情報社会と市場の経済モデル[1)]

山　崎　　昭

目次

1)　本稿は文部省科学研究費・重点領域研究「情報化社会と人間」・研究課題番号 06202202, 05202202 および全国銀行学術研究振興財団学術研究助成による研究の一部である．

1　イントロダクション

本稿の目的は多種多様（ヘテロジェニアス heterogeneous）な情報を付与された人々から構成される情報社会とそこでの構成員の市場活動のモデルを考察し，社会の情報構造と市場における情報収集が人々の市場活動に与える影響を理論的に分析することにある．特に，市場における取引の諸性質が取引に参加する人々の間の情報構造にどのように依存するかを考察したい．

本稿の構成を簡単に説明しておこう．第 2 節では，本稿の考察の対象となる情報と不確実性の意味を規定することから始め，社会構成員個人が持つ情報の表現形態に触れる．第 3 節では，情報社会の定式化と社会構成員間の情報構造の表現について一般的に触れる．続く第 4 節では，情報の若干の性質について確率論的視点から分類する．本稿の主たる部分は第 5 節以下である．第 5 節の主題は，情報に対する社会構成員の間での共通認識の意味とその性質を吟味することである．第 6 節では Aumann の導入した「共通知識」(common knowledge) の概念を 2 つの異なる視点から導入し，その上で「情報の共有」概念との関係を明確にする．そして，情報の「共通学習」の概念を導入する．最後の第 7 節では，第 5 節と 6 節の

分析を前提とし，経済構成員間の情報構造が市場均衡における取引と価格体系にいかなる特徴を与えるかについて，実需 vs. 投機という視点から議論することにしたい.

2　情報

情報社会を定式化するに当たり，まず情報をどのように表現するかを議論し，ついで個々の人々がある情報を持っていることの意味を明確に規定することから始めたい．本稿では確率論的な定式化を用いて議論を進める.

2.1　情報と不確実性

情報が問題になるのは，社会を形成する種々のパラメーターや社会を取り巻く環境について，人々が全知全能の「神」のように全てを知っている訳ではないことによる．言い替えれば，社会環境や社会の各種のパラメーターに関する「不確実性（uncertainty)」の存在が情報の存在意義となっていると考えられる．この意味で不確実性と情報とは概念的に密接に連関ており，不確実性を部分的にも排除するものとして情報そのものを規定できる.

社会を取り巻く環境（歴史的環境をも含む）の不確実性と社会を構成する各種のパラメーターについての不確実性とを区別できるが，この前者の不確実性と情報とを表わすことをまず考えたい．社会的環境の過去から未来への系列を「自然の状態（a state of nature)」と呼び，全ての自然の状態の集合を Ω で表わす．Ω の元を ω とすれば，「社会を取り巻く環境について不確実である」ということを，Ω のどの ω であるかが「不確実である」と解釈する．ここで「不確実である」ということは「知らない」ということでもある．また，$\omega\in\Omega$ が1つ決まっていれば，それは社会的環

境の過去から未来への系列が明確に与えられたことであるから，一般に起こりうる現象は幾つかの自然の状態の集まりによって表現される．例えば，2001年4月1日に関東大地震が起こるというのは，社会的環境の過去から未来への系列の中で，2001年4月1日に関東大地震が起こる系列全体の集合によって表わされる．

そこでΩの部分集合により社会的環境の1つの現象を表わしこれを自然の**事象**（event）と呼ぶ．起こりうる自然の事象全体の集合を$\mathcal{F}$としよう．$\mathcal{F}$をσ-集合代数とする．$\mathcal{F}$がσ-集合代数ということは，(*i*) 不可能な事象があること，(*ii*) ある事象が起こりえるならば，それが起こらないこともありえること，(*iii*) 起こりえる事象が幾つかあるとき，それがたとえ際限なく（つまり，可算無限）あったとしても，それら全ての事象が同時に起こることも可能であることを意味している[2)]．

$(\Omega, \mathcal{F})$ を自然の状態についての不確実性と呼ぶことにする．σ-集合代数$\mathcal{F}$は，社会環境として起こりうる事象を表現しているから，情報を規定する1つの方法は，それが$\mathcal{F}$の中でどの事象についての情報を与えているのか，その範囲を示すことである．言い替えると，情報をσ-集合代数$\mathcal{F}$の部分集合（より正確には部分σ-集合代数）によって示すことができる．さらに，$\mathcal{F}$は可能な情報全てを表現するのだから，その性質として

$$(\forall \omega \in \Omega)\{\omega\} \subset \mathcal{F}$$

を要請することが自然であり，これを前提としよう．この意味で自然の状態についての「**完全情報**」とは，$\mathcal{F}$を指すこととする．したがって，$\mathcal{F}$を（自然の状態についての）**情報の普遍集合**（*the universal set of information*）と呼ぶ．以上により，集合 $E \in \mathcal{F}$ を，それぞれの場合に応じて，「**情報**」もしくは「**事象**」（あるいは，より口語的表現で「**状況**」）と呼ぶ．

また，本稿では$\mathcal{F}$を情報の集合と考えるということの意味を，次のように解釈する．$E \in \mathcal{F}$ を情報として持つならば，実際の自然の状態がωで

あるとき，状態 ω が E に属しているか否か（つまり，「E が起こっているか否か」）を「**知っている**」あるいは「**認識する**」ことを意味する．以下，「知っている（知りえる）」ことと「認識する（認識できる）」ことをいずれも同義語として扱う．

2.2 個人と情報

人々の母集団を A と表わす．A の代表元を a と書き，これを**個人**とか（**社会**）**構成員**と呼ぶ．完全情報の内のどの部分の情報を保有しているかにより個人 a の持つ情報を表現し，これを $\mathscr{F}$ の部分 σ-集合代数 $\mathscr{F}_a \subset \mathscr{F}$ によって表わす．$\mathscr{F}_a$ を a の**情報集合**と呼ぼう．このとき，前節の約束にしたがい $E \in \mathscr{F}_a$ のとき，a は情報（事象）E を知っている（認識できる）という．

個人 a の情報集合 $\mathscr{F}_a$ が与えられたとき，この情報（集合）から認識できる最も詳しい事象を明示することによっても，a がある事象 E を知っているか否かを判断することが可能である．自然の状態が $\omega \in \Omega$ のとき，ω を含む $\mathscr{F}_a$ の（包含関係に関する）最小元を $I_a(\omega)$ とすれば，a が事象 $E \in \mathscr{F}$ を知っているか否かを $I_a(\omega) \subset E$ か否かにより判断してもよい[3]．$I_a(\omega) \subset E$ ならば，a は $\omega \in E$ であることが分かるからである．そこで，個人 a の情報集合 $\mathscr{F}_a$ に対し，この情報集合から認識できる最も詳しい情報（$\mathscr{F}_a$ のアトム[4]）から構成される Ω の可測分割[5]を個人 a の**情報分割**（*information partition*）と呼び，これを今後 $\mathscr{I}_a$ と書くことにする．また ω を含む $\mathscr{I}_a$ の元を $I_a(\omega)$ で表わす．

個人 a の情報分割 $\mathscr{I}_a$ と情報 $E \in \mathscr{F}$ が与えられたとき，$I_a(\omega) \subset E$ であれば，個人 a は ω **において** E **を知っている**（あるいは，**認識できる**）という．$E \in \mathscr{F}, \omega \in E$ で $I_a(\omega) \cap (\Omega \backslash E) \neq \emptyset$ のとき，ω において a は情報（事象）E を認識できない．また，$E \notin \mathscr{F}_a$ であっても，ある ω において a は

情報 E を認識できることがある．しかし，一般にはつぎの関係が成立する．

命題 2.1　個人 a の情報分割 $\mathcal{I}_a$ は可算個の元からなるものとする．このとき，個人 a が情報（事象）E を知っている（認識できる）ことと，任意の $\omega \in \Omega$ において a が E もしくは $\Omega \backslash E$ を知っている（認識できる）ことと同値である．つまり，

$$E \in \mathcal{F}_a \Longleftrightarrow (\forall \omega \in \Omega) I_a(\omega) \subset E \text{ または } I_a(\omega) \subset \Omega \backslash E$$

が成立する．

証明　(1) $\omega \in \Omega, E \in \mathcal{F}_a$ とする．$I_a(\omega) \cap E \neq \emptyset$ ならば，$I_a(\omega)$ がアトムであることより $I_a(\omega) \cap E = I_a(\omega)$ となる．よって，$I_a(\omega) \subset E$ である．$I_a(\omega) \cap E = \emptyset$ ならば，$I_a(\omega) \cap (\Omega \backslash E) \neq \emptyset$ だから，上と全く同様に，$I_a(\omega) \subset \Omega \backslash E$ となる．

(2) $(\forall \omega \in \Omega) I_a(\omega) \subset E$ または $I_a(\omega) \subset \Omega \backslash E$ ならば，$\cup_{\omega \in E} I_a(\omega) = E$ であり，$\mathcal{F}_a$ が可算個の元からなることより，$\cup_{\omega \in E} I_a(\omega) \in \mathcal{F}_a$ である．よって，$E \in \mathcal{F}_a$ となる．　■

個人 a が情報 E を知っていることは，任意の ω において E が起こっているかいないかを a が認識できることと同じであることを上の命題は示している．

2)　(i) $\emptyset \in \mathcal{F}$，(ii) $E \in \mathcal{F}$ ならば $\Omega \backslash E \in \mathcal{F}$，(iii) $E_n, (n=1,2,\cdots)$，ならば $\cap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathcal{F}$

3)　厳密に言えば，一般にこの定義の方が前者よりも広い範囲の事象を認識することになる．

4)　$E', E \in \mathcal{F}_a$ で $E' \subset E$ ならば $E' = \emptyset$ または $E' = E$ となる集合 $E \neq \emptyset$ を $\mathcal{F}_a$ のアトムという．σ-集合代数 $\mathcal{F}$ が可算個の集合の和集合や補集合から生成されるとき，これを分離可能（separable）というが，$\mathcal{F}$ が分離可能な σ-集合代数の場合，アトムは可測である．本稿では $\mathcal{F}$ が分離可能な場合に限定する．

5)　Ω の集合族（部分集合からなる集合）で，その和集合が Ω と一致し，互

いに共通部分を持たないものを分割といい，σ-集合代数の元から構成される分割を可測分割と呼ぶ.

3　社会と情報構造

3.1　社会

人々の母集団を A とするとき，$a\in A$ は（社会）構成員（a social agent or a social member）（あるいは単に個人）である．各構成員 a に対し B_a によって a が取りうる行動（behavior）の範囲を表わし，$B\equiv \Pi_{a\in A}B_a$ とする．また，人々の行動により生じうる社会的結果（outcome）の集合を X とする．このとき，B から X への関数 g は，社会の各構成員が取る行動 $b=(b_a)_{a\in A}$ に対し，その結果生じる社会的結果（social outcome）を示すものである．関数 $g:B\to X$ を**社会的結果関数**（social outcome function）と呼ぶ.

