を指すのか．銀行の定期預金の金利も一つの候補であろうが，一般には国債等の債務不履行の無い（Default Free）割引債券の現在価値から計算される．$P(t, T)$ を T 時点を満期日とする割引債（以後 *T-Bond* と呼ぶ）の（現）時点 t での価格とする．又満期日での価格は便宜上 $P(T, T)=1$ ($, or ¥, etc…) と仮定，即ち，$P(t, T)$ は満期日に於ける値を除きランダムに変動する確率過程であると仮定する．一方利回り（Yield to Maturity）を $R(t, \tau)$（但し，$\tau=T-t$）と書くとき，

(2-1)　$$R(t, \tau) = -(1/\tau) \log P(t, T)$$

が成立する．何故ならば *T-Bond* の時点 t に於ける利回りを連続複利で表せば，明らかに

$$P(t, T) \cdot \exp\{\tau R(t, \tau)\} = P(T, T) = 1$$

が成立する．これより（2-1）式を得る．$R(t, \tau)$ を τ の関数と考えたものを以後金利の期間構造と呼ぶ．さて，金利の期間構造は上でみたように債

券価格式 $P(t, T)$ により決定される．それでは債券価格は何により決定されるのか，以下関係する関数（ランダム関数）を定義する．

[定義 2-1]（i）　フォワード金利（Forward Rate）　t, T_1, T_2 を $t<T_1<T_2$ なる3時点とする．t 時点で決められた将来の T_1 時点から T_2 時点までの間に支払われる利子率を t 時点に於ける T_1 と T_2 の間のフォワード金利と呼び $\mathbf{F}(t, T_1, T_2)$ と書く．又

(2-2) $$F(t, T) = \lim_{\Delta\to 0} \mathbf{F}(t, T, T+\Delta)$$

を t に於ける時点 T での瞬間的なフォワード金利（Instantaneous Forward Rate at t for the Date T）と呼ぶ．

（ii）　スポット金利（Spot Rate）

(2-3) $$r(t) = F(t, t)$$

を時点 t に於けるスポット金利と呼ぶ．スポット金利とは現時点に於ける瞬間（安全）利子率のことである．ここで安全とは，それが（瞬間的）には確率変動を含まないからである．///

上で定義されたフォワード金利と *T-Bond* との間には次の補題で示される関係がある．この補題は考察の対象となっている経済モデルに裁定が存在しないという条件のもとで証明される．

[補題 2-1]　$t<T_1<T_2$ とするならば，

(2-4) $$\mathbf{F}(t, T_1, T_2) = [T_2-T_1]^{-1}\{\log P(t, T_1)-\log P(t, T_2)\}$$

[証明]　仮に（2-4）で等号が成立せず $P(t, T_1)>P(t, T_2)\cdot\exp\{(T_2-T_1)\mathbf{F}(t, T_1, T_2)\}$ であったとする．そこで，時点 t で次のポートフォリオをつくってみよう（角括弧内はキャッシュフロー），

（1）　T_1-*Bond* 1単位売り $[+P(t, T_1)]$

（2）　T_2-*Bond* $\exp\{(T_2-T_1)\mathbf{F}(t, T_1, T_2)\}$単位買い$[-P(t, T_2)\times \exp\{(T_2-T_1)\mathbf{F}(t, T_1, T_2)\}]$

（3）　T_1 から T_2 まで利率 $\mathbf{F}(t, T_1, T_2)$ で＄1借りる約束をする［0］．

すると，このポートフォリオの時点 t に於ける価値は

$$P(t, T_1) - P(t, T_2)\exp\{(T_2 - T_1)\mathbf{F}(t, T_1, T_2)\}$$

となり，仮定より正の値をとるから，このポートフォリオをつくる事により時点 t では正の利益を得る事が可能である．次にこのポートフォリオの時点 T_1 での価値は（1）の T_1-*Bond* の売りに対し＄1償還する事によるマイナス＄1．しかし，（3）より＄1借りる事になっているからこの二つは丁度相殺され，プラスマイナス0となる．一方 T_2 時点では（2）の T_2-*Bond* が償還される事より $+\exp\{(T_2 - T_1)\mathbf{F}\}$．しかし，$T_1$ で借り入れた＄1の返済額は利子込みで $\exp\{(T_2 - T_1)\mathbf{F}\}$．従ってここでもキャッシュフローは0となり，結局はじめに得た利益がそのまま残る事になり，裁定が存在する．従って裁定機会が消滅するまで T_1-*Bond* の価格は下降，逆に T_2-*Bond* の価格は上昇する．逆向きの不等号から出発しても同様の議論により価格調整が行われ，結局等号が成立する．///

定理の系として次の補題が示される．

[補題 2-2]

$$(2\text{-}5)\qquad R(t, \tau) = (1/\tau)\int_{(t,T)} F(t, u)du = (-1/\tau)\log P(t, T)$$

$$(2\text{-}6)\qquad r(t) = R(t, 0)$$

[証明] 定義より，

$$F(t, u) = \lim_{\varDelta\to 0}\mathbf{F}(t, u, u+\varDelta) = \lim_{\varDelta\to 0}\{\log P(t, u) - P(t, u+\varDelta)\}/\varDelta$$
$$= -(\partial/\partial u)\log P(t, u)$$

これより，

$$\int_{(t,T)} F(t, u)du = -\int_{(t,T)}(\partial/\partial u)\log P(t, u)du = -\log P(t, T) = \tau R(t, \tau).$$

上式より $\tau F(t, t) \simeq \tau R(t, \tau)$，ここで $\tau\to 0$ とすれば，$r(t) = R(t, 0)$ が証明される．///

さらに［補題 2-2］より，

$$(2\text{-}7)\qquad P(t,T)=\exp\left\{-\int_{(t,T)}F(t,u)du\right\}.$$

これらより金利の期間構造の決定は r, F, P のどれを出発点としても良い事が判る．しかし P は満期時点で分散が 0 となる確率過程でその取り扱いはやっかいである．そこで一般にはスポット金利 r から出発するか（Vasicek），フォワード金利 F から出発する（Heath-Jarrow-Morton）かにより異なったタイプのモデルが考えられている．以下ではスポット金利を出発点とし，裁定理論を基本的なトゥールとして，期間構造決定モデルを考察する．

第 3 章　Vasicek モデル

本章ではスポット金利からモデルを作る接近法について *Vasicek* [1977], *Jamshidian* [1989] に沿って考察して行く．*Vasicek* 等の出発点はスポット金利であるが，スポット金利の攪乱項が一つのブラウン運動から成るものを **1-ファクターモデル**，複数個から成るものを**マルチファクターモデル**と呼ぶ．本章では第 1 節で 1-ファクターモデルを，そして第 2 節で 2-ファクターモデルを考察する．

§3-1　1-ファクターモデル

本節の出発点はスポット金利の確率過程 $\{r(t), t\geq 0\}$ に対する次の仮定である

［仮定 3-1］（ i ）　スポット金利 $r_t=r(t)$ は連続なマルコフ過程で，次の *Ito* 積分に従う．

$$dr(t)=b(t,r_t)dt+\rho(t,r_t)dW(t),\quad W(t)\sim BM(0,1).$$

（ii） $P_t=P(t,T)$ は $r(t)$ より決定される $(t\geqq 0)$.

(iii) 市場は効率的で，裁定機会は存在しない．

本節では以上の仮定のもとで，債券価格（割引債の現時点における価格）を決定する偏微分方程式を導出し，それを適当な境界条件下で解く事により先ず債券価格式を求める．次いで，割引債に基づく各種派生証券の価格導出の一般論について簡単に触れる．**仮定 3-1** (i) でスポット金利はドリフトの部分 $b(t,r_t)dt$ と攪乱項 $\rho(t,r_t)dW(t)$ との和となっている．また攪乱項はボラティリティと呼ばれる部分 $\rho(t,r_t)$ と標準ブラウン運動の増分 $dW(t)$ との積となっている．本節ではブラウン運動を一つだけ含むモデルを考えるが，一般には複数個のブラウン運動から成る攪乱項を持つモデルをつくる事ができる．2-ファクターモデルへの拡張については第2節で触れる事とする．又一般のマルチファクターモデルへの拡張は次節の方法で容易に行われる．

さて［仮定 3-1 (i)］と *Ito* の公式（[定理 A3]）から，

(3-1)
$$\begin{aligned} dP(t) &= (\partial/\partial t)P(t,T,r_t)dt+(\partial/\partial r)P(t,T,r_t)dr_t \\ &\quad +\frac{1}{2}(\partial^2/\partial r^2)P(t,T,r(t))(dr_t)^2 \\ &= \left\{\partial P_t/\partial t+b_t\partial P_t/\partial r+\frac{1}{2}\rho_t\partial^2 P_t/\partial r^2\right\}dt+\rho_t\partial P_t/\partial r\, dW(t) \\ &= P(t,T,r_t)\mu(t,T,r_t)dt-P(t,T,r_t)\sigma(t,T,r_t)\,dW(t) \end{aligned}$$

但し，

$$\mu_t=\mu(t,T,r_t)=P(t,T,r_t)^{-1}\left\{\partial P_t/\partial t+b_t\partial P_t/\partial r+\frac{1}{2}\rho_t\partial^2 P_t/\partial r^2\right\}$$

$$\sigma_t=\sigma(t,T,r_t)=P(t,T,r_t)^{-1}\{\rho_t\partial P_t/\partial r\}.$$

ところで1-ファクターモデルに於いては満期日の異なる2つの割引債 T_1-*Bond*（その現在 t-時点価格を $P(T_1)=P(t,T_1)$ と書く）と T_2-*Bond*

(同 $P(T_2)=P(t, T_2)$) を適当な比率で組み合わせる事によりローカルには“価格変動リスク”を含まない（無リスクな）ポートフォリオをつくる事ができる．一方無リスクなポートフォリオは安全利子率 $r(t)$ にもとづく投資と同等でなければ裁定が生じる事より，両者の価値は等しくならなければ成らない．これが派生証券価格決定の基本方程式を求める方法である．具体的には T_1-*Bond* を V_1(円) 売り ($\omega_1=-V_1/P$ unit 売り)，T_2-*Bond* を同じく V_2(円) だけ買う ($\omega_2=V_2/P$ unit 買い持ち) ポートフォリオをつくる．このポートフォリオの価値を $V=\omega_1 P(T_1)+\omega_2 P(T_2)$ と書く事にすれば (3-1) より

$$
\begin{aligned}
dV &= dV(t, T_1, T_2) = \omega_1 dP(T_1)+\omega_2 dP(T_2) \\
&= \{V_2\mu(t, T_2)-V_1\mu(t, T_1)\}dt-\{V_2\sigma(t, T_2)-V_1\sigma(t, T_1)\}dW(t) \qquad (3\text{-}2)\\
&= \{I\}dt-\{II\}dW(t).
\end{aligned}
$$