社会における構成員の情報構造（information structure）は，$\{\mathcal{F}_a\}_{a\in A}$（あるいは $\{\mathcal{I}_a\}_{a\in A}$）によって示される.

不確実性に直面した個々の社会構成員の行動は，構成員自身が得る情報に依存した意思決定の結果を反映するものと考えられる．したがって，構成員 a の行動は，関数 $h_a:\Omega\to B_a$ により表わされ，a の情報を反映するということから，関数 h_a は $\mathcal{I}_a$ に属する事象の上で一定値となる形でなければならない.（この条件を満たすとき，h_a を $\mathcal{F}_a$- 可測関数であるという.）

社会的に実現する結果（アウトカム）は不確実であり自然の状態に依存するが，そのような不確実な結果に対する各構成員 $a\in A$ の選好（嗜好）は，選好関係 $\succeq_a$ によって与えられる.

以上をまとめると，**情報社会** S は

- A, 社会構成員の母集団
- B_a, 個人 a が取り得る行動の範囲を示す集合
- X, 社会的結果（ソーシャル・アウトカム）の集合
- $g: B \to X, B = \Pi_{a \in A} B_a$, 社会を構成する人々の行動がもたらす結果を示す社会的結果関数
- $(\Omega, \mathscr{F})$, 自然の状態とそれについての完全情報を示す可測空間
- $\{\mathscr{F}_a\}_{a \in A}$ または $\{\mathscr{I}_a\}_{a \in A}$, 人々の間の情報の分布を示す情報構造
- $\{\geq_a\}_{a \in A}$, 構成員の間の選好関係の分布

により表現される．これを簡潔に $\mathscr{S} = \{g, \{\mathscr{F}_a\}_{a \in A}, \{\geq_a\}_{a \in A}\}$ と書く．

以上は，社会の機構的枠組み（インスティテューショナル・フレームワーク）を特定化しないモデルである．しかし，本稿では特に市場機構を念頭に置いて分析を進め，第７節では市場経済に特定化する．

3.2　構成員の主観的事前確率

Savage [12] の主観的期待効用理論との関連で次の仮定を設けて議論を進める.[6)]

仮定 3.1　各 $a \in A$ について，a の効用関数 $u: \Omega \times X \to R$ および Ω 上の a の確率 p_a で，Ω から X への任意の $\mathscr{F}$-可測関数 x, y に対し，

$$\int_\Omega u_a(\omega, x(\omega)) dp_a(\omega) \geq \int_\Omega u_a(\omega, y(\omega)) dp_a(\omega) \Longleftrightarrow x \geq_a y$$

を満たすものが存在し，各 p_a は一意的に決定される．

上記の確率測度 $p_a: \mathscr{F} \to [0, 1]$ を**「主観的」確率**（subjective probability）とか**（主観的）「事前」確率**（prior probability）などと呼ぶが，これを本稿では次のように解釈しよう．まず，確率測度 p_a が $\mathscr{F}$ の上で定義されるということは，$\mathscr{F}$ に属する任意の事象 E が起こりうるか否かを個

人 a は認識していることを意味する．さらに p_a は個人 a の主観的な「予想」，つまり，確率判断を第3者の立場から客観的に描写している．しかし，実際の自然の状態が ω で与えられるとき，$\mathscr{F}$ に属する任意の E について，$\omega \in E$ である（つまり，E が起こっている）か否かを a が「知っている」あるいは「認識している」ことを意味しない．事実，$E \in \mathscr{F}$ が $E \notin \mathscr{F}_a$ ならば，この E について a は情報を持たないから，命題2.1より a は E が起こったか否かを判断できない．

6）ただし，Savage [12] では，ω には依存しない非確率的効用関数の期待効用が得られる．

4　情報の機密性と客観性

社会構成員が保有する情報の相互関係によって規定される情報の諸性質を情報の社会的性質と呼ぶことにしたい．ここでは社会構成員相互間の情報の分布の仕方とその相互関係により情報の性質を分類する．2つの視点からの分類が可能である．1つは，主観的事前確率との関連で考える視点であり，他の1つは，各個人 a の保有する情報内容を表現する情報構造 $\{\mathscr{F}\}_{a\in A}$ との関連で考える視点である．前者の視点による分類をこの節で取り上げ，後者の視点による分類を次節で説明したい．

個人 a が持つ情報を考えよう．事象 $E,F \in \mathscr{F}_a$ が

$$p_a(E \cap F) = p_a(E) \cap p_a(F)$$

を満たすとき，事象 E,F は a にとって**独立(情報)**であるという．E,F が a にとって独立情報であるとき，a は事象 E が起きるか否かを推察する際に何らかのヒントを事象 F の観察から得ることはできない．換言すると，事象 F が起きたからといって，事象 F の起こらなかった場合と比べて事象 E がそれだけ起こりやすくなったとか，逆に起こりにくくなったとか

いうことはない．

より一般的に複数の事象 $E_1, E_2, \cdots, E_k$ が a にとって独立（情報）であるとは，各 i について $F_i=E_i$ または $F_i=\Omega$ であるとき

$$p_a(F_1 \cap \cdots \cap F_k) = p_a(F_1) \cdots p_a(F_k)$$

が成立することをいう．

次に，$\sigma(\cup_{a'}\mathscr{F}_{a'}|a' \neq a)$ は σ-集合代数 $\mathscr{F}_{a'}, a' \neq a$ によって生成される σ-集合代数を表わすものとする．このとき，事象 $E \in \mathscr{F}_a$ が $\sigma(\cup_{a'}\mathscr{F}_{a'}|a' \neq a)$ に属する任意の事象 F について a 以外の個人 a' 誰をとっても独立情報であるならば，E を個人 a の**隠れた情報**（*hidden information*）もしくは**機密情報**（*secret information*）であるという[7]．事象 E が a にとって機密情報であれば，a 以外の人は誰もその事象が起きたか否かを知ることにより，E が起きる確率を推察する際のヒントを得ることはできない．

最後に，事象の客観性を定義する．事象 $E \in \mathscr{F}$ が

$$(\forall a, a' \in A) p_a(E) = p_{a'}(E)$$

を満たすとき，事象 E を**客観的**（*objective*）事象という．また，客観的ではない事象を主観的事象という．客観的事象とは，もし社会構成全員がそれに関する情報を持っているならば，その事象について同一の確率判断を下すような事象である．客観的事象 E に対する確率を $p(E)$ と書く．

7)　この概念は Aumann [4] による．

5　情報と共通認識

前節では主観的事前確率との関係で情報の社会的性質を規定した．この節および次の節において，社会構成員相互間の情報構造 $\{\mathscr{F}_a\}_{a \in A}$ との関連で，社会的に見た情報の性質を規定したい．最初に，情報および事象の共通認識の概念を議論し，その基本的諸性質を「共通認識の情報分割」と

「共通認識写像」の概念によって分析することとしたい.

5.1　個人情報と社会共通の情報分割

社会の情報構造が $\{\mathscr{F}_a\}_{a\in A}$ で与えられたとき，社会構成員の間に共通した情報認識についての表現方法を考察し，その性質や特徴を調べてみよう.

個人 a が持つ情報は a の情報集合 $\mathscr{F}_a$ や情報分割 $\mathscr{I}_a$ によって表わすことができるが，本節では情報分割を用いて社会的な情報の性質を分析してみよう．情報分割 $\mathscr{I}_a$ は a が知りえる最も詳しい情報（$\mathscr{F}_a$ のアトム）の集合を表わしており，$I_a(\omega)\in\mathscr{I}_a$ は a の情報分割の元で ω をその要素に持つものであった．自然の状態 ω において，ある情報（事象）E を a が知っているか否かは，情報分割 $\mathscr{I}_a$ において自然の状態を含む元が事象 E に含まれるか否か，つまり $I_a(\omega)\subset E$ か否かによって判断できた．これが情報分割によって個人の情報が表現されることの意味である.

そこで，異なる情報分割間の関係を議論するために，2 つの情報分割 $\mathscr{I}$ と $\mathscr{I}'$を考えよう．$\mathscr{I}$ と $\mathscr{I}'$とが

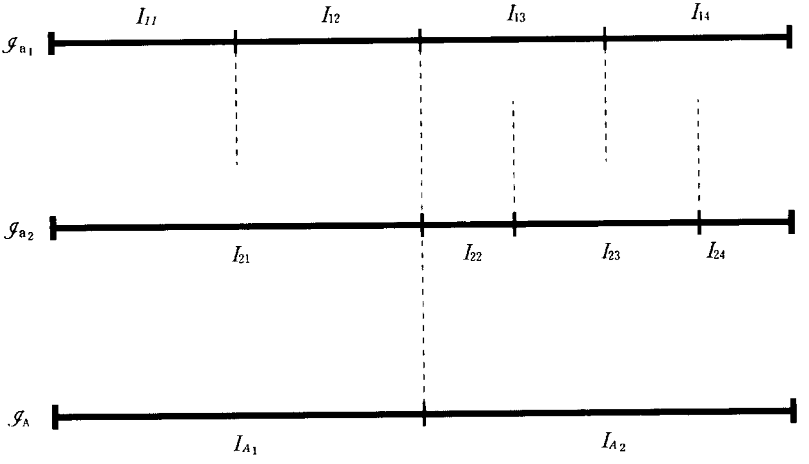
$$(\forall E\in\mathscr{I})(\exists E'\in\mathscr{I}')E\subset E'$$

を満たすとき，$\mathscr{I}$ は $\mathscr{I}'$と少なくとも同程度に**詳しい（詳細である）**あるいは $\mathscr{I}'$は $\mathscr{I}$ と少なくとも同程度に**粗い**と言い，$\mathscr{I}\geq\mathscr{I}'$ と書く．このとき，$\geq$ は Ω の可測分割全体の上で定義された 2 項関係で推移性と反射性とを満たし，

$$\mathscr{I}\geq\mathscr{I}' \text{ でかつ } \mathscr{I}'\geq\mathscr{I}\Longleftrightarrow\mathscr{I}=\mathscr{I}'$$

を満足する．この 2 項関係 $\geq$ を**情報関係**と呼ぶことにする.

社会の情報構造 $\{\mathscr{I}_a\}_{a\in A}$ が与えられたとき，**共通認識の情報分割**（*the commonly perceived information partition*）を $\mathscr{I}_A$ と書き，これを情報構造 $\{\mathscr{I}_a\}_{a\in A}$ の情報関係 $\geq$ に関する最大下界 $\mathscr{I}_A\equiv\wedge_{a\in A}\mathscr{I}_a$ と定める[8]．換言すれば，$\mathscr{I}_A$ はつぎの 2 条件によって定義される.