ここで，$\{II\}dW(t)$ が不確実性のソースである．従って $\{II\}=0$ となる様に V_1 と V_2 を選べば無リスクなポートフォリオができる．故に，$V_2\sigma(t, T_2)-V_1\sigma(t, T_1)=0$ とすれば，$V_1=\{V\sigma(t, T_2)\}/\{\sigma(t, T_1)-\sigma(t, T_2)\}$，$V_2=\{V\sigma(t, T_1)\}/\{\sigma(t, T_1)-\sigma(t, T_2)\}$ を得る．さて上式を (3-2) に代入すると，無危険なポートフォリオの無限小時間に於ける価格変動が得られる．又**仮定 3-1 (iii)** より，安全利子率 $r(t)$ での投資との間に裁定が生じないためには，次の方程式が成立しなければならない．

$$
\begin{aligned}
dV(t) &= [\{V(t)\}/\{\sigma(t, T_1)-\sigma(t, T_2)\}][\mu(t, T_2)\sigma(t, T_1) \qquad (3\text{-}3)\\
&\quad -\mu(t, T_1)\sigma(t, T_2)]dt = V(t)r(t)dt.
\end{aligned}
$$

これより，任意の T_1, T_2 にたいして

$$\{\mu(t, T_2)\sigma(t, T_1)-\mu(t, T_1)\sigma(t, T_2)\}/\{\sigma(t, T_1)-\sigma(t, T_2)\} = r(t)$$

が成立．従って，ある関数 $q(t)=q(t, r_t)$ が存在して，

$$\{\mu(t, T_1)-r(t)\}/\{\sigma(t, T_1)\} = \{\mu(t, T_2)-r(t)\}/\{\sigma(t, T_2)\} = q(t)$$

となる．ここで，T_1, T_2 は任意であったから $q(t)$ は $T_i(i=1, 2)$ には依存

しない．そこで任意の T にたいして，

$$q(t) = \{\mu(t, T) - r(t)\}/\sigma(t, T)$$

が成り立つ．ここで導入された $q(t)$ が“リスクの市場価格（Market Price of Risk)”と呼ばれる関数である．リスクの市場価格を用いれば，債権の収益率と安全利子率との差は

$$\text{(3-4)} \qquad \mu(t, T) - r(t) = q(t)\sigma(t, T)$$

と書きあらわせる．一般にリスクを持つ債券の瞬間収益率 $\mu(t, r_t)$ と無危険資産からの収益率 r_t とは一般には異なるが，その差は全ての割引債を通じて $q(t)\sigma(t, T)$ である事と無裁定条件が同値であることが示されたのである．q が正であれば危険資産の収益率は無危険資産の収益率よりも高くなるが，負の時には逆となる．常識的にはリスクの市場価格が負となることは考えにくいが，負となる状況も存在し得ることを注意しておく．後で述べるが，リスクの市場価格は現実の経済とリスク中立型経済とを結ぶ橋である．さて，μ_t と σ_t の定義より（3-4）式は

$$[-1/P(t,T,r_t)]\left\{(\partial/\partial t) + b(t,r_t)(\partial/\partial r) + \frac{1}{2}\rho(t,r_t)(\partial^2/\partial r^2)\right\}P(t,T,r_t) - r(t)$$
$$= q(t)\{[-1/P(t,T,r_t)]\rho(t,r_t)(\partial/\partial r)P(t,T,r_t)\}$$

と書ける．そして，これより割引債券価格決定のための基本方程式

$$\text{(3-5)} \qquad \begin{aligned}&(\partial/\partial t)P(t, T, r) + [b(t,r_t) + q(t)\rho(t,r_t)](\partial/\partial r)P(t, T, r_t)\\ &+\frac{1}{2}\rho(t,r_t)^2(\partial^2/\partial r^2)P(t, T, r_t) - r(t)P(t, T, r_t) = 0\end{aligned}$$

を得る．$P(t, T, r_t)$ を決定するためには方程式（3-5）を境界条件

$$\text{(3-6)} \qquad P(T, T, r_T) = 1$$

のもとで解けば良い．そして，期間構造は

$$R(t, \tau) = [-1/\tau] \log P(t, T, r_t)$$

より求められる．一般に偏微分方程式を実際に解く事は易しくはないが，

この場合特定のスポット金利過程については **Closed Form** の形で解が求められている．次の定理はその準備であり *Vasicek* [1977] の主要結果のひとつである．

[定理 3-1]　境界条件（3-6）のもとで（3-5）の解は

$$P(t,T,r_t)=E_t\left\{\exp\left\{-\int_{(t,T)}r(u)du-\frac{1}{2}\int_{(t,T)}q(u,r_u)^2du+\int_{(t,T)}q(u,r(u))dW(u)\right\}\right\} \tag{3-7}$$

と表現される．但し $E_t(\cdot)$ は $\{r(u)\,;u\leqq t\}$ が与えられた時の条件付き期待値である．

[付記]　*Vasicek* [1977] は解を直接求めているが，ここではより一般的に Feynman-Kac の公式と Maruyama-Girsanov の定理から証明する．

[定理の証明]　基本方程式（3-5）を

$$-\frac{1}{2}[\rho_t^2(\partial^2P_t/\partial r_t^2)+(b_t+q_t\rho_t)(\partial P_t/\partial r)]-(\partial P_t/\partial t)+r_tP_t=0,\quad P(T,T)=1$$

と書き直せば，§ A4（A-41, 42）式で $L_t=\frac{1}{2}[\rho_t^2(\partial^2/\partial r^2)+(b_t+q_t\rho_t)(\partial/\partial r)]$ $k(t,x)=r(t), f(x)=1$ であるから，［定理 A8］より

$$P(t,T,r_t)=E_t\left\{\exp\left\{-\int_{(t,T)}X(u)du\right\}\right\} \tag{3-8}$$

ここで，$X(t)$ は $dX(t)=(b_t+q_t\rho_t)dt+\rho_t dW(t)$ で定義される *Ito*-過程である．一方，$r(t)$ は $dr(t)=b_tdt+\rho_tdW(t)$ で定義される．そこで Maruyama-Girsanov の定理（定理 A10）より，（3-8）を $r(t)$ で表現すると

$$E_t\left\{\exp\left\{-\int_{(t,T)}X(u)du\right\}\right\}$$
$$=E_t\left\{\exp\left\{-\int_{(t,T)}r(u)du+\int_{(t,T)}q(u)dW(u)-\frac{1}{2}\int_{(t,T)}q^2(u)du\right\}\right\}$$

となり，定理が証明された．///

勿論　$q(u)=0$　の時には　$X(t)=r(t)$　となり　$P(t,T,r_t)=$

$E_t\left\{\exp\left\{-\int_{(t,T)} r(u)du\right\}\right\}$ が成立している．この時 $P(t,T,r_t)$ は満期に於ける債券価格 $P(T,T)=1$ を安全利子率で割り引いたものを測度 P のもとで平均したものに他ならない．一方

(3-9) $$B(t) = \exp\left\{\int_{(0,t)} r(u)du\right\}$$

とすると，$P(T,T)=1$ を考慮すれば，

(3-10) $$P(t,T)/B(t) = E_t\{P(T,T)/B(T)\},$$

が全ての $t \leqq T$ に付いて成立している．即ち $\{P(t,T)/B(t) : t \leqq T\}$ は，もしもリスクの市場価格が 0 であるならば測度 P のもとでマルチンゲールとなっている．さて，以下の Heuristic な議論は $P(t,T,r_t)$ のマルチンゲール表現をあたえる．$r(t)$ のマルコフ性より（3-7）の右辺は

$$E^{(t,W(t))}\left\{\exp\left\{\int_{(t,T)} r(u)du + \int_{(t,T)} q(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_{(t,T)} q^2(u)\right\}\right\}$$

に等しい，ここで期待値は $(t, W(t))$ を出発点とするブラウン運動の分布による．一方，

$$dQ^{(t,W(t))*} = \exp\left\{\int_{(t,T)} q(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_{(t,T)} q^2(u)du\right\}dP^{(t,W(t))}$$

で測度 Q^* を定義すれば

$$\int_{\Omega} \exp\left\{-\int_{(t,T)} r(u)du + \int_{(t,T)} q(u)dW(u) - \frac{1}{2}\int_{(t,T)} q^2(u)du\right\}dP^{(t,W(t))}$$
$$= \int_{\Omega} \exp\left\{-\int_{(t,T)} r(u)du\right\} dQ^{(t,W(t))*}$$

従って，

(3-11) $$P(t,T,r_t) = E_t^*\left\{\exp\left\{-\int_{(t,T)} r(u)du\right\}\right\}$$

が成立する．そこで（3-10）と同様に，先ず $B(t)$ で割り引いてみると，

(3-10′) $$P(t,T)/B(t) = E_t^*\{P(T,T)/B(T)\}$$

が全ての $t \leqq T$ に付いて成立している．即ち $\{P(t,T)/B(t) : t \leqq T\}$ は，測

度 Q^* のもとでマルチンゲールとなっている．これは *Harrison and Pliska* [1982] の主要結果である．上の議論は例えば，*Siegmund* [1985] 等の方法により厳密に証明されるであろう．

[定理 3-1] は連続的にクーポンを支払う債権の価格決定モデルや，それらの割引債にもとづく（ヨーロッパ型）オプション等をふくむ派生証券価格決定モデルに対しても比較的容易に拡張される．そこで $U^*(t,T,r_t)$ をレート $h(t,r_t)$ で連続的にクーポンを支払い，そして満期日 T には $g(r_T)$ を償還する証券の時点 t 価格とする．すると (3-5) と同様にして，次の方程式が成立することが証明される．

$$
\text{(3-5}'\text{)}\quad
\begin{aligned}
&(\partial U^*(t,T,r)/\partial t)+[b(t,r_t)+q(t)\rho(t,r_t)](\partial U^*(t,T,r_t)/\partial r)\\
&+\frac{1}{2}\rho(t,r_t)^2(\partial^2 U^*(t,T,r_t)/\partial r^2)-r(t)U^*(t,T,r_t)+h(t,r_t)=0
\end{aligned}
$$

$$
\text{(3-6}'\text{)}\quad U^*(T,T,r_T)=g(r_T).
$$

ここで次の [定理 3-1] の系が証明される．

[系 3-1]

$$
\text{(3-7}'\text{)}\quad
\begin{aligned}
U^*(t,T,r_t)=E_t\Big\{&g(X_T)\exp\Big\{-\int_{(t,T)}X(u)du\Big\}\\
&+\int_{(t,T)}h(t,X_s)\exp\Big\{-\int_{(t,T)}X(\theta)\Big\}d\theta\Big\}
\end{aligned}
$$