$A=\{a_1, a_2\}$
図1：共通認識の情報分割

(1)　すべての $a\in A$ に対し，$\mathscr{I}_a\geq\mathscr{I}_A$.

(2)　すべての $a\in A$ に対し $\mathscr{I}_a\geq\mathscr{I}'$ ならば，$\mathscr{I}_A\geq\mathscr{I}'$.

共通認識の情報分割 $\mathscr{I}_A$ は，社会構成員 $a\in A$ の誰もが共通に認識できるような情報の最小単位を表現している.「誰もが共通に認識できる」ということは，構成員個人の情報が $\mathscr{I}_A$ よりも詳しいことにより表現されており，そのような情報の「最小単位である」ことは，そのような性質を持つ情報分割の中で $\mathscr{I}_A$ が情報関係≥に関して最大下界であることにより表現されている. $\mathscr{I}_A$ に属する事象によって生成される σ-集合代数を $\mathscr{F}_A$ で表わす. $\mathscr{F}_A$ は社会の共通認識を情報分割ではなく，σ-集合代数によって表現するものである.

今後の議論展開にとって便利なように，共通認識の情報分割 $\mathscr{I}_A$ に関する簡単な性質を1, 2, 明らかにして置こう. ω を含む $\mathscr{I}_A$ の元を $I_A(\omega)$ と書く.

事実 5.1 $I_a(\omega)\cap I_A(\omega')\neq\emptyset$ ならば $I_a(\omega)\subset I_A(\omega')$ が成立する．

証明 $\omega''\in I_a(\omega)\cap I_A(\omega')$ とする．$\mathscr{I}_a\geq\mathscr{I}_A$ だから $I_a(\omega'')\subset I_A(\omega'')$ である．したがって，

$$I_a(\omega)=I_a(\omega'')\subset I_A(\omega'')=I_A(\omega')$$

を得る． ■

事実 5.2 $I_a(\omega)\cap I_{a'}(\omega')\neq\emptyset$ ならば

$$I_a(\omega)\cup I_{a'}(\omega')\subset I_A(\omega)=I_A(\omega')$$

が成立する．

証明 $\mathscr{I}_{a'}\geq\mathscr{I}_A$ だから $I_{a'}(\omega')\subset I_A(\omega')$ である．したがって，$I_a(\omega)\cap I_{a'}(\omega')\neq\emptyset$ は $I_a(\omega)\cap I_A(\omega')\neq\emptyset$ を意味する．よって事実 5.1 より，

$$I_a(\omega)\cup I_{a'}(\omega')\subset I_A(\omega')=I_A(\omega)$$

となる． ■

5.2 共通認識の特徴

共通認識の情報分割 $\mathscr{I}_A$ は，社会構成員 $a\in A$ の誰もが共通に認識できるような情報の最小単位を表現しており，その意味で社会の共通認識を示すものである．この共通認識の特徴を調べてみよう．

自然の状態が ω ならば，個人 $a\in A$ が認識できる最も詳しい情報（事象）は，a の情報分割の ω を含む元 $I_a(\omega)$ である．したがって，ω において社会構成員全員が認識できる最も詳しい情報は $\cup_{a\in A}I_a(\omega)$ となる．$(\forall a\in A)I_a(\omega)\subset F$ を満たす情報 F は，$\cup_{a\in A}I_a(\omega)\subset F$ を満足するからである．情報 F について $\cup_{a\in A}I_a(\omega)\subset F$ が成立していれば，状態 ω においては「すべての構成員 $a\in A$ が情報（事象）F を認識できる」ことになる．したがって，状態 ω においてすべての社会構成員が情報 $F\in\mathscr{F}$ を認識できる状況は $\cup_{a\in A}I_a(\omega)\subset F$ となる事象により表現されることになる．そこで次の記号を導入する．

$$I_A^{-1}(F) \equiv \{\omega \in \Omega \mid \cup_{a \in A} I_a(\omega) \subset F\}$$

と定めれば，$I_A^{-1}(F)$ は「すべての社会構成員 $a \in A$ が情報 F を認識できる」事象（状況）を表わしている．

さて，社会の共通認識の特徴を簡潔に表現するために次のような写像を導入しよう．可能な情報全体の集合$\mathscr{F}$から$\mathscr{F}$それ自身への写像 $\iota: \mathscr{F} \to \mathscr{F}$ が以下の諸性質を持つとき，写像 ι を**共通認識写像**と呼ぶ．

(1)　$\iota(F) \subset F$

(2)　$\iota(F) \subset I_A^{-1}(\iota(F))$

(3)　ι は単調関数である．つまり，$F \subset F'$ に対し $\iota(F) \subset \iota(F')$ となる．

(4)　$I_A^{-1}(F) = F$ ならば $\iota(F) = F$ である．

(4) において前提となる性質，$I_A^{-1}(F) = F$, を持つ情報を**公共情報** (*public information*) という．上記のような写像による特徴づけは P. Milgrom [10] によるものである．上で列挙した諸性質の意味は以下のように解釈される．

(1)　事象 F が生起するときにのみ，それについての情報 F は共通に認識される．

(2)　情報 F が共通に認識されれば，それが共通に認識されることをすべての社会構成員が認識する．

(3)　情報 F が共通に認識されれば，事象 F に由来する事象 F' に関する情報もまた共通に認識される．

(4)　公共情報となっている事象が生起すれば，それは共通に認識される．

以上の諸性質は，私たちが「社会の共通認識」というときに，それによって通常どのような事柄を具体的に意味したいと考えるかを定式化したものと解釈される．

共通認識の情報分割 $\mathscr{I}_A$ によって示される社会の共通認識の特徴は，共通認識写像 $\iota:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ の諸性質によって的確に示されている．言い替えれば，共通認識の情報分割が示す共通認識も共通認識写像が表わす共通認識も同じである．この事実を次の命題として示す．

$\omega\in F\in\mathscr{F}$ に対し，$\iota(F)$ を（**共通認識写像**による）ω における F の**共通認識**（*common perception*），$I_A(F)\equiv\{\omega\in\Omega\,|\,I_A(\omega)\subset F\}$ を（**共通認識の情報分割** $\mathscr{I}_A$ による）ω における F の**共通認識**と呼ぼう．

命題 5.1（共通認識の特徴）

［1］ $I_A(F)=\{\omega\in\Omega\,|\,I_A(\omega)\subset F\}$ によって定義される写像 $I_A:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ は共通認識写像である．

［2］ 任意の共通認識写像 $\iota:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ は写像 $I_A:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ に一致する．つまり，共通認識写像により表現される共通認識も共通認識の情報分割により表現される共通認識も全く同じである．

証明 最初に，写像 $I_A:\mathscr{F}\to\mathscr{F}$ が共通認識写像であることを示そう．写像の（1）から（4）の性質を順次確認すればよい．

（1） $\omega\in I_A(F)$ ならば，$I_A(F)$ の定義から $\omega\in I_A(\omega)\subset F$ である．

（2） $\omega\in I_A(F)$ ならば，$I_A(\omega)\subset F$ である．$\omega\in I_A^{-1}(I_A(F))$，つまり $\cup_a I_a(\omega)\subset I_A(F)$ となることを示したい．そこで，$\omega'\in I_a(\omega)$ とすれば，$I_A(\omega')=I_A(\omega)\subset F$ である．したがって，$\omega'\in I_A(F)$ を得る．

（3） $F\subset F'$ とすれば $I_A(\omega)\subset F$ は $I_A(\omega)\subset F'$，つまり $I_A(F)\subset I_A(F')$ を意味する．

（4） $I_A^{-1}(F)=F$ とする．（1）の性質により $I_A(F)\subset F$ だから，$F\subset I_A(F)$ が成り立つことを示せばよい．$\omega\in F$ とする．第6節で示す命題 6.1 より $I_A(\omega)=st^{\infty}(\omega)$（記号についても第6節参照）であるが，$F=I_A^{-1}(F)$ より，すべての n について $st^{n}(\omega)=st^{\infty}(\omega)=F$ が成立する．したがって，$I_A(\omega)=F$ となり，$\omega\in I_A(F)$ である．

よって，$F \subset I_A(F)$ が成り立つ．

次に，命題の第2の主張が成り立つことを示そう．$\iota: \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ を任意の共通認識写像とする．このとき，$F \in \mathcal{F}$ に対し，$\iota(F) = I_A(F)$ が常に成立することを示したい．まず，$\iota(F) \subset I_A(F)$を示す．$\omega \in \iota(F)$ とする．(2) の性質により $\omega \in I_A^{-1}(\iota(F))$ である．したがって，

$$(\forall a \in A)\, \mathcal{I}_a \geq \{\iota(F), \iota(F)^c\}$$

となるため，共通認識の情報分割 $\mathcal{I}_A$ の定義から，

$$\mathcal{I}_A \geq \{\iota(F), \iota(F)^c\}$$

となる．これと (1) より $I_A(\omega) \subset \iota(F) \subset F$ を得るから，$\omega \in I_A(F)$ が成立する．

逆に，$I_A(F) \subset \iota(F)$ を示そう．$\omega \in I_A(F)$ とすれば，$I_A(\omega) \subset F$ である．したがって，(3) の性質により

$$\iota(I_A(\omega)) \subset \iota(F)$$

となる．下記の事実 5.3 により

$$I_A^{-1}(I_A(\omega)) = I_A(\omega)$$

だから，(4) の性質により

$$\iota(I_A(\omega)) = I_A(\omega)$$

である．よって

$$\omega \in I_A(\omega) = \iota(I_A(\omega)) \subset \iota(F)$$

となる．　■

$I_A(\omega)$ は共通認識の情報分割 $\mathcal{I}_A$ の元で ω をその要素に持つものであるが，今後これを「ω における**(社会)の共通認識**」と呼びたい．

上の証明では次の事実を用いた．

事実 5.3　任意の $\omega \in \Omega$ における社会の共通認識は公共情報である．つまり，

$$I_A^{-1}(I_A(\omega)) = I_A(\omega)$$

が成立する.

証明　事実5.2より，任意の $\omega' \in I_A(\omega)$ について

$$\cup_a I_a(\omega') \subset I_A(\omega') = I_A(\omega)$$

となる．したがって，

$$I_A(\omega) \subset I_A^{-1}(I_A(\omega))$$

である．逆に，$\omega' \in I_A^{-1}(I_A(\omega))$ とすれば，$\cup_a I_a(\omega') \subset I_A(\omega)$ だから，$\omega' \in I_A(\omega)$ となる．つまり，

$$I_A^{-1}(I_A(\omega)) \subset I_A(\omega)$$

である．　■

8)　この段階では情報分割 $\mathcal{I}_A$ の可測性は保障されないものとする．可測性については第6.4節で議論する．

6　共通知識（common knowledge）と情報の共有

次に，社会構成員の誰もが共通に認識できる情報を異なった視点から表現することを考えたい．まず，Aumann [3] が導入した「共通知識(common kowledge)」の概念を2つの異なった視点から再定義し，「順帰納的共通知識」と「逆帰納的共通知識」という概念を導入したい．続いて，共通知識と共有情報の関係を議論し，最後に情報の「共通学習」の概念を導入することにしよう．

6.1　順帰納的共通知識（forward inductive common knowledge）

社会の情報構造 $\mathcal{I}=\{\mathcal{I}_a\}_{a\in A}$ が与えられたとき，情報 F について $\cup_{a\in A} I_a(\omega) \subset F$ が成立していれば，状態 ω においては「すべての構成員 $a\in A$ が情報 F を知っている」ことになる．したがって，ω においてすべての構成員が知っている最も詳しい情報は $\cup_{a\in A} I_a(\omega) = \cup\{I|I\cap\{\omega\}$

$\neq \emptyset, I \in \cup \mathcal{I}\}$ となる.「すべての構成員が知っている情報(事象)」だということを「すべての構成員が知っている」と，構成員相互間の知識を一歩前進させると，ω において「すべての構成員が知っている情報であることをすべての構成員が知っている」事象となり，それは $\cup\{I|I \cap (\cup_{a\in A} I_a(\omega)) \neq \emptyset, I \in \cup \mathcal{I}\}$ と書き表わすことができる．このように ω において「すべての構成員が知っている情報であることをすべての構成員が知っていることをすべての構成員が知っている…」という事象(情報)という意味での共通の知識を以下のように順帰納的（forward inductive）に表現できる．

まず，社会の情報構造 $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_a\}_{a\in A}$ と事象(情報) F に対し，$\mathcal{I}$ に関する F の**星型(スター)集合**を $st(F, \mathcal{I})$ と書き，

$$st(F, \mathcal{I}) \equiv \cup\{I|I \cap F \neq \emptyset, I \in \cup \mathcal{I}\}$$

により定義する．そこで，各 $n=1, 2, \cdots$ について ω の第 n 番目の星型を帰納的に次のように定める．

$$st^1(\omega) \equiv st(\{\omega\}, \mathcal{I})$$
$$st^2(\omega) \equiv st(st^1(\omega), \mathcal{I})$$
$$\vdots$$
$$st^n(\omega) \equiv st(st^{n-1}(\omega), \mathcal{I})$$

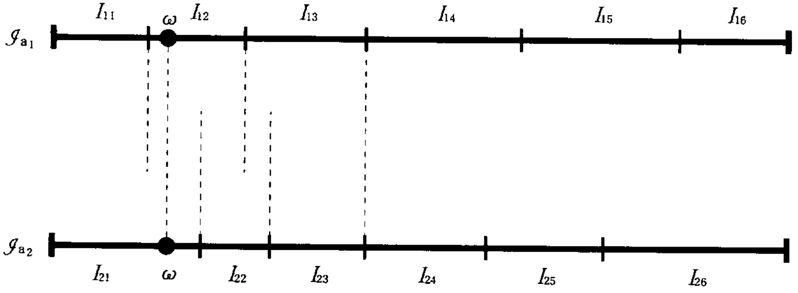
そして

$$st^\infty(\omega) \equiv \cup_{n=1}^\infty st^n(\omega)$$

と置き，$\mathcal{I}^*$ を

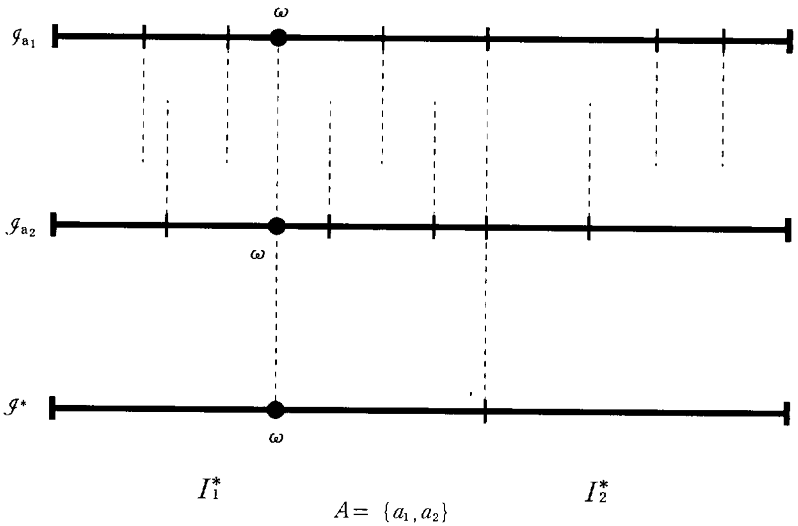
$$\mathcal{I}^* \equiv \{I^*(\omega)|I^*(\omega) = st^\infty(\omega), \omega \in \Omega\}$$

によって定義する．$\mathcal{I}^*$ を $\mathcal{I} = \{\mathcal{I}_a\}_{a\in A}$ の**順帰納的共通情報分割**（*forward inductive common information partition*）と呼ぶ．$st^1(\omega)$ は $\cup_{a\in A} I_a(\omega)$ に一致するから，ω において「すべての社会構成員が知っている最も詳しい情報(事象)」を示す．$st^2(\omega)$ は ω において「すべての構成



$$
\begin{aligned}
st^1(\omega) &= I_{12} \cup I_{21} \\
st^2(\omega) &= I_{12} \cup I_{21} \cup I_{11} \cup I_{22} \\
st^3(\omega) &= I_{12} \cup I_{21} \cup I_{11} \cup I_{22} \cup I_{13} \cup I_{23} \\
&= st^4(\omega) \\
&\vdots \\
&= st^n(\omega)
\end{aligned}
$$

図２：星型(スター)集合



$A = \{a_1, a_2\}$

図３：順帰納的共通情報分割

員が知っている最も詳しい情報であることをすべての構成員が知っているという情報(事象)」と解釈される．同様に，$st^n(\omega)$ は ω において「すべての構成員が知っている最も詳しい情報であることをすべての構成員が知っていることを……（知っていることの n 回の反復）すべての構成員が知っているという情報(事象)」と解釈される．このように「すべての構成員が知っている」ことを順帰納的に繰り返す毎に情報は少なくとも同程度により粗くなる．認識できる人々の範囲を拡大しているからである．

$I^*(\omega)=st^\infty(\omega)$ は順帰納的に定義されるので $I^*(\omega)$ を ω における $\{\mathcal{I}_a\}_{a\in A}$ の**順帰納的共通知識**（*forward inductive common knowledge*）と呼ぶ．$\mathcal{I}^*$ の基本的な性質を下記に示そう．

事実 6.1　順帰納的共通情報分割 $\mathcal{I}^*$ は，事実，分割である．すべての ω において，順帰納的共通知識は社会の共通認識に等しい．つまり，

$$I^*(\omega) = I_A(\omega)$$

が成立する．

証明

(1)　最初に $\mathcal{I}^*$ は分割であることを示そう．$\Omega\subset\cup_{\omega\in\Omega}I^*(\omega)$ は明白である．$\omega_1,\omega_2\in\Omega,\omega_3\in I^*(\omega_1)\cap I^*(\omega_2)$ とすれば，ある n_1,n_2 について

$$\omega_3 \in st^{n_1}(\omega_1) \cap st^{n_2}(\omega_2)$$

となる．したがって，ある a_1,a_2 に対し

$$I_{a_1}(\omega_3) \cap st^{n_1-1}(\omega_1) \neq \emptyset, I_{a_2}(\omega_3) \cap st^{n_2-1}(\omega_2) \neq \emptyset$$

が成立する．ところが $I_{a_1}(\omega_3)\cap I_{a_2}(\omega_3)\neq\emptyset$ だから，

$$\omega_2 \in st^{n_1+n_2}(\omega_1) \subset st^\infty(\omega_1)$$

$$\omega_1 \in st^{n_1+n_2}(\omega_2) \subset st^\infty(\omega_2)$$

でなければならない．よって，

$$st^\infty(\omega_1) = st^\infty(\omega_2)$$

を得る．つまり，$I^*(\omega_1)=I^*(\omega_2)$ である．ゆえに，$\mathcal{I}^*$ は分割である．

(2) 次いで，すべての ω について $I_A(\omega) \subset I^*(\omega)$ となることを示す．$\mathcal{I}^*$ は分割であり，かつ，すべての a と ω に関して

$$I_a(\omega) \subset \cup_a I_a(\omega) = st^1(\omega) \subset st^n(\omega) \subset I^*(\omega)$$

を満たす．したがって，$\mathcal{I}_A$ の定義からすべての ω について $I_A(\omega) \subset I^*(\omega)$ が成立する．

(3) 最後に，すべての ω について $I^*(\omega) \subset I_A(\omega)$ が成立することを示そう．

$st^1(\omega) = \cup_a I_a(\omega) \subset I_A(\omega)$ が満たされるから，事実 5.1 を繰り返し適用することにより，すべての n と ω について $st^n(\omega) \subset I_A(\omega)$ を得る．よって，$I^*(\omega) = \cup_{n=1}^{\infty} st(\omega) \subset I_A(\omega)$ が成立する．

上記 (1)，(2)，(3) より事実 6.1 の主張が証明された．■

事実 6.1 の系として共通認識の情報分割に関する次のような特徴付けを得る．

命題 6.1 (共通認識と順帰納的共通情報分割) 共通認識の情報分割は順帰納的共通情報分割に一致する．つまり，

$$\mathcal{I}_A = \mathcal{I}^*$$

が成立する．

社会の情報構造 $\{\mathcal{F}_a\}_{a \in A}$ の下で構成員の誰もが共通に認識できる情報(事象)は共通認識の情報分割 $\mathcal{I}_A$ によって表現されるが，上の命題 6.1 は，状態 ω において社会構成員すべての者が共通に認識する情報は，実は，ω において社会構成員すべての者が知っている情報であることを社会構成員すべての者が知っている……ことを社会構成員すべての者が知っている情報であること……と「知っている」ことを何回繰り返してでも知っている情報(事象)であることを示している．この意味で「社会共通」の意味合いを自己以外の他者の持つ情報に関する認識まで含めた共通性に拡張