但し，$dX(t)=(b_t+q_t\rho_t)dt+\rho_t dW(t)$．

系 3-1 の証明は *Feynnman-Kac* 公式を (3-5′)，(3-6′) に適用すればよい．

///

さて [定理 3-1] でスポット金利をうまく特定化すれば債券価格を Closed Form で求める事が可能となる．そこで具体的にスポット金利が従う確率過程として次の仮定を置こう．

[仮定 3-2]　スポット金利 $r(t)$ は Ornstein-Uhlenbeck プロセスに従う：

(3-12)　$dr(t) = \alpha(\gamma_0 - r(t))dt + \rho dW(t), \qquad W(t) \sim BM(0,1).$

但し，α, γ_0, ρ は全て正の定数．///

次の定理が *Vasicek* ［1977］の主要結果である．

［定理 3-2］ 仮定3-2のもとで，ゼロクーポン債の価格（基本方程式の解）は

(3-13)
$$\begin{aligned} P(t,T,r_t) = \exp\{&(1/\alpha)[1-\exp\{-\alpha(T-t)\}][R(\infty)-rt] \\ &-(T-t)R(\infty)-(\rho^2/4\alpha^3)[1-\exp\{-\alpha(T-t)\}]^2\} \end{aligned}$$

但し，$R(\infty) = \gamma_0 + (\rho q/\alpha) - \dfrac{1}{2}(\rho/\alpha)^2.$

［証明］ $r(t)$ が与えられた時に確率微分方程式 (3-12) を解くと，$s \geqq t$ なる全ての s に対して，

(3-14)
$$\begin{aligned} r(s) = [r(t)-\gamma_0]\exp\{-\alpha(s-t)\} + \gamma_0 \\ +\rho\int_{(t,s)} \exp\{-\alpha(s-u)\}dW(u) \end{aligned}$$

となる．これより

$$\begin{aligned} E_t[r(T)] &= \gamma_0 + [r(t)-\gamma_0]\exp\{-\alpha(T-t)\} \\ \mathrm{var}_t[r(T)] &= (\rho^2/2\alpha)[1-\exp\{-2\alpha(T-t)\}] \end{aligned}$$

となる事を注意しておく．定理を証明するには［定理 3-1］で $q=0$ として期待値

$$P_t(t,T) = E_t[\exp\{-I(T)\}], \qquad I(T) = \int_{(t,T)} r(u)du$$

を計算すれば良い．(3-14) より

$$\begin{aligned} I(T) = \gamma_0(T-t) + [r(t)-\gamma_0]\exp\{-\alpha(T-t)\}/\alpha \\ +(\rho/\alpha)\int_{(t,T)}[1-\exp\{-\alpha(T-x)\}]dW(x) \end{aligned}$$

これより，

$$\mu_{I(T)} = E_t[I(T)] = \gamma_0(T-t) + [r(t)-\gamma_0]\exp\{-\alpha(T-t)\}/\alpha$$

(3-15)　$\sigma^2_{I(T)} = \mathrm{var}_t[I(T)] = (\rho^2/2\alpha^3)[4\exp\{-\alpha(T-t)$

$$-\exp\{-2\alpha(T-t)\}+2\alpha(T-t)-3]$$

一方，$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ であれば，$E[\exp\{-X\}]=\exp\left\{-\mu+\frac{1}{2}\sigma^2\right\}$ だから，

$$E_t[\exp\{-I(T)\}] = \exp\left\{-\mu_{I(T)}+\frac{1}{2}\sigma^2_{I(T)}\right\}$$

上式に（3-15）を代入する事より定理は証明される．///

一方仮定 3-2 のもとで系 3-1 の結果は *Jamasidian*［1989］により次のように与えられている：

[系 3-2]

(3-16)
$$U^*(t,T,r_t) = P(t,T,r_t)E_t[g(R_{t,T,r(T)})] + \int_{(t,T)} P(t,s,r_t)E[h(R_{t,s,r(t)})]ds$$

但し，

$$P(t,s,r) = \exp\left\{\frac{1}{2}k^2(t,s)-n(t,s,r)\right\},\ F(t,s,r) = m(t,s,r)-\phi(t,s)$$
$$m(t,s,r) = \exp\{-\alpha\tau\}r+(1-\exp\{-\alpha\tau\}\gamma_0,\ \ \tau = T-t$$
$$n(t,s,r) = \tau\gamma_0+(r-\gamma_0)(1-\exp\{-\alpha\tau\})/\alpha$$
$$k^2(t,s) = \rho^2(4\exp\{-\alpha\tau\}-\exp\{-2\alpha\tau\}-2\alpha\tau-3)/(2\alpha^3)$$
$$\phi(t,s) = \rho^2(1-\exp\{-\alpha\tau\})^2/(2\alpha^2).\ ///$$

次の 2 つの例は *Jamshidian*［1989］にある［系 3-2］の応用である．

[例 3-1]　先物価格の導出．$t \leqq T \leqq s$ なるとき，*s-Bond* の T 時点に於ける先物価格を求めたい．もしも *s-Bond* の T 時点に於ける価格 $P(T,s)$ が既知であればそれを時点 t から T までの無裁定利子率 $P(t,T)^{-1}$ で割り引けばよい．即ち $P(T,s)/P(t,T)$ がその価格である．しかし $P(T,s)$ は未知であるからそれを（3-16）で“推定”する．

ここで，$g(r)=P(T,s,r), h(t,r) = 0$ であるから，それは $P(t,T,r_t)E_t[\mathbf{P}]$，但し $\mathbf{P}=P(T,s,R_{r,t,T})$ であたえられる．即ち，

(3-17)
$$E_t[\mathbf{P}] = P(t,s,r_t)/P(t,T,r_t)$$

が成立している.

[例 3-2] $C(t, T, s, k, r_t)$ を s-*Bond* を源資産とする，満期日 T，行使価格 K のヨーロッパ型コールオプション C の t-時点での価格とするとき ($t \leqq T \leqq s$),

$$(3\text{-}18)\quad C(t, T, s, k, r_t) = P(t, s, r_t)\Phi(h) - KP(t, T, r_t)\Phi(h-\sigma_P)$$

但し，$\sigma_P = v(t, T)[1-\exp\{-\alpha(s-t)\}]/\alpha,\ \ v^2(t, T) = \mathrm{var}_t[r(T)]$

$$h = (1/\sigma_P)\log[P(t, s, r_t)/P(t, T, r_t)] + \frac{1}{2}\sigma_P$$

$\Phi=$ 標準正規分布関数.

実際，C は r にもとづく派生証券で満期日に於ける価値は $\max\{0, P(T, s, r_T)-K\}$ であることより (3-16) で $g(r) = \max\{0, P(T, s, r)-K\}$ とおけばよいから，

$$(3\text{-}20)\qquad C(t, T, s, K, r_t) = P(t, T, r_t)E_t[\max\{0, \mathbf{P}-K\}],$$
$$\mathbf{P} = P(T, s, R_{r, t, T})$$

となる．ところで $\mathbf{P}$ の定義より，$\mathbf{P}$ は対数正規分布に従い

$$\sigma_P^2 \equiv \mathrm{var}\{\log \mathbf{P}\} = \mathrm{var}_{r, t}\{\log P(T, s, r_T)\}$$
$$= \mathrm{v}(t, s)[1-\exp\{-\alpha(s-T)\}]/\alpha$$

一方，$E_t[\mathbf{P}] = \exp\left\{\mu+\frac{1}{2}\sigma_P^2\right\}$ は対数正規分布の性質から明らか．又 (3-17) より，

$$\exp\left\{\mu+\frac{1}{2}\sigma_P^2\right\} = P(t, s, r_t)/P(t, T, r_t).$$

従って

$$\mu = \log[P(t, s, r_t)/P(t, T, r_t)] - \frac{1}{2}\sigma_P^2.$$

ところで，$Z \sim N(0, 1)$ とすれば，$\log \mathbf{P} = \mu + \sigma_P Z$ と表現できるから (3-20) は

$$C(t,T,s,K,r_t) = P(t,T,r_t)E_t[\max\{0, \exp(\mu+\sigma_P Z)-K\}],$$

と書ける．又，

$$E_t[\max\{0,\exp(\mu+\sigma_P Z)-K\}] = \int_{(-(h-\sigma_P),\infty)}[\exp(\mu+\sigma_P x)-K]\phi(x)dx$$

より，(3-18) を得る．///

§3-2　マルチファクターモデル

本節では前節の結果を2-ファクターモデルへと拡張する．一般のマルチファクターモデルへの拡張は本節の方法を用いることにより容易に行われる．2-ファクターモデルは次のスポット金利に対する仮定で特徴づけられる．（関連問題で最近出版された論文に *Miura and Kishino* [1995] がある．）

[仮定3-3]　(i)　スポット金利 $r_t = r(t)$ は連続なマルコフ過程で，次の *Ito* 積分に従う．

(3-21)　$dr(t) = b(t,r_t)dt + \rho_1(t,r_t)dW_1(t) + \rho_2(t,r_t)dW_2(t)$

但し，$W_{it} = W_i(t) \sim BM(0,1)\,(i=1,2)$ は相関係数 η_{12} を持つ2次元（標準）ブラウン運動，$\rho_{it} = \rho_i(t,r_t)$　$(i=1,2)$ はボラティリティー．

(ii)　$P_t = P(t,T)$ は $r(t)$ より決定される，$t \geqq 0$．

(iii)　市場は効率的で，裁定機会は存在しない．

仮定3-3 (i) と *Ito* の公式から，

$$\begin{aligned} dP(t) &= \Big\{(\partial P_t/\partial t) + b_t(\partial P_t/\partial r) \\ &\quad + \frac{1}{2}(\rho_{1t}^2 + \rho_{2t}^2 + 2\rho_{1t}\rho_{2t}\eta_{12t})(\partial^2 P_t/\partial r^2)\Big\}dt \\ &\quad + \rho_{1t}(\partial P_t/\partial r)dW_1(t) + \rho_{2t}(\partial P_t/\partial r)dW_2(t) \qquad (3\text{-}22) \\ &= \mu_2(t,T,r_t)P(t,T,r_t)dt \\ &\quad + \sigma_1(t,T,r_t)P(t,T,r_t)dW_1(t) \end{aligned}$$

$$+\sigma_2(t,T,r_t)P(t,T,r_t)dW_2(t)$$

但し，

$$\mu_t=\mu_t(T)=\mu(t,T,r_t)$$
$$=P(t,T,r_t)^{-1}\Big\{(\partial P_t/\partial t)+b_t(\partial P_t/\partial r)$$
$$+\frac{1}{2}(\rho_{1t}^2+\rho_{2t}^2+2\rho_{1t}\rho_{2t}\eta_{12t})(\partial^2P_t/\partial r^2))\Big\},$$
$$\sigma_{1t}(t)=\sigma_1(t,T,r_t)=P(t,T,r_t)^{-1}\{\rho_{1t}(\partial P_t/\partial r)\}$$
$$\sigma_{2t}(t)=\sigma_2(t,T,r_t)=P(t,T,r_t)^{-1}\{\rho_{2t}(\partial P_t/\partial r)\}.$$

前節と同様，満期日の異なる3種類の割引債券からトータルで V の価値を持つ無リスクのポートフォリオを作ってみる．

$$V_t=[V_1/P_t(T_1)]P(t,T_1,r_t)+[V_2/P_t(T_2)]P(t,T_2,r_t)+[V_3/P_t(T_3)]P(t,T_3,r_t)$$
$$=\omega_1P(t,T_1,r_t)+\omega_2P(t,T_2,r_t)+\omega_3P(t,T_3,r_t)$$

但し，$P_t(T_i)=P(t,T_i,r_t), i=1,2,3.$ 前節と同様 *Ito* の公式より，

$$dV_t=\omega_1dP(t,T_1,r_t)+\omega_2dP(t,T_2,r_t)+\omega_3dP(t,T_3,r_t)$$
$$=[\omega_1\mu_2(t,T_1,r_t)P(t,T_1,r_t)+\omega_2\mu_2(t,T_2,r_t)P(t,T_2,r_t)$$
$$+\omega_3\mu_2(t,T_3,r_t)P(t,T_3,r_t)]dt+[\omega_1\sigma_1(t,T_1,r_t)P(t,T_1,r_t)$$
$$+\omega_2\sigma_1(t,T_2,r_t)P(t,T_2,r_t)+\omega_3\sigma_1(t,T_3,r_t)P(t,T_3,r_t)]dW_1(t) \tag{3-23}$$
$$+[\omega_1\sigma_2(t,T_1,r_t)P(t,T_1,r_t)+\omega_2\sigma_2(t,T_2,r_t)P(t,T_2,r_t)$$
$$+\omega_3\sigma_2(t,T_3,r_t)P(t,T_3,r_t)]dW_2(t)$$
$$=\{I\}dt+\{II_1\}dW_1(t)+\{II_2\}dW_2(t)$$

ここで，確率変動をふくまないポートフォリオは $\{II_1\}=\{II_2\}=0$ の場合である事より，

$$\begin{aligned}&\omega_1\sigma_{1t}(T_1)P_t(T_1)+\omega_2\sigma_{1t}(T_2)P_t(T_2)+\omega_3\sigma_{1t}(T_3)P_t(T_3)=0\\&\omega_1\sigma_{2t}(T_1)P_t(T_1)+\omega_2\sigma_{2t}(T_2)P_t(T_2)+\omega_3\sigma_{2t}(T_3)P_t(T_3)=0\end{aligned} \tag{3-24}$$

が成立するように，$\omega_1,\omega_2,\omega_3$ を選べば良い．簡単な代数計算より，

$$(3\text{-}25)\quad \begin{aligned}\omega_1 &= [D_3/D_2]\cdot[P_t(T_3)/P_t(T_1)]\omega_3\\ \omega_2 &= [D_1/D_2]\cdot[P_t(T_3)/P_t(T_2)]\omega_3\end{aligned}$$

但し，

$$D_1 = \sigma_{1t}(T_1)\sigma_{2t}(T_3)-\sigma_{1t}(T_3)\sigma_{2t}(T_1)$$
$$D_2 = \sigma_{1t}(T_2)\sigma_{2t}(T_1)-\sigma_{1t}(T_1)\sigma_{2t}(T_2)$$
$$D_3 = \sigma_{1t}(T_3)\sigma_{2t}(T_2)-\sigma_{1t}(T_2)\sigma_{2t}(T_3).$$

これを（3-23）に代入し，$V=[D_1/D_2+D_3/D_2+1]P_t(T_3)\omega_3$, $dV_t=\{I\}dt$ を考慮すると，無裁定条件 $dV_t=V(t)r(t)dt$ より，

$$\begin{aligned}&D_2^{-1}[D_3\mu(t,T_1,r_t)+D_1\mu(t,T_2,r_t)+D_2\mu(t,T_3,r_t)]\omega_3P(t,T_3,r_t)\\ &\quad=D_2^{-1}[D_1+D_3+D_2]r(t)\omega_3P(t,T_3,r_t)\end{aligned}$$

が成立している事が判る．上式を整理すると，

$$D_3[\mu(T_1)-r(t)]+D_1[\mu(T_2)-r(t)]+D_2[\mu(T_3)-r(t)]=0$$

これは，行列

$$G=\begin{vmatrix}[\mu(T_1)-r(t)] & [\mu(T_2)-r(t)] & [\mu(T_3)-r(t)]\\ \sigma_{1t}(T_1) & \sigma_{1t}(T_2) & \sigma_{1t}(T_3)\\ \sigma_{2t}(T_1) & \sigma_{2t}(T_2) & \sigma_{2t}(T_3)\end{vmatrix}$$

の行列式が 0 という事を示している．即ち，連立方程式

$$\sigma_{1t}(T_1)\gamma_1(t,T_1,T_2)+\sigma_{2t}(T_1)\gamma_2(t,T_1,T_2)=[\mu(T_1)-r(t)]$$
$$\sigma_{1t}(T_2)\gamma_1(t,T_1,T_2)+\sigma_{2t}(T_2)\gamma_2(t,T_1,T_2)=[\mu(T_2)-r(t)]$$

と

$$\sigma_{1t}(T_1)\gamma_1(t,T_1,T_3)+\sigma_{2t}(T_1)\gamma_2(t,T_1,T_2)=[\mu(T_1)-r(t)]$$
$$\sigma_{1t}(T_3)\gamma_1(t,T_1,T_3)+\sigma_{2t}(T_3)\gamma_2(t,T_1,T_3)=[\mu(T_3)-r(t)]$$

は同じ解を持つ事と同値である：$\gamma_1(t,T_1,T_2)=\gamma_1(t,T_1,T_3), \gamma_2(t,T_1,T_2)=\gamma_2(t,T_1,T_3)$. 一方，$T_1, T_2, T_3$ は任意であったから，結局任意の T と S に対してある関数 $\gamma_1(t)$, $\gamma_2(t)$ が存在して，

$$\text{(3-26)}\quad \begin{aligned}\sigma_{1t}(T)\gamma_1(t)+\sigma_{2t}(T)\gamma_2(t) &= [\mu(T)-r(t)]\\ \sigma_{1t}(S)\gamma_1(t)+\sigma_{2t}(S)\gamma_2(t) &= [\mu(S)-r(t)]\end{aligned}$$

が成立する．$\gamma_1(t)$ と $\gamma_2(t)$ が 2-ファクターモデルに於けるリスクの市場価格である．μ と σ の定義から債券価格 $P(t, T, r_t)$ 決定のための基本方程式

$$\text{(3-27)}\quad \begin{aligned}&(\partial/\partial t)P_t+[b_t-\rho_{1t}\gamma_1(t)-\rho_{2t}\gamma_2(t)](\partial/\partial r)P_t\\ &+\frac{1}{2}[\rho_{1t}^2+\rho_{2t}^2+2\rho_{1t}\rho_{2t}\eta_{12t}](\partial^2/\partial r^2)P_t-r(t)P(t, T, r_t) = 0\end{aligned}$$

が導出された，但し $P_t=P(t, T, r_r)$ である．(3-5) との違いはリスクの市場価格が 2 つになる事から偏微分作用素が若干複雑になった事であろう．従って (3-18) の解は [定理 3-1] と同様に求められる．以下その結果のみ提示しておく．

[定理 3-3] 境界条件 (3-6) のもとで方程式 (3-27) の解は

$$\text{(3-28)}\qquad P(t, T, r_t) = E_t\left\{\exp\left\{-\int_{(t, T)}X(u)du\right\}\right\}$$

ここで，$X(t)$ は $dX(t) = (b_t-\rho_{1t}\gamma_1(t)-\rho_{2t}\gamma_2(t))dt+\sigma_t^* dW(t)$ で定義される *Ito*-過程である，但し $W(t)\sim BM(0,1)$

$$\sigma_{t}^{*2} = [\rho_{1t}^2+\rho_{2t}^2+2\rho_{1t}\rho_{2t}\eta_{12t}].\ ///$$

付録　ブラウン運動と確率微分方程式

§ A1　ブラウン運動

株価等の動きを記述するにはどうしたら良いか．先ず価格変化は連続的に起こると仮定しよう．その変化は予測可能な部分と，数多くの不確定変動から成る予測不能な部分とに分けられる．予測不能部分を記述する確率モデルが以下で定義する**ブラウン運動**である．

[定義 A1]　以下の3条件を満たす確率過程 $\{W(t), t \geqq 0\}$ を（標準）**ブラウン運動**（Standard Brownian Motion）と呼び，$W(t) \sim BM(0,1)$ と表す事にする．

（i）　任意の $t, s \geqq 0$ に対して，

(A-1)　$$W(s+t)-W(t) \sim N(0,s)$$

（ii）　任意の $t_1 \leqq t_2 < t_3 \leqq t_4$ に対して

(A-2)　$$W(t_4)-W(t_3) \text{ と } W(t_2)-W(t_1) \text{ とは独立}$$

（iii）　$W(0)=w_0$，又 $W(t)$ は $t=0$ で連続．///

[注意]　$W(t)=W(t,\omega), t \geqq 0$ が確率過程であるとは，任意の，しかし固定された ω に対し $W(\cdot,\omega)$ は t の関数，一方任意固定された t にたいし $W(t,\cdot)$ は Ω の上で定義される確率変数である．$W(\cdot,\omega)$ をサンプルパスと呼ぶ．///

ブラウン運動は標準正規ランダムウォークの連続型と考えれば分かりやすい．又次の定理はブラウン運動を特徴づける重要な性質の一つである．

[定理 A1]　ブラウン運動は時間の関数（t の関数）として連続である，しかし至るところ微分不可能である．

[証明のアイディア]　厳密な証明はかなりやっかいであるがアイディアはそれほど難しくはない．先ず連続性に付いては，正規ランダムウォークの

極限として，そのサンプルパスが連続となるようにブラウン運動を定義したと云う事で一応納得する事としよう．次に何故微分不可能であるかを示す．まず $H(t,\varDelta)=[W(t+\varDelta)-W(t)]/\varDelta$ として，もしも $\lim_{\varDelta\to 0}H(t,\varDelta)$ が何らかの意味で存在すれば $W(t)$ は点 t において（その意味で）微分可能である．しかし〔定義 A1（i）〕より $Z=[W(t+\varDelta)-W(t)]/\sqrt{\varDelta}$ の分布は平均 0，分散 1 の標準正規分布となる．従って Z は確率 1 で 0 でない有限の値をとる，同時に等確率でプラスまたはマイナスの値をとる．$H=Z/\sqrt{\varDelta}$ であるから，$\varDelta\to 0$ の時に，その値は確率 $\frac{1}{2}$ で $+\infty$ または $-\infty$ へと発散し極限は存在しない．即ち微分不能である．///