されることと同値になる．これは多少とも驚きを与える事実であろう．

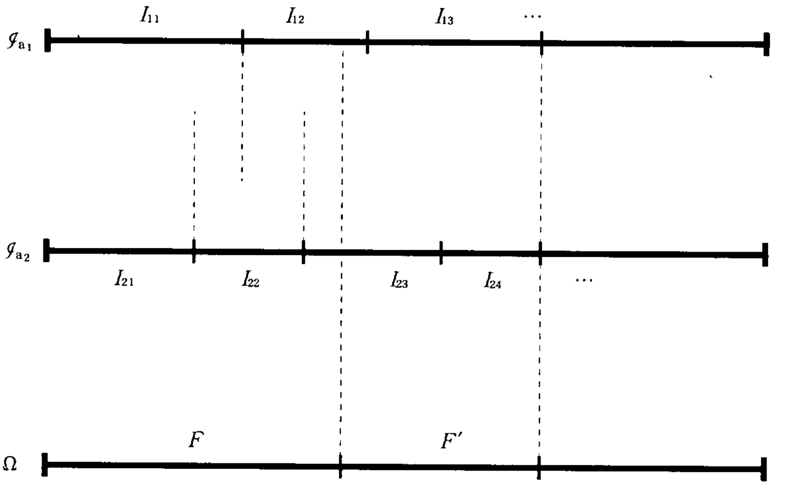
6.2　逆帰納的共通認識（backward inductive common knowledge）

「社会共通」の情報の意味合いを，自己以外の他者の持つ情報に関する認識まで含めた共通性に拡張するに当り，順帰納的な共通性は，言わば相互に知っていることの要請を情報をより粗くすることで満たすような順帰納的プロセスを考え，その「極限」として定められた．他方，全員がある情報(事象)を知っている（認識している）ような状況(事象)に対し，そのような状況(事象)を全員が知っている状況(事象)に限定し，さらにそのことを全員が知っている状況(事象)に限定するというようなプロセスを考えることもできる．知る対象となる情報(事象)から出発し，順帰納的プロセスと比べ，言わば逆順にその情報をすべての者が知っていることをすべての者が知っている……とすべての者が知っていることを繰り返して，状況(情報)の範囲を縮小し，より限定的にするプロセスの極限として情報の社会共通性を考えることもできる．このような逆帰納的プロセスによって定まる社会共通の情報分割を以下で取り上げることにしよう．

ある事象 $F\in\mathcal{F}$ を情報とし，状態 ω においてすべての社会構成員がこれを知っているとする．記号 $I_A^{-1}(F)$ は「すべての社会構成員 $a\in A$ が情報 F を知っている」事象(状況)を表わしていたから，$\omega\in I_A^{-1}(F)$ である．そこで，このような事象(状況)をすべての社会構成員 $a\in A$ が知っている事象(状況)，つまり，「情報 F をすべての社会構成員が知っていることをすべての社会構成員が知っている」事象(状況)は，$I_A^{-2}(F)\equiv\{\omega\in\Omega\mid\bigcup_{a\in A}I_a(\omega)\subset I_A^{-1}(F)\}$ と表現できる．この操作を帰納法により n 回続けると事象

$$I_A^{-n}(F)\equiv\{\omega\in\Omega\mid\bigcup_{a\in A}I_a(\omega)\subset I_A^{-(n-1)}(F)\}$$

を得る．どのような n についても事象 $I_A^{-n}(F)$ に属するような状態 ω の集



$I_A^{-1}(F)=I_{11}\cup I_{21}$　　$I_A^{-1}(F\cup F')=F\cup F'$
$I_A^{-2}(F)=I_{21}$　　$I_A^{-2}(F\cup F')=F\cup F'$
$I_A^{-3}(F)=\phi$　　$I_A^{-3}(F\cup F')=F\cup F'$
⋮

図4：$I_A^{-n}(F)$

合を $I_A^{-\infty}(F)\equiv\cap_n I_A^{-n}(F)$ で表わせば，$I_A^{-\infty}(F)$ は「実際の自然の状態 ω が F に属する（換言すれば，事象 F が起こった）ことをすべての社会構成員が知っていることをすべての社会構成員が知っている……」と知っていることを任意の回数反復し得る状況(事象)を表現している．このような形で示される情報の社会的共通性を逆帰納的共通知識と呼ぶことにしたい．つまり，$\omega\in I_A^{-\infty}(F)$ が成り立つとき，情報 F は ω において**逆帰納的共通知識**であると言う．

上の定義において，$I_A^{-1}(F)$ は事象 F に含まれ，$I_A^{-2}(F)$ は $I_A^{-1}(F)$ に含まれ，一般には $I_A^{-n}(F)\subset I_A^{-(n-1)}(F)$ となる．$I_A^{-n}(F)$ は集合列として減少列である．換言すれば，逆帰納的に「すべての構成員が知っている」ことを反復する毎に，そのような事象は集合として弱い意味で縮小し，その極

限として逆帰納的共通知識 $I_A^{-\infty}(F)$ が定まる．順帰納的に「すべての構成員が知っている」ことを反復する場合，そのような事象が集合として弱い意味で拡大するのと対照的である．

まず，集合列 $I_A^{-n}(F)$ に関する簡単な性質を述べておく．

事実 6.2 $F \subset F'$ ならば

$$(\forall n)\ I_A^{-n}(F) \subset I_A^{-n}(F')\ \&\ I_A^{-\infty}(F) \subset I_A^{-\infty}(F')$$

が成立する．

$F \subset F'$ で $\omega \in I_A^{-1}(F)$ ならば，$\cup_{a\in A} I_a(\omega) \subset F \subset F'$ だから $n=1$ について上の事実が成立する．$n-1$ について上の質が成立すれば，$\omega \in I_A^{-n}(F)$ に対し $\cup_{a\in A} I_a(\omega) \subset I_A^{-(n-1)}(F) \subset I_A^{-(n-1)}(F')$ が成立することから，上の事実が導かれる．

さて，逆帰納的共通知識についての基本的性質は次の事実により示される．

事実 6.3 すべての n と ω に対し

$$I_A^{-n}(I_A(\omega)) = I_A^{-\infty}(I_A(\omega)) = I_A(\omega)$$

が成立する．

証明 任意に ω を固定する．事実 5.3 より，$I_A^{-1}(I_A(\omega)) = I_A(\omega)$ が成立する．次に帰納法の仮定により，$I_A^{-(n-1)}(I_A(\omega)) = I_A(\omega)$ としよう．まず，$\omega' \in I_A(\omega)$ とすれば，

$$\cup_a I_a(\omega') \subset I_A(\omega') = I_A(\omega) = I_A^{-(n-1)}(I_A(\omega))$$

となり，$\omega' \in I_A^{-n}(I_A(\omega))$ を得る．逆に，$\omega' \in I_A^{-n}(I_A(\omega))$ とすれば，

$$\cup_a I_a(\omega') \subset I_A^{-(n-1)}(I_A(\omega)) = I_A(\omega)$$

から $\omega' \in I_A(\omega)$ を得る．よって，

$$I_A^{-n}(I_A(\omega)) = I_A(\omega)$$

が成立する．

ゆえに，すべての n について $I_A^{-n}(I_A(\omega))=I_A(\omega)$ が成り立つ． ■

事実 6.1 と事実 6.3 とから次の命題が成立する．

命題 6.2 すべての n と ω に対し

$$I^*(\omega) = st^{\infty}(\omega) = I_A^{-n}(I_A(\omega)) = I_A^{-\infty}(I_A(\omega)) = I_A(\omega)$$

が成立する．

この命題の意味を次のように解釈できる．「ω においてすべての人が知っている情報をすべての人が知っている……（知っていることの任意の反復)」(“what at ω everyone knows that everyone knows……”）こと（つまり，$I^*(\omega)$）は，実は「ω においてすべての人が共通に認識できる最も詳細な情報――共通情報分割により知られる最も詳細な情報――をすべての人が知っていることをすべての人が知っている……（知っていることの任意の反復)」(“everyone knows that everyone knows……what is known at ω by the common information partition”）こと（つまり，$I_A^{-\infty}(I_A(\omega))$）と的確に一致する．先にコメントしたように，前者は，すべての人が知っている（認識できる）情報であることをすべての人が知っている……と知っていることの反復が増える毎に，その事象(集合)が大きくなっていく増大系の集合列である．これに対し後者は，ω において共通情報分割により知られている情報であることをすべての人が知っていることをすべての人が知っている……と知っていることの反復が増えるごとに，その事象(集合)が減少して行く減少系の集合列である．しかしそれにもかかわらずこれらは事象(情報)として一致しているのである．したがって，次のような定義を導入するのが自然であろう．つまり，$I_A^{-\infty}(I_A(\omega))$ を ω における**逆帰納的共通知識**（*backward inductive common knowledge*）と定義する．上の命題 6.2 は，「ω における順帰納的共通知識と逆帰納的共通知識は一致する」ことを示している．

6.3　共通知識

前節では ω における順帰納的共通知識と逆帰納的共通知識とが同じであることを示した．次に，情報(事象)$F\in\mathscr{F}$ についても順帰納的共通知識と逆帰納的共通知識とを考えたい．後者のほうはすでに定めたから，前者を定義することから始めよう．$I^*(\omega)=st^\infty(\omega)\subset F$ が成立するならば，ω において**情報(事象)F は順帰納的共通知識**（*common knowledge at ω forward inductively*）であると規定する．情報(事象)F が順帰納的共通知識であることと逆帰納的共通知識であることとが同値であることを示したい．その準備として次の基本的な事実の証明から入る．

事実 6.4　すべての n と ω に対し

$$st^n(\omega)\subset F\Longleftrightarrow\omega\in I_A^{-n}(F)$$

が成立する．

証明　$\omega\in\Omega$ を任意に固定する．$n=1$ の場合は $st^1(\omega)=\cup_{a\in A}I_a(\omega)$ だから自明である．

$n=k$ の場合に上の性質が成立したとして，$n=k+1$ の場合にも成立することを示そう．

$\Rightarrow$：$st^{k+1}(\omega)\subset F$ とする．$\cup_{a\in A}I_a(\omega)\subset I_A^{-k}(F)$ を示せばよい．そこで，$\omega'\in\cup_{a\in A}I_a(\omega)$ とすれば，

$$st^k(\omega')\subset st^{k+1}(\omega)\subset F$$

であるが，帰納法の仮定により $st^k(\omega')\subset F$ は $\omega'\in I_A^{-k}(F)$ を意味する．

よって，$\omega\in I_A^{-(k+1)}(F)$ が示された．

$\Leftarrow$：$\omega\in I_A^{-(k-1)}(F)$ とする．$\omega'\in st^{k+1}(\omega)$ とし，$\omega'\in F$ を示したい．$\omega'\in st^{k+1}(\omega)$ だから，ある有限点列$(a_m,\omega_m), m=1,2,\cdots,k+1$，で $\omega_1=\omega, \omega'\in I_{a_{k+1}}(\omega_{k+1}), I_{a_m}(\omega_m)\cap I_{a_{m+1}}(\omega_{m+1})\neq\emptyset, m=1,\cdots,k$，を満たすものが存在する．そこで，$\omega''\in I_{a_1}(\omega_1)\cap I_{a_2}(\omega_2)$ をとると，$\omega=\omega_1\in I_A^{-(k+1)}(F)$ だから，$\omega''\in$