次に一般の正規ランダムウォークに対応する“ドリフト付き”ブラウン運動を定義しよう．

[定義 A2] $W(t)\sim BM(0,1)$，μ を任意の定数，σ を任意の正定数とする時

(A-3) $$X(t)=\mu t+\sigma W(t) \quad t\geqq 0$$

を（単位時間あたり）ドリフト μ，分散 σ^2 のドリフト付きブラウン運動と呼び以下の様に書く，

$$X(t)\sim BM(\mu,\sigma^2).\ ///$$

次に，ドリフトと分散が時間と共に変化する様なモデルを記述するにはどうしたら良いか．離散型モデルでは話は簡単である．例えば η_i を $\eta_i\sim N(\mu_i,\sigma_i^2)$ $i=1,2,\cdots,n$ として，その和 $S_n=\eta_1+\cdots+\eta_n$ を考えればよい．そこで連続時間のモデルでは $\varDelta X(t)=X(t+\varDelta)-X(t)\sim N(\mu(t,\varDelta)\varDelta t,\sigma(t,\varDelta)^2\varDelta t)$ を考えれば，$\varDelta X(t)=\mu(t,\varDelta)\varDelta t+\sigma(t,\varDelta)\varDelta W(t)$ は $\varDelta t$ を単位時間としたときのビルディングブロックとなる．そこで $\varDelta\to 0$ としたときの極限（もし存在すれば）

(A-4) $$dX(t)=\mu(t,\omega)dt+\sigma(t,\omega)dW(t)$$

が離散時間モデルに於ける各 η に対応する．しかしブラウン運動は微分不能であり $dW(t)$ という記号そのものが解析学の意味では定義できない．

実は，この様な問題に答えるのが次節で論じる *Ito* 積分と *Ito* の公式である．

§A2　伊藤の確率積分（Ito Stochastic Integral）と伊藤の公式（Ito Formula）

$(\Omega, \mathcal{F}, P)$ を確率空間，$\{W(t), t \geqq 0\}$ を標準ブラウン運動，$\{\mathcal{F}_t = \sigma(W(s), s \leqq t),\ t \geqq 0\}$ は *σ-algebra* の増大列．又 $f(t) = f(t, \omega)$ は下の［定義 A2］で示される条件を満たす関数とする．そこで $f(t)$ の $W(t)$ に関する確率積分

(A-5)
$$\int_{(a,b)} f(t)dW(t) = \int_{(a,b)} f(t,\omega)dW(t,\omega)$$

を定義しよう．先ず，関数 $f(t)$ が“可予測（各 t に対して $f(t)$ は $\mathcal{F}_{t-} = \sigma\{\cup_{s<t}\mathcal{F}_s\}$ 可測）な単関数（*Predictable Simple Function*）”の場合を考えよう；即ち

(A-6)　$f(t,\omega) = \sum_i c_i(\omega) I_{A_i}(t), \qquad A_i = (t_i, t_{i+1}], a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$

I_A は集合 A の定義関数，又 $c_i(\omega)$ は $\mathcal{F}_{t_i}$ 可測．

この可予測単関数に対し，確率積分を

(A-7)
$$I(f) = \int_{(a,b)} f(t)dW(t) = \sum_i c_i(\omega)\{W(t_{i+1}) - W(t_i)\}$$

で定義する．

次に f が一般の可予測関数の場合を考える．可予測関数は一定の条件のもとで可予測単関数で近似される．従って一般の f に付いては (1) 先ず可予測単関数 f_n で近似し ($f_n \rightarrow f$)，(2) 各単関数ごとに積分 $I_n(f_n)$ を定義する，$\left(I_n(f_n) = \int_{(a,b)} f_n(t)dW(t) = \sum c_{n_i}(\omega)\{W(t_{i+1}) - W(t_i)\}\right)$．そして，(3) その積分の極限として $I(f) = \int_{(a,b)} f(t)dW(t)$ を定義したい．即ち；

(A-8)
$$I(f) = \text{“}\lim_{n\to\infty}\text{''}\, I_n(f_n).$$

しかしながら，ブラウン運動 $W(t)$ は微分可能でもなければ，有界変動関数でもない．さらに $I_n(f_n)$ は確率変数である．従って（A-8）の極限が普通の意味で存在する保障はなく，実際 *Riemann-Stieltjes* の意味で積分は存在しない．そこで伊藤積分は（A-8）を L_2 の意味で定義する．その時次の補題が重要な役割を演じる．

[補題 A1]（伊藤 "Ito" のレンマ） 任意の可予測な単関数 g にたいし

$$(\text{A-9}) \qquad E\left[\left\{\int_{(a,b)} g(t)dW(t)\right\}^2\right] = \int_{(a,b)} E[g(t)]^2 dt$$

が成立する．///

他方，可予測な単関数列で近似される可予測関数のクラスとして以下のものを考える．

[定義 A2] $\mathcal{N}=\mathcal{N}(a,b)$ は $f:[0,\infty)\times\Omega\to R$ の関数で以下の条件を満たすものの集合

i） $f(t,\omega)$ は $B\times\mathcal{F}$ 可測，但し B は $[0,\infty)$ 上のボレル集合族．

ii） $f(t,\omega)$ は $\mathcal{F}_t=\sigma\{W(s),s\leqq t\}$ 適応的．

iii） $E\left\{\int_{(a,b)} f(t,\omega)^2 dt\right\}<\infty.$ ///

細かな議論は標準的なテキスト（*φksendal*［*1992*］又は國田［*1976*］）に譲るが，$\mathcal{N}$ に含まれる関数 f にたいし伊藤積分を

$$(\text{A-10}) \qquad \int_{(a,b)} f(t)dW(t) = \lim_{n\to\infty}\int_{(a,b)} f_n(t)dW(t)$$

で定義する，ただし $\{f_n, n\geqq 1\}$ は f に収束する可予測な単関数列，又極限は L_2 収束の意味である．

[例 A1] $f(t)=W(t)$ としてその伊藤積分を計算してみると

$$\int_{(0,t)} W(s)dW(s) = \frac{1}{2}W(t)^2-\frac{1}{2}t$$

となることが証明される．しかしその証明は非常にやっかいである（*φksendal*［1992］pp. 21-22）．これはリーマン積分の定義に基づいて定積分

を計算するのにている．そこで確率積分を簡単に計算するための，微分積分学の基本定理に相当するものが，以下で述べる伊藤の公式（*Ito Formula*）である．その前に伊藤の確率積分の性質を記して置く．

[定理 A2]　$f, g \in \mathcal{N}(0, T)$, 又 $0 \leqq a \leqq c \leqq b \leqq T$ である時，

（i）　$$\int_{(a,b)} f(t)dW(t) = \int_{(a,c)} f(t)dW(t) + \int_{(c,b)} f(t)dW(t)$$

（ii）　$$\int_{(a,b)} \{\alpha f(t) + \beta g(t)\} dW(t) = \alpha \int_{(a,b)} f(t)dW(t) + \beta \int_{(a,b)} g(t)dW(t)$$

（iii）　$$E\left\{\int_{(a,b)} f(t)dW(t)\right\} = 0$$

（iv）　$$E\left\{\left[\int_{(a,b)} f(t)dW(t)\right]^2\right\} = \int_{(a,b)} E\{f(t)^2\}dt \ ///$$

次に伊藤の公式を“証明”するが，準備として先ず上で述べたドリフト付きブラウン運動の一般化に付いて述べておこう．

[定義 A3]　$X(t) = X(t, \omega)$ が確率積分（**Stochastic Integral**）であるとは

（A-11）　$$X(t) = X(0) + \int_{(0,t)} u(s, \omega)ds + \int_{(0,t)} v(s, \omega)dW(t)$$

と表現できる事である．又（A-11）を次のように略記する事が一般的である．

（A-12）　$$dX(t) = u(t, \omega)dt + v(t, \omega)dW(t)$$

ただし，

$$P\left\{\int_{(0,t)} |u(s, \omega)| ds < \infty, \quad \text{for all} \quad t \geqq 0\right\} = 1$$

$$P\left\{\int_{(0,t)} |v(s, \omega)|^2 dW(t) < \infty, \quad \text{for all} \quad t \geqq 0\right\} = 1$$

を仮定しておく．///

（注意） 式（A-12）に於いて $dW(t)$ は勿論普通の意味では存在しない．あくまでも（A-11）の積分の略記である．次の定理が**伊藤の公式（Ito Formula）**と呼ばれるもので，確率解析の基本定理である．

[定理 A3]（i）**（一次元伊藤の公式）** $dX(t)=u(t)dt+v(t)dW(t)$ を1次元確率積分，又 $g(t,x)$ は t と x に関して2回連続微分可能な関数とする．ここで $Y(t)=g(t,X_t)$ で確率過程 $Y(t,\omega)$ を定義すれば，**(a)** Y_t は確率積分である．更に **(b)**

$$\begin{aligned} dY(t) &= (\partial/\partial t)g(t,X_t)dt+(\partial/\partial x)g(t,X_t)dX_t \\ &\quad +\frac{1}{2}(\partial^2/\partial x^2)g(t,X_t)(dX_t)^2 \\ &= [(\partial/\partial t)g(t,X_t)+u(t,\omega)(\partial/\partial x)g(t,X_t) \\ &\quad +\frac{1}{2}v^2(t,\omega)(\partial^2/\partial x^2)g(t,X_t)]dt \\ &\quad +v(t,\omega)(\partial/\partial x)g(t,X_t)dW(t) \end{aligned} \tag{A-13}$$

（ii）**（多次元伊藤の公式）** $\boldsymbol{X}_t$ を n 次元の確率積分：$d\boldsymbol{X}_t=\boldsymbol{U}_t dt+\boldsymbol{V}_t d\boldsymbol{W}_t$ 但し，$\boldsymbol{X}_t=[X_{1t},X_{2t},\cdots,X_{nt}]'$ は n-次元確率過程，$\boldsymbol{U}_t=[u_1(t,\omega),u_2(t,\omega),\cdots,u_n(t,\omega)]'$ はドリフト項，$\boldsymbol{W}_t=[W_{1t},W_{2t},\cdots,W_{mt}]'$ は m-次元のブラウン運動，$\boldsymbol{V}_t=[v_{ij}(t,\omega);1\leqq i\leqq n,1\leqq j\leqq m]$ は $n\times m$ の行列で $\boldsymbol{V}_t\boldsymbol{V}_t'$ は正値定符号行列である．又 $g(t,\omega)=[g_1(t,\omega),g_2(t,\omega),\cdots,g_p(t,\omega)]$ は $[0,\infty)\times R^n\to R^p$ への関数で各変数に関して2回連続微分可能とする．ここで $\boldsymbol{Y}(t)=g(t,\boldsymbol{X}_t)$ で確率過程 $\boldsymbol{Y}(t,\omega)$ を定義すれば，**(a)** $\boldsymbol{Y}$ は確率積分で，更に **(b)**

$$\begin{aligned} d\boldsymbol{Y}_{kt} &= (\partial/\partial t)g_k(t,\boldsymbol{X}_t)dt+\textstyle\sum_i(\partial/\partial x_i)g_k(t,\boldsymbol{X}_t)dX_{kt} \\ &\quad +\frac{1}{2}\textstyle\sum_i\sum_j(\partial^2/\partial x_i\partial x_j)g_k(t,\boldsymbol{X}_t)dX_{it}dX_{jt} \end{aligned} \tag{A-14}$$

[証明のアイディア；1次元の場合]

（準備） 次の2点が成立する事をまず注意しよう．

（1）　$(dW_t)^2=dt$

（2）　$dW_t dW_s=0 \qquad (t\neq s)$

(1) に付いては $W(t) \sim BM(0,1)$ であれば，$\varDelta W(t)=W(t+\varDelta t)-W(t)$ の分布は $N(0, \varDelta t)$．従って $E\{(\varDelta W(t))^2/\varDelta t\}=1$ が成立している．これを大雑把に言えば $[\varDelta W(t)]^2 \simeq \varDelta t$．実際 $[\varDelta W(t)]^2/\varDelta t$ は $\varDelta t \to 0$ の時 1 に確率収束する事が証明される．これより (1) が成立する事がわかる．一方 (2) に付いては，ブラウン運動の持つ独立増分性（〔定義 A1（ii）〕）より証明される．//

(本論) Taylor の定理より $X(t+\varDelta t) = X(t)+\varDelta X(t)$ と書けば，

$$
\begin{aligned}
&g(t+\varDelta t, X_t+\varDelta X_t)\\
&\quad= g(t, X_t)+(\partial/\partial t)g(t, X_t)\varDelta t+(\partial/\partial x)g(t, X_t)\varDelta X_t\\
&\qquad+\frac{1}{2}\{(\partial^2/\partial x^2)g(t, X_t)(\varDelta X_t)^2+2(\partial^2/\partial x\partial t)g(t, X_t)(\varDelta t\varDelta X_t)\\
&\qquad+(\partial^2/\partial t^2)g(t, X_t)(\varDelta t)^2\}+o(\varDelta t)
\end{aligned}
$$

所で，

dY_t "=" $\lim_{\varDelta\to 0}\{g(t+\varDelta t, X_t+\varDelta X_t)-g(t, X_t)\}$, $\varDelta t^2 = o(\varDelta t) = (\varDelta t)(\varDelta X_t)$.

又，$\varDelta X_t = u(t)\varDelta t+v(t)\varDelta W(t)$ と $(\varDelta X_t)^2=v(t)^2\varDelta W(t)^2+o(\varDelta t)$，より，

$$dX_t = u(t)dt+v(t)dW(t).$$

$$(dX_t)^2 = [v(t)dW(t)]^2 = v(t)^2dt.$$

以上をまとめ，(A-13) を得る．///

次に伊藤の公式の代表的な応用例を見よう．

[例 A2] (1) 始めに，例 A1 の結果を伊藤の公式を用いて証明してみよう．即ち：$\int_{(0,t)} W(s)dW(s)=\frac{1}{2}W(t)^2-\frac{1}{2}t$ を示したい．その為にまず，$X_t = W(t)$，$g(t,x)=\frac{1}{2}x^2$ と置く．ここで $Y_t=g(t, X_t) = \frac{1}{2}W(t)^2$ で Y_t を定義すると，$(\partial g/\partial t)=0, (\partial g/\partial x)=x, (\partial^2 g/\partial x^2)=1$ より，

$$dY_t = d\left(\frac{1}{2}W(t)^2\right) = W(t)dW(t)+\frac{1}{2}dt$$

故に，

$$\int_{(0,t)} d\left\{\frac{1}{2} W(s)^2\right\} = \int_{(0,t)} W(s)dW(s) + \int_{(0,t)} \frac{1}{2} ds$$

即ち，

$$\frac{1}{2} W(t)^2 - \frac{1}{2} W(0)^2 = \int_{(0,t)} W(s)dW(s) + \frac{1}{2} t.$$

$W(0)=0$ に注意すれば，$\displaystyle\int_{(0,t)} W(s)dW(s) = \frac{1}{2} W(t)^2 - \frac{1}{2} t$ ///

（2）（部分積分法） $I = \displaystyle\int_{(0,t)} sdW(s) = tW(t) - \int_{(0,t)} W(s)ds$ の証明.

まず，$g(t,x)=tx$ と置く．$(\partial g/\partial t)=x, (\partial g/\partial x)=t, (\partial^2 g/\partial x^2)=0$ より

$Y_t=g(t, W_t)$ とすると，$dY_t=d(tW_t)=W_t dt+tdW_t$.

故に，

$$\int_{(0,t)} sdW(s) = tW(t) - \int_{(0,t)} W(s)ds \;///$$

この例を拡張したものが次の定理である.

［定理 A4］ $f(t)$ が ω には依存しない t のみの関数であるとき

(A-15) $$\int_{(0,t)} f(s)dW(s) = f(t)W(t) - \int_{(0,t)} W(s)df(s)$$

が成立する. ///

（注意） 関数 f がランダムである時には部分積分の公式は若干やっかいである．X_t, Y_t を確率積分とするとき，その joint variation を $[X, Y]_t$ と書けば

(A-16) $[X, Y]_t$

$$= X(t)Y(t) - X(0)Y(0) - \int_{(0,t)} Y(s-)dX(s) - \int_{(0,t)} X(s-)dY(s)$$

となる．但し $X(s-) = \lim_{u \nearrow s} X(u)$ 　$(Y(s-) = \lim_{u \nearrow s} Y(u))$ である.

§ A3　確率微分方程式

株価の変動モデルを構築するには，いったいどの様にしたらよいか.

$S(t)$ を今日の株価とする時，投資家は明日の株価は今日と比べ，100円上がる事を期待するであろうか．多くの場合株価が絶対額で幾ら上下するかを期待するのではなく，その収益率が例えば銀行預金の利率よりも良くなるか否かを問題とするであろう．その意味に於いて，投資家は株価収益率を自分が期待する一定値 μ（通常は安全利子率よりも大きな値となろう）に等しくする様に行動すると仮定できる．従って，もしもなんら確率的な変動がないならば

$$[S(t+\varDelta t)-S(t)]/S(t) = \mu\varDelta t$$

となるように行動するであろう．これより，

$$\text{(A-17)} \qquad dS(t) = \mu S(t)dt$$

という株価変動に関する微分方程式が導かれる．しかしながら実際には多くの不確定要因が存在し，微分方程式に確率変動を組み込む必要が出てくる．そこで以下の様な確率項を含む**確率微分方程式**が株価変動の基本方程式となる．

$$\text{(A-18)} \quad dS(t) = \mu S(t)dt+\sigma S(t)dW(t), \qquad W(t)\sim BM(0,1)$$

すると問題は（A-18）の解を求めることである．

一般にある（n-次元）確率過程 $X_t=X(t,\omega)$ が次の確率微分方程式（SDE）

$$\text{(A-19)} \quad dX_t = b(t,X_t)dt+\sigma(t,X_t)dW_t \quad X_0 = z,\ W_t\sim BM_m(0,1)$$

但し
$$b(t,x):[0,\infty)\times R^n\to R^n$$
$$\sigma(t,x):[0,\infty)\times R^n\to R^{n+m},$$

の解であるとき X_t を（n-次元）**拡散過程（Diffusion Process）**と呼ぶ．すると，問題は

(1) 解の存在と一意性，(2) 解の求めかた，の二つである．解の存在に対しては

[定理 A5] 以下の条件下で確率微分方程式（A-19）はユニークで t-連続

な解 $X_t = X(t, \omega)$ を持つ．また全ての i に対し $X_{it} \in \mathcal{N}(0, T)$ である．

条件：（ i ） **Growth 条件**：任意の $(t, x) \in [0, \infty) \times R^n$ に対して，

$$|b(t,x)| + |\sigma(t,x)| \leqq C(1+|x|).$$

（ii） **Lipschitz 条件**：任意の $x, y \in R^n$ に対して，

$$|b(t,x) - b(t,y)| + |\sigma(t,x) - \sigma(t,y)| \leqq D|x-y|,$$

ただし，$|\sigma| = \sum_i \sum_j \sigma_{ij}$.

（iii） $E\{z\} < \infty$，また，z は $\mathcal{F}_\infty = \sigma(W_s ; s \geqq 0)$ とは独立な確率変数

［証明］ $\phi ksendal$ ［1994］ pp. 49-53 参照. ///

次に確率微分方程式の解法に付いて，二つの代表的な例を示す．ファイナンス関係の（教科書的な）多くの問題は以下の例の範囲で解く事が出来る．

［例 A3］（ 1 ）先ず，（A-18）で定義した株価プロセスを解いてみよう．初期値を与えた形で確率微分方程式をもう一度きちんと定義する．

$$\text{(A-20)} \qquad dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \qquad S_0 = s.$$

以下解く手順を述べておこう：①先ず方程式を $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t$ と書く．②次に関数 $g(t,x) = \log x$ を考え $Y_t = g(t, X_t) = \log X_t$ として，③Ito の公式を当てはめる．

$$dY_t = d(\log X_t) = (1/S_t)dS_t + \frac{1}{2}(-1/S_t^2)(dS_t)^2 = (1/S_t)dS_t - \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

④これより，

$$dS_t/S_t = d(\log S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 dt$$

を得る．一方①より $dS_t/S_t = \mu dt + \sigma dW_t$ であったから，

$$\int_{(0,t)} d(\log S_t) + \int_{(0,t)} \frac{1}{2}\sigma^2 dt = \int_{(0,t)} \mu dt + \int_{(0,t)} \sigma dW_t.$$

⑤よって，

$$\log S_t - \log s + \frac{1}{2}\sigma^2 t = \mu t + \sigma W(t)$$

これを書き直すと，

(A-21)
$$S_t = s \cdot \exp\left\{\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t\right\}.$$