$\cup_{a\in A}I_a(\omega)\subset I_A^{-k}(F)$ である．ところが帰納法の仮定により

$$st^k(\omega'')\subset F\Longleftrightarrow\omega''\in I_A^{-k}(F)$$

が成立している．他方，$\omega''\in I_{a_2}(\omega_2)$ は $\omega'\in st^k(\omega'')$ を意味するから，結局，$\omega'\in st^k(\omega'')\subset F$，つまり，$\omega'\in F$ となる．これで上の事実の主張が任意の n について成立することが示された． ■

事実6.4より

$$st^\infty(\omega)=\cup_{n=1}^{\infty}st^n(\omega)\subset F\Longleftrightarrow\omega\in\cap_{n=1}^{\infty}I_A^{-n}(F)$$

が成立する．これより次の命題を得る．

命題6.3 ω において情報 F が順帰納的共通知識であることと逆帰納的共通知識であることと同値である．つまり，

$$I^*(\omega)\subset F\Longleftrightarrow\omega\in I_A^{-\infty}(F)$$

が成立する．

命題6.2，6.3により社会構成員相互の情報認識の共通性を順帰納的に定義しても逆帰納的に定義しても結果的には同値であるから，今後，単に**共通知識**（common knowledge）と呼ぶことにしたい．

6.4 共有情報（common information）と共通知識（common knowledge）

ここまでは社会構成員間の情報の共通性を情報に対する認識の共通性という視点から眺めてきた．そして認識の共通性については，共通認識の情報分割および4つの性質によって特徴付けられた共通認識写像によってその意味を確定した．このような共通認識は，順帰納的に定められる共通知識によっても，あるいは逆帰納的に定められる共通知識によってもそれを捉えることができた．

この小節では，各社会構成員が保有する情報そのものの共通性と共通認

識，共通知識との関係を議論したい．

社会の情報構造 $\{\mathscr{F}_a\}_{a\in A}$ が与えられたとき，それらが生成する σ-集合代数 $\mathscr{C}\equiv\bigcap_{a\in A}\mathscr{F}_a$ を（社会の）**共有情報集合**（*commonly possessed information set*）と呼び，情報 $F\in\mathscr{C}$ が，すべての $a\in A$ に対して $\mu_a(F)>0$ を満たすとき，**共有情報**と呼ぶ．また，共有情報集合 $\mathscr{C}$ のアトムが生成する可測分割 $\mathscr{I}_{\mathscr{C}}$ を**共有情報分割**（*commonly possessed information partition*）という．

共有情報が持つ簡単な性質を示そう．

命題 6.4　共有情報 F は公共情報であり，したがって，$\omega\in F$ において共通知識である．

証明　$F\in\mathscr{C},\omega\in F$ とする．すべての $a\in A$ について $F\in\mathscr{C}\subset\mathscr{F}_a$ だから，各 a について $I_a(\omega)\subset F$ が成立する．したがって，

$$F\subset I_A^{-1}(F)\,(\equiv\{\omega'\mid\bigcup_{a\in A}I_a(\omega')\subset F\})$$

となる．他方，$I_A^{-1}(F)\subset F$ は常に成立するから，$I_A^{-1}(F)=F$ を得る．つまり，F は公共情報である．命題 5.1 および公共情報の性質（4）より，情報 F は ω における社会の共通認識であり，$I_A(F)=F$ となる．よって，事実 6.1 および命題 6.3 より，情報 F は $\omega\in F$ において共通知識となる．■

次に共有情報分割と共通知識との基本的関係を示そう．

命題 6.5　（共有情報と共通認識）　社会の情報構造が $\{\mathscr{I}_a\}_{a\in A}$ で与えられ，各個人の情報分割 $\mathscr{I}_a$ が可算個の元から構成されるとき，共有情報分割は共通認識の情報分割と一致する．つまり，

$$\mathscr{I}_{\mathscr{C}}=\mathscr{I}_A$$

が成立する．

証明　すべての ω，すべての a に対し $I_{\mathscr{C}}(\omega)\in\mathscr{F}_a$ だから，すべての ω，すべての a に対し $I_a(\omega)\subset I_{\mathscr{C}}(\omega)$ となる．よって，$\mathscr{I}_A$ の定義より，$\mathscr{I}_A\geq\mathscr{I}_{\mathscr{C}}$ が成立する．

逆に，$\mathscr{I}_{\mathscr{C}} \geq \mathscr{I}_A$ が成立することを示したい．任意の $\omega \in \Omega$ と任意の $a \in A$ に対し

$$I_a(\omega) \subset I_A(\omega) = I^*(\omega)$$

である．今，$T \equiv \cup_{\omega' \in I^*(\omega)} I_a(\omega')$ と置けば，$I^*(\omega) \subset T$ である．仮に，$T \cap (\Omega \backslash I^*(\omega)) \neq \emptyset$ だったとしよう．$\omega'' \in T \cap (\Omega \backslash I^*(\omega))$ をとる．$\omega'' \in T$ だから，ある $\omega' \in I^*(\omega)$ に対し $\omega'' \in I_a(\omega')$ となる．しかし，$\omega' \in I^*(\omega) = st^\infty(\omega)$ だから $\omega'' \in st^\infty(\omega) = I^*(\omega)$ となり，$\omega'' \notin I^*(\omega)$ であったことに矛盾．よって，$T \subset I^*(\omega)$ となる．これで $I^*(\omega) = \cup_{\omega' \in I^*(\omega)} I_a(\omega')$ が示された．

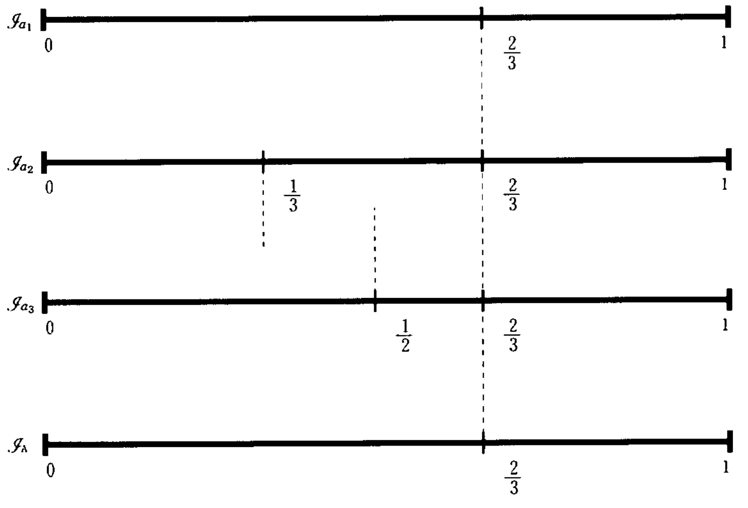
ところが $\mathscr{I}_a$ の元は可算個だから，ある $\omega_n \in I^*(\omega), n=1, 2, \cdots$，に対し $I^*(\omega) = \cup_{n=1}^\infty I_a(\omega_n)$ が成立する．故に $I^*(\omega) \in \mathscr{F}_a$ となる．ここで a の選択は任意だったから $I^*(\omega) \in \cap_{a \in A} \mathscr{F}_a = \mathscr{C}$ となる．よって，$\mathscr{I}_{\mathscr{C}} \geq \mathscr{I}_A$ が成立する． ■

例 6.1 （共有情報と共通認識の一致しないケース）

社会の情報構造が $\{\mathscr{I}_a\}_{a \in A}$ で与えられるとき，各個人の情報分割 $\mathscr{I}_a$ が可算個の元から構成されれば，共有情報分割は共通認識の情報分割と一致し，$\mathscr{I}_{\mathscr{C}} = \mathscr{I}_A$ が成立するが，情報分割 $\mathscr{I}_a$ が非可算個の元から成る場合，共有情報分割と共通認識の情報分割とは一致するとは限らない．このような例を図 5 は示している．

6.5 情報と共通学習効果

$\mathscr{L} \subset \mathscr{F}$ を $\mathscr{F}$ の部分 σ 集合代数とする．情報 $\mathscr{F}_a$ を保有する構成員 $a \in A$ が，新たに $\mathscr{L} \subset \mathscr{F}$ に属する情報を学ぶ（入手する）と，a は $\mathscr{F}_a$ の情報に加え，$\mathscr{L}$ の情報を保有することになる．したがって，a の情報集合は $\mathscr{F}$ の 2 つの部分 σ 集合代数 $\mathscr{F}_a$ と $\mathscr{L}$ によって生成される σ 集合代数（つまり，部分 σ 集合代数 $\mathscr{F}_a$ と $\mathscr{L}$ を含む最も小さい σ 集合代数）$\mathscr{F}_a \vee \mathscr{L}$ によって



$A=\{a_1,a_2,a_3\}$, $\Omega=[0,1]$

$\mathcal{F}_{a_1}=\{\omega\}_{\omega\in\Omega}$, ϕ, Ωにより生成されるσ−集合代数

$\mathcal{I}_{a_1}=\{\{\omega\}|\omega\in\Omega\}$, $\mathcal{I}_{a_2}=\{[0,\frac{1}{3}),[\frac{1}{3},\frac{2}{3}),[\frac{2}{3},1]\}$, $\mathcal{I}_{a_3}=\{[0,\frac{1}{2}),[\frac{1}{2},\frac{2}{3}),[\frac{2}{3},1]\}$,

$\mathcal{I}_A=\{[0,\frac{2}{3}),[\frac{2}{3},1]\}$,$I_A(\frac{1}{2})=[0,\frac{2}{3})\notin\mathcal{F}_{a_1}$

図５：共通認識の情報分割と共有情報分割の不一致

表わされることになる．社会構成員$a\in A$全員が，情報集合$\mathcal{L}\subset\mathcal{F}$に含まれる情報を同時に学べば，すべての$\mathcal{F}_a$が$\mathcal{F}_a\vee\mathcal{L}$によって置き替えられることとなる．そこで，次の概念を導入しよう．