即ち，幾何ブラウン運動が得られる．///

（2） 次に一回の線形確率微分方程式を解いてみる．

(A-22)
$$d\boldsymbol{X}_t = A\boldsymbol{X}_t dt + Hdt + Kd\boldsymbol{W}_t$$

但し，$\boldsymbol{X}_t = [X_{1t}, X_{2t}, \cdots, X_{nt}]'$ は n-次元確率過程，$\boldsymbol{W}_t = [W_{1t}, W_{2t}, \cdots, W_{mt}]'$ は m-次元のブラウン運動，H と K はそれぞれ $n\times 1, n\times m$ の既知関数行列である．A を $n\times n$ の任意の行列とするとき，$\exp\{A\} = \sum_{n=0}^{\infty}(1/n!)A^n$ としよう．(A-22) を解くためにその両辺に $\exp\{-At\}$ を乗ずる．すると

(A-23)
$$\begin{aligned}&\exp\{-At\}d\boldsymbol{X}_t - \exp\{-At\}A\boldsymbol{X}_t dt\\ &\quad = \exp\{-At\}[Hdt + Kdw_t].\end{aligned}$$

ここで，もしも，$g(t,x) = \exp\{-At\}\cdot x$ とすれば，

$$\begin{aligned}d[\exp\{-At\}\boldsymbol{X}_t] &= -A\exp\{-At\}\boldsymbol{X}_t dt + \exp\{-At\}d\boldsymbol{X}_t\\ &= (\text{LHS of A-23})\end{aligned}$$

従って，

$$\int_{(0,t)} d[\exp\{-As\}\boldsymbol{X}_s] = \int_{(0,t)} \exp\{-As\}[Hds + Kd\boldsymbol{W}_s]$$

左辺が $[\exp\{-At\}\boldsymbol{X}_t] - \boldsymbol{X}_0$ に等しくなる事より，部分積分の公式により解を得る．

(A-24)
$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}_t &= \exp\{At\}\left\{\boldsymbol{X}_0 + \int_{(0,t)}\exp\{-As\}[Hds + Kd\boldsymbol{W}_s]\right\}\\ &= \exp\{At\}\left\{\boldsymbol{X}_0 + \int_{(0,t)}\exp\{-As\}[H_s - AK_s\boldsymbol{W}_s]ds\right\}.\ ///\end{aligned}$$

§A4　偏微分方程式と Diffusion

本節では解析学における偏微分方程式と拡散過程との関係を見ていこう．いわゆる **Dirichlet 問題**や **Cauchy 問題**の解が確率論的に与えられる．本節の最後で述べる **Feynman-Kac の公式**は **Maruyama-Girsanov の定理**と並び近年ファイナンスの論文で最も多く利用される結果のひとつである．まず準備として **Infinitesimal Generator** と **Infinitesimal Operator** を定義しよう．以下考察する確率過程は **Time Homogeneous Diffusion** と呼ばれるものでこれは Sample Path の確率変動は時々のポジションのみに依存し，時刻とは独立な拡散過程である．正式には

[定義 A4]　*Ito* の拡散過程 X_t が **Time Homogeneous Diffusion** であるとは

(A-25)　$$dX_t = b(X_t)dt + \sigma(X_t)dW_t, \quad X_0 = x$$

となることである．///

次に X_t の **Infinitesimal Genarator** を定義しよう．

[定義 A5]（i）次の極限が存在するとき

(A-26)　$$\Gamma f(x) = \lim_{t\to 0}[E^x\{f(X_t)\} - f(x)]/t \quad x \in R^n$$

Γ を X_t の **Infinitesimal Operator** と呼ぶ．

（ii）$\mathscr{D}_x = \{\Gamma$ が点 $x \in R^n$ で存在する $f: R^n \to R$ の全体$\}$

$\mathscr{D} = \{\Gamma$ が R^n の各点 x で存在する $f: R^n \to R$ の全体$\}$．///

Ito の公式を用いて証明される次の補題は点 x を初期値とする拡散過程を変数とする関数に対する“平均値の定理”の拡張である．これは以下の議論の Base となっている．

[補題 A2]　$Y_t = Y_t^x$ は次の SDE の解とする．

(A-27)　$$Y_t^x(\omega) = x + \int_{(0,t)} u(s,\omega)ds + \int_{(0,t)} v(s,\omega)dW(s)$$

但し，　$$P\left\{\int_{(0,t)} |u(s,\omega)|ds < \infty, \quad \text{for all} \quad t \geq 0\right\} = 1$$

$$P\left\{\int_{(0,t)}|v(s,\omega)|^2 dW(t) < \infty, \quad \text{for all} \quad t \geqq 0\right\} = 1$$

この時任意の $f \in C_0^2(R^n)$ と有限な期待値を持つ停止時刻 τ ($E^x\{\tau\} < \infty$) にたいして

$$E^x\{f(Y(\tau)\} = f(x) + E^x\left\{\int_{(0,t)} \sum_i u_i(s,\omega)(\partial/\partial x_i) f(Y_s) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j (vv^T)_{ij}(\partial^2/\partial x_i \partial x_j) f(Y_s) ds\right\} \tag{A-28}$$

が成立する.

[証明] *φksendal* [1992] pp. 94-95 参照. ///

ところで (A-28) を $\tau = t$ として X_t に応用すれば任意の $f \in C^2 \cap \mathcal{D}$ に対して

$$\Gamma f(x) = \sum_i b_i(\partial/\partial x_i) f(x_t) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j(\sigma\sigma^T)_{ij}(\partial^2/\partial x_i \partial x_j) f(x_t) \tag{A-29}$$

が成立している. (A-28) と (A-29) より次の定理は直ちに証明される.

[定理 A6] (Dynkin Formula) 任意の $f \in C_0^2(R^n)$ と有限な期待値を持つ停止時刻 τ ($E^x\{\tau\} < \infty$) にたいし

$$E^x\{f(Y(\tau))\} = f(x) + E^x\left\{\int_{(0,\tau)} \Gamma f(X_s) ds\right\} \tag{A-30}$$

が成り立つ. 但し Γ は X_t の Infinitesimal Generator である.

[注意] Infinitesimal Genarator の存在条件は一般には強すぎる. そこで若干弱い概念として次の Characteristic Operator を考えると便利である.

[定義 A6] **(i)** Λ が拡散過程 X_t の **Characteristic Operator** であるとは

$$\Lambda f(x) = \lim_{k\to\infty}[E^x[f(X(\tau_k)\} - f(x)]/E^x\{\tau_k\}], \tag{A-31}$$

但し, $\tau_k = \inf\{t \geqq 0 : X_t \notin U_k\}$ 又 $\{U_k : k \geqq 1\}$ は開集合の列で $U_k \supseteq U_{k+1}$, $U_k \searrow \{x\}$ (as $k \to \infty$) なるもの.

(ii) $\mathcal{G} = \{f \in C_0^2(R^n) : \Lambda f$ が各 $x \in R^n$ で存在する$\}$. ///

明らかに $\mathcal{D} \subseteq \mathcal{G}$, 又任意の $f \in \mathcal{D}$ に対し $\Lambda f = \Gamma f$ が成り立っている.

この時

$$(\text{A-32})\quad \Lambda f(x) = \textstyle\sum_i b_i(\partial/\partial x_i) f(x_i) + \frac{1}{2}\sum_i\sum_j (\sigma\sigma^T)_{ij}(\partial^2/\partial x_i\,\partial x_j) f(x_i),$$

が成立している事を注意しておく．次に本節の主要問題を論ずる．

(1) Dirichlet 問題

f を R^n 上の 2 回連続微分可能な関数とするとき偏微分作用素 L を

$$(\text{A-33})\quad (Lf)(x) = \left[\frac{1}{2}\textstyle\sum_i\sum_j a_{ij}(x)(\partial^2/\partial x_i\partial x_j) + \sum_i b_i(x)(\partial/\partial x_i)\right] f(x)$$

で定義する，但し a_{ij}, b_i は R^n から R への関数である．又偏微分作用素の係数 a_{ij} で作られる $n\times n$ 行列がすべての $x\in R^n$ に対し正値（半正値）定符号行列となる時作用素 L を **Elliptic (Semi-elliptic) Partial Differential Operator** と呼ぶ．

[定義 A7]　Dirichlet 問題

$D\subseteq R^n$ を任意の有開集合，k, g, f は以下で定義された連続関数であるとする：

$$k:\bar{\boldsymbol{D}}\to[0,\infty),\qquad g:\bar{\boldsymbol{D}}\to R,\qquad f:\partial\boldsymbol{D}\to R,$$

但し ∂D は D の境界．ここで次の条件 (A-34) を満たす $u:\bar{\boldsymbol{D}}\to R,\ u\in C_0^2(D)$ を求めることを **Dirichlet 問題**と呼ぶ

$$(\text{A-34})\quad \begin{array}{ll}(Lu)(x)-k(x)u(x) = -g(x) & \text{for all}\quad x\in D\\ u(x) = f(x) & \text{for all}\quad x\in\partial D\quad ///\end{array}$$

[定理 A7] 以下に述べる条件（A)，(B）のもとで Dirichlet 問題の解は

$$(\text{A-35})\qquad u(x) = E^x\Big\{f(X_\tau)\exp\Big\{-\int_{(0,\tau)}k(X_s)ds\Big\} + \int_{(0,\tau)}g(X_t)\exp\Big\{-\int_{(0,t)}k(X_s)ds\Big\}dt\Big\}$$

ただし，

$$dX_t^{(i)} = b_i(X_t)dt + \textstyle\sum_{j=1}^n \sigma_{ij}(X_t)dW_t^{(j)},\ 1 \leqq i \leqq n$$

(A-36)
$$a_{ij}(x) = \textstyle\sum_{k=1}^n \sigma_{ik}(x)\sigma_{kj}(x)$$
$$\tau = \tau(D) = \inf\{t \geqq 0 : X_t \notin D\}$$

条件：(A) $b_i(x), \sigma_{ij}(x)$ は連続で

(A-37)
$$\|b_i(x) - b_i(y)\| + \|\sigma_{ij}(x) - \sigma_{ij}(y)\| \leqq K\|x-y\|$$
$$\|b_i(x)\|^2 + \|\sigma_{ij}\|^2 \leqq K^2(1+\|x\|^2)$$

(B) 方程式 (A-36) はユニークな Weak Solution を持つ.

[**証明**] 詳しくは *Karatzas and Shreve* [1988] pp. 364-366 を参照. ここでは証明のアイディアを示す. *Dirichlet* 問題の一番簡単なケースは $k=g=0$ の時である. すると問題は

$$\left[\frac{1}{2}\textstyle\sum_i\sum_j a_{ij}(x)(\partial^2/\partial x_i\partial x_j) + \sum_i b_i(x)(\partial/\partial x_i)\right]f(x) = 0 \quad \text{for all} \quad x \in D$$

$$u(x) = f(x) \qquad \text{for all} \quad x \in \partial D$$

ならば, $u(x) = E^x\{f(X_\tau)\}$ となる事を示せばよい. 以下これを3段階に分けて示す

[Fact 1]　$u(x)$ は *X-Harmonic* 関数である：任意の開集合 $U \subseteq D$ に対して定義された停止時刻, $\tau' = \inf\{t \geqq 0 : X_t \notin U\}$ に対して,

(A-39)
$$u(x) = E^x\{u(X_{\tau'})\}$$

[Pf] 条件付き期待値の性質と X_t の強マルコフ性より,

$$E^x\{u(X_{\tau'})\} = E^x\{E_{\tau'}\{f(X_\tau)\}\} = E^x\{f(X_\tau)\} = u(x). ///$$

[Fact 2]

$$0 = \lim_{U \searrow x}[E^x\{u(X_\tau)\} - u(x)]/E^x\{\tau_U\} = \Lambda u(x) = \Gamma u(x) = Lu(x). ///$$

[Fact 3]　$u(x) = f(x)$ for "some" x :

実は数学的にはこの部分が一番やっかいである. ///

(2) Cauchy 問題と Feynman-Kac の公式

Dirichlet 問題は時間に関して均一な偏微分作用素と空間に関する境界条件から成り立っていた．一方多くのファイナンス関係の問題では時間（満期時点）に関する境界条件と時間にともない変化する偏微分作用素を持つ問題が多い．その様な問題を取り扱うのが以下で述べる **Cauchy 問題**である．先ずいくつかの定義から始める．

L_t を関数 $f \in C^2(R^n)$ に対する偏微分作用素

(A-40)

$$(L_t f)(x) = \left[\frac{1}{2}\sum_i \sum_j a_{ij}(t,x)(\partial^2/\partial x_i \partial x_j) + \sum_i b_i(t,x)(\partial/\partial x_i)\right] f(x)$$

とする．ここで

[定義 A8] 関数 $v(t,x):[0,\infty)\times R^n \to R^n$ が Cauchy 問題の解であるとは，与えられた関数 f, g, k に対し，

(i) $0 \leqq t < T$, $x \in R^n$ なる t と x に対し

(A-41) $-L_t v(t,x) - (\partial/\partial t)v(t,x) + k(t,x)v(t,x) = g(t,x)$

(ii) 境界条件は

(A-42) $v(T,x) = f(x)$

を満足する事である．///

Cauchy 問題の解答は次の定理，Feynman-Kac の定理で与えられる．これも厳密な証明は難しいがアイディアは上記 Dirichlet 問題と同様分かりやすい．

[定理 A8] X_t を以下で定義される拡散過程とする：

(A-43) $dX_t^{(i)} = b_i(t,X_t)dt + \sum_{j=1}^{p}\sigma_{ij}(t,X_t)dW_t^{(j)}, 1 \leqq i \leqq n$

但し，$a_{ij}(t,x) = \sum_{k=1}^{p}\sigma_{ik}(t,x)\sigma_{kj}(t,x)$

もしも下記の条件（A),（B),（C）が満たされていれば Cauchy 問題の解は（A-44）で与えられる．

$$v(t,x)=E^{(t,x)}[f(X_T)\exp\{f(X_T)\exp\left\{-\int_{(t,T)}k(s,X_s)ds\right.$$

(A-44)

$$\left.+\int_{(0,t)}g(s,X_s)\exp\left\{-\int_{(t,T)}k(u,X_u)\right\}ds\right\}$$

条件：(**A**) $b_i(t,x)$ と $\sigma_{ij}(t,x):[0,\infty)\times R^n\rightarrow R$ は連続で

$$\|b_i(t,x)-b_i(t,y)\|+\|\sigma_{ij}(t,x)-\sigma_{ij}(t,y)\|\leqq K\|x-y\|$$

$$\|b_i(t,x)\|^2+\|\sigma_{ij}(t,x)\|^2\leqq K^2(1+\|x\|^2)$$

(**B**) 方程式 (A-43) はユニークな Weak Solution を持つ.

(**C**) $\max|v(t,x)|\leqq M(1+\|x\|^{2m})$

for some $M>0$ and $m\geqq 1$ ///

§A5　Maruyama-Girsanov の定理

連続時間確率過程で現実の世界から (Fictional な) リスク中立世界への橋渡しをするのが **Maruyama-Girsanov の定理**と呼ばれる確率測度変換に関する定理である. 離散時間の世界では *Ville* [*1939*] にその起源が見られると言われているが, 測度変換を本格的に使いだしたのは *Wald* [*1947*] であろう. 以下その基本的なアイディアを説明した後で Maruyama-Girsanov の定理を述べる. 例のごとく証明は *Karatzas and Shreve* [*1988*] に任す事とする.

$X_1, X_2, \cdots, X_n, \cdots$ を測度 P_μ のもとでは互いに独立で平均 μ, 分散 1 の正規分布に従う確率変数列とする (*i. i. d. with* $N(\mu, 1)$ *under* P_μ). 又, $S_n=X_1+X_2+\cdots+X_n$, $n\geqq 1$, $S_0=0$ と書く. 明らかに $S_n-\mu n$ は測度 P_μ のもとでは平均 *0* のランダムウォーク, また S_n は測度 P_0 のもとで平均 *0* のランダムウォークである. 平均 *0*, 分散 *1* のランダムウォークは標準ブラウン運動に対応することを注意しておく. ところで, P_μ の P_0 に対する尤度比 ρ_n は

(A-45) $\rho_n(X_1, X_2, \cdots, X_n) = dP_\mu^{(n)}/dP_0^{(n)} = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \mu X_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu^2\right\}$

で与えられる．これより確率測度の変換公式を得る，

(A-46) $dP_\mu^{(n)} = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \mu X_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu^2\right\} dP_0^{(n)} = \rho_n dP_0^{(n)}$

となる．以上をまとめ，連続時間確率過程と対応させると：

確率測度	離散確率過程	連続確率過程
P_0	$S_n \sim N(0, n)$	$W(t) \sim BM(0, 1)$
P_μ	$\bar{S}_n = S_n - \mu n \sim N(0, n)$	$\bar{W} = W(t) - \int_{(0,t)} \gamma(s)ds \sim BM(0, 1)$

測度変換：

離散時間： $dP_\mu^{(n)} = \exp\left\{\sum_{i=1}^n \mu X_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^n \mu^2\right\} dP_0^{(n)}$

連続時間： $dP_\mu^{(t)} = \exp\left\{\int_{(0,t)} \gamma(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_{(0,t)} \gamma(s)^2 ds\right\} dP_0^{(t)}$

これより

[定理 A9] Maruyama-Girsanov（I）． 確率測度 P_μ と P_0 は互いに絶対連続で

(A-47) $dP_\mu^{(t)} = \exp\left\{\int_{(0,t)} \gamma(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_{(0,t)} \gamma(s)^2 ds\right\} dP_0^{(t)}$

が成立していると仮定する．但し，$\gamma(s)$ は

(A-48) $\int_\Omega \left[\exp\left\{\int_{(0,t)} \gamma(s)dW(s) - \frac{1}{2}\int_{(0,t)} \gamma(s)^2 ds\right\}\right] dP_0 = 1$

を満足．もしも $W(t)$ が P_0 のもとで標準ブラウン運動であれば

(A-49) $\bar{W} = W(t) - \int_{(0,t)} \gamma(s)ds$

は P_μ のもとで標準ブラウン運動となる．///

[定理 A8] Maruyama-Girsanov（II）． 確率過程 X_t と Y_t は次の伊藤積

分で与えられる拡散過程とする；

(A-50)　$$dX_t = \beta(X_t)dt + \rho(X_t)dW(t),\quad X_0 = x$$

(A-51)　$$dY_t = [\alpha(Y_t) + \beta(Y_t)]dt + \rho(Y_t)dW(t),\quad Y_0 = x$$

但し，$\beta \in R^n$，$\rho \in R^{n+m}$ で ρ^{-1} は有界と仮定する．ここで拡散過程

(A-52)　$$dZ_t = -\frac{1}{2}(\rho^{-1}(X_t)\alpha(X_t))^2 dt + (\rho^{-1}(X_t)\alpha(X_t))^T dW(t),\quad Z_0 = 0$$

を定義すると，

(A-53)

$$E^x\{\exp\{Z_t\} f_1(X_{t_1}) f_2(X_{t_2}) \cdots f_k(X_{t_k})\} = E^x\{f_1(Y_{t_1}) f_2(Y_{t_2}) \cdots f_k(Y_{t_k})\}$$

が成立する．///

[例 A4] 金利の期間構造の議論の中でよく出てくる例として，$r(t)$ をリスク中立的経済に於けるスポット金利，$X(t)$ を現実のスポット金利とするとき，q をリスクの市場価格とすると

(A-55)　$$dr_t = b(r_t)dt + \rho(r_t)dW(t),$$

(A-56)　$$dX_t = [b(X_t) + q(X_t)\rho(X_t)]dt + \rho(X_t)dW(t)$$

が成立している．この時

(A-57)　$$dZ_t = -\frac{1}{2}q(X_t)^2 dt + q(X_t)dW(t)$$

であることより，

(A-58)　$$E^x\left\{\exp\left\{-\int_{(t,T)} X(u)du\right\}\right\}$$

$$= E^x\left\{\exp\left\{-\int_{(t,T)} r(u)du + \int_{(t,T)} q(u)dW(t) - \frac{1}{2}\int_{(t,T)} q(u)^2 du\right\}\right\}$$

となる．///

参考文献

Cox, J. C., J. E. Ingersoll, and S. A. Ross [1985], A theory of the term structure of interest rate, Econometrica 53, 385-407.

Harrison, J. M. and S. Pliska [1981], Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading, Stochastic processes and their applications 11, 215-260.

Heath, D., R. Jarrow, and A. Morton [1992], Bond pricing and the term structure of interest rate: A new methodology, Econometrica 60, 77-105.

Jamshidian, F. [1989], An exactbond option formula, Journal of Finance 44, 205-209.

Karatzas I. and S. E. Shreve [1988] Browinian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag.

國田 寛 [1976], 確率過程の推定, 産業図書.

Miura, R. and Kishino, H. [1995], Pricing of bonds and their derivatives with multi-factor stochastic interest rate; A note, Nonlinear and Convex Analysis in Economic Theory, Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems No. 419, Springer, pp. 215-230.

ϕksendale B. [1992], Stochastic Differential Equations 3rd Ed. Springer-Verlag.

Siegmund, D. O. [1985], Sequential Analysis: Tests and Confidence Intervals, Springer-Verlag New York Inc.

Vasicek, O. [1977], An equilibrium characterization of the term structure, Journal of Financial Economics 5, 177-188.

Ville, J. [1939], Ĕtude critique de la Notion de Collectif, Gauthier-Villars, Paris

Wald, A. [1947], Sequential Analysis, John Wiley & Sons, Inc. New York.