社会の情報構造$\{\mathcal{F}_a\}_{a\in A}$が$\{\mathcal{F}_a\vee\mathcal{L}\}_{a\in A}$に変わるとき，これを$\mathcal{L}\subset\mathcal{F}$の**共通学習**（*common learning*）という．また，情報$L(\neq\emptyset)\in\mathcal{L}$を，**共通学習の情報**（*commonly learned information*）と呼ぶ．共通学習の対象$\mathcal{L}$が前後関係から明らかなとき，対象$\mathcal{L}$の記述を省略して，簡単に$\tilde{\mathcal{F}}_a$

と書くこととしたい．このとき，$\mathscr{I}_a, \mathscr{I}_A, \mathscr{I}^*, \mathscr{I}_{\mathscr{C}}$ 等の情報分割に対し，構成員が$\mathscr{L}$を共通に学習することによって得られる情報分割を，それぞれ $\check{\mathscr{I}}_a, \check{\mathscr{I}}_A, \check{\mathscr{I}}^*, \check{\mathscr{I}}_{\mathscr{C}}$ と記述する．共通学習の情報については次の性質が容易に示される．

命題 6.6 （共通学習と共通知識） 共通学習の情報 L は公共情報である．したがって，共通学習の情報 L は任意の $\omega \in L$ において共通知識である．

証明 $L(\neq\emptyset)\in\mathscr{L}$ が公共情報であることを示せば，後半の主張は命題 6.4 である．そこで，

$$\check{I}_A(L) \equiv \{\omega' \mid \cup_{a\in A}\check{I}_a(\omega') \subset L\}$$

と置く．定義から $\check{I}_A(L)\subset L$ である．逆を示すために，$\omega\in L$ とする．すべての $a\in A$ に対し $L\in\check{\mathscr{F}}_a$ であることは，$\check{I}_a(\omega)\subset L$ がすべての $a\in A$ に対して成立することを意味する．よって，$\omega\in\check{I}_A(L)$ を得る．■

7　市場経済における情報と市場行動

7.1　取引に関する共通の情報と実需 vs. 投機的取引

自然の状態に関する不確実性はこれまでの節に続き可測空間 $(\Omega, \mathscr{F})$ によって表わす[9)]．有限種類の財を取り引きする市場を考え，財の数を正の整数 $l>0$ で表わす．したがって，各種の財の組み合わせを示す財空間は R^l となる．各構成員 $a\in A$ の消費集合は議論を簡略化するため，すべての $a\in A$ について R^l_+ で与えられるものとする．

不完全情報下の経済（*a random economy or an economy with incomplete information*）を

$$\mathscr{E} = \{u_a : \Omega\times R^l_+ \to R, e_a : \Omega \to R^l_+, \mu_a\}_{a\in A}$$

によって表現する．ここで $u_a:\Omega\times R^l_+\to R$ は経済構成員 $a\in A$ の確率的効

用関数，$e_a:\Omega\to R^l_+$ は確率的初期保有ベクトル，μ_a は $(\Omega, \mathcal{F}_a)$ 上で定義される構成員 a の主観的事前確率（分布）である．経済 $\mathcal{E}$ の構成員 $a\in A$ を**経済構成員**（*economic agents*）という．

純市場取引を関数 $z:A\times\Omega\to R^l$ によって表わす．$z_a(\omega)\equiv z(a,\omega)$ は，自然の状態 $\omega\in\Omega$ において，経済構成員 a が行う市場の純取引（ネット・トレード）ベクトルである．純市場取引 $z:A\times\Omega\to R^l$ が，

(1)　すべての a とほとんどすべての ω に対し，$e_a(\omega)+z_a(\omega)\geq 0$

(2)　ほとんどすべての ω に対し，$\sum_{a\in A}z_a(\omega)\leq 0$

(3)　$z_a:\Omega\to R^l$ は $\mathcal{F}_a$- 可測

の各条件を満たすとき，**実行可能（フィージブル）**であるという．(1) は構成員が市場取引後に，自己の生命を維持可能な消費をできることを意味し，(2) は市場取引における需給のバランスを弱い意味で要請している.[10] (3) の可測性の要請は，各構成員 $a\in A$ が自ら市場でどのような取引をするのか認識している（分かっている）ことを意味する．

さて，市場経済の経験が豊富な社会では，市場取引に参加する人々の間で，市場取引を行うことの意義についての共通認識が生まれるのが一般的である．このことが市場取引の実態について，どのようなインプリケーションを持つのか考えよう．

定理 7.1（市場取引と実需）　市場において次の点に関しすべての構成員（トレーダー）$a\in A$ の間で共通認識があるとする．

(1)　市場取引 z は実行可能である．

(2)　各トレーダーは取引しないよりも，z_a による取引の方を弱い意味で選好する．

このとき，すべての構成員（トレーダー）$a\in A$ が危険回避的であり，各財の初期保有量配分 $e=\{e_a\}_{a\in A}$ がパレート最適であるならば，z による市場取引を行うことと取引を全く行わないこと（ゼロ・ネット・トレード）

との間で各トレーダーは無差別である.

証明　各トレーダー $a \in A$ は，情報 $\mathscr{F}_a$ から出発し，市場均衡をもたらす市場取引に参加することにより，$\check{\mathscr{F}}_a$ の情報を有するに至ったとしよう．$\check{\mathscr{I}}_a, a \in A$ をその情報分割とする．今，純市場取引 z は実行可能であり，各トレーダーは取引しないことよりも，z_a による取引を行う方を弱い意味で選好しているとし，これが ω において共通認識となっていれば，

(♣)　$\check{I}_A(\omega) \subset \{\omega' \in \Omega \mid (\forall a \in A) E_a[u_a(\cdot, e_a+z_a) \mid \check{\mathscr{F}}_a] \geq E_a[u_a(\cdot, e_a) \mid \check{\mathscr{F}}_a]\}$

が成立する.

上の不等式において，仮に厳密な不等号が $\bar{\omega}$ において $\bar{a}$ について成立したとする．純市場取引 $\bar{z}: A \times \Omega \to R^l$ を

$$(\forall a \in A)\ \bar{z}_a(\omega') \equiv \begin{cases} z_a(\omega') & \omega' \in \check{I}_A(\bar{\omega}) \text{ の場合} \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

によって定義しよう．換言すれば，$\bar{z}_a \equiv z_a \chi_{\check{I}_A(\bar{\omega})}$ である．z が実行可能であることから，$\bar{z}$ も実行可能な純市場取引となる.

命題 6.5 より，$\mathscr{I}_A = \mathscr{I}_{\mathscr{C}}(\mathscr{C} = \sigma(\cap_{a \in A} \check{\mathscr{F}}_a))$ だから，すべての a について $\chi_{\check{I}_A(\bar{\omega})}$ は $\check{\mathscr{F}}_a$- 可測である．したがって,

$$\begin{aligned} E_a[u_a(\cdot, e_a+\bar{z}_a)] &= E_a[E_a[u_a(\cdot, e_a+z_a\chi_{\check{I}_A(\bar{\omega})}) \mid \check{\mathscr{F}}_a]] \\ &= E_a[E_a[u_a(\cdot, e_a)\chi_{\check{I}_A(\bar{\omega})^c} \mid \check{\mathscr{F}}_a]] \\ &\quad + E_a[E_a[u_a(\cdot, e_a+z_a)\chi_{\check{I}_A(\bar{\omega})} \mid \check{\mathscr{F}}_a]] \\ &= E_a[\chi_{\check{I}_A(\bar{\omega})^c} E_a[u_a(\cdot, e_a) \mid \check{\mathscr{F}}_a]] \\ &\quad + E_a[\chi_{\check{I}_A(\bar{\omega})} E_a[u_a(\cdot, e_a+z_a) \mid \check{\mathscr{F}}_a]] \\ &\geq E_a[\chi_{\check{I}_A(\bar{\omega})^c} E_a[u_a(\cdot, e_a) \mid \check{\mathscr{F}}_a]] \\ &\quad + E_a[\chi_{\check{I}_A(\bar{\omega})} E_a[u_a(\cdot, e_a) \mid \check{\mathscr{F}}_a]] \\ &= E_a[u_a(\cdot, e_a)] \end{aligned}$$

が成立する．ここで $\bar{a}$ については厳密な不等号となる．ところが，すべての $a \in A$ について主観的事前確率 μ_a は等しいから,

$$z^* \equiv E[\tilde{z}]$$

と定めれば，市場取引z^*は実行可能であり，かつ，取引を全く行わないゼロ・トレードをパレート改善する．これは初期保有量配分eがパレート最適であったことに反する．よって，いかなるaについても，(♣) の式において強い不等号は成立しない．

また，構成員が厳密に危険回避的な場合は，zがゼロ・トレードでなければ，パレート改善することとなり，eがパレート最適であったことに反する．　■

上記の定理 7.1 が意味するところを考えてみよう．実際に市場で取引が行われるとき，取引は取引者相互に利益があり，かつ，市場全体で実行可能であるという共通認識の上で行われるならば，市場取引は基本的に「実需」に基づいているということだと解釈される．取引開始前の状況eがパレート改善できるような場合でなければ市場取引が生じないことを上の定理が主張しているからである．

7.2　不完全情報の下での市場均衡と取引

前小節の一般的な市場描写からさらに一歩進めて，より具体的な市場取引を考察の対象としよう．l種類の状態依存証券を取引する市場を考える．これらの証券の確率的な市場価値を$p(\omega) \in R^l_+$，証券市場での取引価格を$q \in R^l_+$とする．可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ の上で定義される関数$p: \Omega \to PR^l_+ (\equiv \{z \in R^l_+ \mid \sum_{i=1}^l z_i = 1\})$ を**市場価格関数**という[11]．

市場における価格関数$p: \Omega \to PR^l_+$によって生成されるσ-集合代数を$\sigma(p)$で表わすことにしよう．市場取引に参加する人々が，市場価格の変動を見て学ぶ（認識する）情報が，$\sigma(p)$で表現される．経済構成員がこのように市場の経済変数を通して学ぶ情報を，**市場における学習**（もしくは，**マーケット・ラーニング** *market learning*）と呼ぶこととする．市場

における学習 $\sigma(p)$ は，前節の意味で共通の学習である．したがって，命題6.4により公共情報であり，さらに命題6.6により共通知識である．

経済構成員 $a\in A$ の情報集合は，市場における学習により $\mathscr{F}_a$ から $\mathscr{F}_a\vee\sigma(p)$ に変わる．$z_a(\cdot\mid\mathscr{F}_a\vee\sigma(p)):\Omega\to R^l_{++}$ を a の純取引（超過需要）対応とする[12]．関数 y を a の取引対応 $z_a(\cdot\mid\mathscr{F}_a\vee\sigma(p))$ からの可測選択[13] とすれば，情報集合 $\mathscr{F}_a$ と市場で価格から学習した情報集合 $\sigma(p)$ の下で，$y+e_a$ は経済構成員 a の期待効用を最大化する．

不完全情報の下での市場均衡は次のように定義される．価格関数 $p:\Omega\to PR^l_{++}$ および純取引関数 $z:A\times\Omega\to R^l$ からなる組 (p,z) が，以下の2条件

(1) 純取引関数 $z_a(\cdot)$ は，純取引対応 $z_a(\cdot\mid\mathscr{F}_a\vee\sigma(p))$ の可測選択

(2) ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に対し，$\sum_{a\in A}z_a(\omega)=0$

を満足するならば，(p,z) を**合理的期待均衡**（*a rational expectations equilibrium*）と呼ぶ．

合理的期待均衡は市場取引をする人々の間での共通の学習 $\sigma(p)$ を前提とした均衡概念である．共通の学習は共通知識だから，前小節の定理7.1と類似の命題が成立するはずである．実際，次の主張が成立する．

定理 7.2（合理的期待均衡と投機による利益） $\{u_a:\Omega\times R^l_+\to R, e_a:\Omega\to R^l_+,\mu_a\}_{a\in A}$ を不完全情報下の経済とする．各経済構成員は危険中立的で局所非飽和性を満たす選好を持ち，各構成員 $a\in A$ の主観的事前確率分布は一致し

$$(\forall a\in A)\ \mu_a=\mu$$

である．このとき，(p,z) が合理的期待均衡であれば，いかなる経済構成員 $a\in A$ も市場における自己の取引 z_a によって正の利益を挙げることはできない．

証明 まず，$a\in A$ に対し，関数 $g_a:\Omega\to R$ と $m_a:\Omega\to R$ とを各 $\omega\in\Omega$ に

ついて

$$g_a(\omega) \equiv p(\omega) \cdot z_a(\omega)$$

$$m_a(\omega) \equiv p(\omega) \cdot e_a(\omega)$$

によって定めよう．v_a を a の所得の間接効用関数とする．（価格 $p(\omega)$ の記述は省略する．）各 $a \in A$ は危険中立的であり，期待効用を最大化していることから

$$v_a(E[g_a + m_a \mid \mathcal{F}_a \vee \sigma(p)]) = E[v_a \circ (g_a + m_a) \mid \mathcal{F}_a \vee \sigma(p)]$$

$$\geq E[v_a \circ m_a \mid \mathcal{F}_a \vee \sigma(p)] = v_a(E[m_a \mid \mathcal{F}_a \vee \sigma(p)])$$

となる．上で弱い不等号が成立するのは，$z_a = 0$，つまりゼロ・トレードを選択しうるからであり，最初と最後の等号は選好関係の危険中立性による．また，選好関係の局所非飽和性により各 v_a は厳密な単調増加関数である．したがって，

$$E[g_a + m_a \mid \mathcal{F}_a \vee \sigma(p)] \geq E[m_a \mid \mathcal{F}_a \vee \sigma(p)]$$

となるから，各 $a \in A$ に対し

$$(\clubsuit) \quad E[g_a \mid \mathcal{F}_a \vee \sigma(p)] \geq 0$$

が成立する．これより

$$(*) \quad E[g_a \mid \sigma(p)] = E[E[g_a \mid \mathcal{F}_a \vee \sigma(p)] \mid \sigma(p)] \geq 0$$

を得る．ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して $\sum_{a \in A} z_a(\omega) = 0$ であることは，ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ に対して $\sum_{a \in A} g_a(\omega) = 0$ となることを意味するから，

$$\sum_{a \in A} E[g_a \mid \sigma(p)] = E[\sum_{a \in A} g_a \mid \sigma(p)] = 0$$

である．よって，（$*$）は

$$(\forall a \in A) E[g_a \mid \sigma(p)] = 0$$

を意味するが，さらにこれは（$\clubsuit$）により

$$(\forall a \in A) E[g_a \mid \mathcal{F}_a \vee \sigma(p)] = 0$$

を導く．　■

上の定理 7.2 では，効用関数の危険中立性を要求しているが，Tirole [13, p. 1167] の場合は，危険資産が 1 種類のモデルにおいて，関数 g_a と m_a が無相関であることを要請することにより，同様な帰結を導いている．g_a と m_a が無相関であれば，初期保有のポジションが負に落ち込む場合の保険として資産取引を使うことができないから，資産取引が行われる唯一の理由は「純粋な投機取引」である．したがって，そのような仮定の下では上記証明中の♣の不等式から議論を始めることができるため，効用関数が厳密に危険回避的であっても上のような結論を導出できることになる．(上の証明において効用関数が厳密に危険回避的であれば♣の不等式は成立しないことに注意しよう.) 換言すれば，関数 g_a と m_a とが無相関であるという意味において，各トレーダーの市場取引が純粋な投機的動機によるものとすれば，危険回避的な人も危険中立的な人も市場取引により正の利益を得ることは無い．したがって，上記定理の系としてつぎの命題を得る．

命題 7.1　$\{u_a : \Omega\times R^l_+ \to R, e_a : \Omega \to R^l_+, \mu_a\}_{a\in A}$ を不完全情報下の経済とし，各経済構成員は厳密に危険回避的で，局所非飽和性を満たす選好を持つものとする．さらに，各構成員 $a \in A$ の主観的事前確率分布は一致し

$$(\forall a \in A)\ \mu_a = \mu$$

である．このとき，この市場経済の合理的期待均衡 (p, z) は，つぎの特徴を有する．

(1)　関数 $g_a : \Omega \to R$ と $m_a : \Omega \to R$ (各 $\omega \in \Omega$ に対し $g_a(\omega) \equiv p(\omega)\cdot z_a(\omega)$, $m_a(\omega) \equiv p(\omega)\cdot e_a(\omega)$ と定める) とが無相関ならば，いかなる経済構成員 $a \in A$ も市場における取引に参加しない．

(2)　しかし，これらの関数に相関関係があれば市場取引は発生し得る．

以上の議論では時間構造を明示的に取り扱わずに，一般的な財市場を考

察してきた．つぎに，多期間に渡る市場取引の中で投機的取引の可能性に着目しながら，経済構成員間の情報構造と市場取引の特徴についての分析を進めよう．

7.3　多期間の取引と動学的合理的期待均衡

前小節までは一般的な財市場を考察してきたが，以下では，多期間に渡る市場取引を証券市場に特定化して分析しよう．市場取引が行われる期間を時間集合 $\mathcal{T}=\{0,1,\cdots,T\}$ で表す．$t\in\mathcal{T}$ を代表元とする．経済構成員 $a\in A$ の各 $t\in\mathcal{T}$ 期の情報は**情報の増大系** $\mathcal{F}_a=\{\mathcal{F}_{at}\}_{t\in\mathcal{T}}$ によって与えられる．つまり，各 $\mathcal{F}_{at}$ は $\mathcal{F}$ の部分 σ-集合代数で，$t_1,t_2\in\mathcal{T},t_1\leq t_2$ に対し

$$\mathcal{F}_{at_1}\subset\mathcal{F}_{at_2}$$

である．経済構成員 a の情報集合 $\mathcal{F}_a$ が情報の増大系で与えられているということは，各自過去の出来事を忘れないことを意味する．情報の増大系 $\mathcal{F}_a=\{\mathcal{F}_{at}\}_{t\in\mathcal{T}}$ が与える**情報分割系**を $\mathcal{I}_a=\{\mathcal{I}_{at}\}_{t\in\mathcal{T}}$ と書く．以下本節では，各 $t\in\mathcal{T}$ 期において構成員 a が認識できる最も詳しい情報は正の確率を持つ事象によって与えられるものとする．すなわち，任意の $\omega\in\Omega$ において

$$\text{すべての } a\in A \text{ と各 } t\in\mathcal{T} \text{ に対し } \mu_a(I_{at}(\omega))>0$$

が成立することを前提とする．

情報の増大系 $\mathcal{F}_a=\{\mathcal{F}_{at}\}_{t\in\mathcal{T}}$ によって与えられる情報分割系 $\mathcal{I}_a=\{\mathcal{I}_{at}\}_{t\in\mathcal{T}}$ が，各 $t\in\mathcal{T}$ において $\#\mathcal{I}_{a(t+1)}-\#\mathcal{I}_{at}<\infty$ を満たすとき，**情報構造は有限連続**であると呼ぶこととする．（ここで $\#G$ は集合 G の濃度を表す．）情報構造の有限連続性は，情報が突如として際限無く増える事態を排除するものである．経済構成員 a の情報分割系 $\mathcal{I}_a$ に属する情報分割 $\mathcal{I}_{at}$ は，それぞれの $t\in\mathcal{T}$ について共通認識の情報分割 $\mathcal{I}_{At}$ や共有情報分割 $\mathcal{I}_{\mathcal{G}t}$ を定めるから，**共通認識の情報分割系**と**共有情報分割系**をそれぞれ $\mathcal{I}_A=\{\mathcal{I}_{At}\}_{t\in\mathcal{T}}$，$\mathcal{I}_{\mathcal{G}}=\{\mathcal{I}_{\mathcal{G}t}\}_{t\in\mathcal{T}}$ と書く．

資産は安全資産(貨幣)と危険資産の2種類のみからなり，各構成員 $a \in A$ の資産の初期保有量は $e_a=(e_a^1, e_a^2) \in R_+^2$ である．また，構成員 a の効用は貨幣の(確率的)効用関数 $v_a: \Omega \times R_+ \to R$ によって与えられる．各 v_a は厳密な単調増加関数であるとする．

市場構造

各 $t \in \mathcal{T}$ 期において危険資産の取引が行われる．危険資産の市場価格は安全資産を価値基準として表現され，各 $t \in \mathcal{T}$ 期の市場価格は市場価格関数(系) $p=\{p_t: \Omega \to R_+\}_{t \in \mathcal{T}}$ として一括して表される．市場における危険資産の取引は $x: A \times \mathcal{T} \times \Omega \to R_+$ によって表し，$x_{at}(\omega) \equiv x(a, t, \omega)$ と書く．ただし，ここでいう取引 x_{at} は純取引（ネット・トレード）では無く，危険資産に対する需要を表す．市場における空売りは，安全資産については許容されるが，危険資産については禁じられるものとする．そこで，経済構成員 a の取引 $x_a \equiv \{x_{at}: \Omega \to R\}_{t \in \mathcal{T}}$ が

$$(\forall t \in \mathcal{T})(\forall \omega \in \Omega)\sum_{s=1}^{t} x_{as}(\omega) \geq 0$$

の条件を満たすとき，x_a(もしくは a) は**空売り制約を満たす**という．

危険資産の配当は最終 T 期に支払われ，消費は最終期にのみ行われる．資産1単位当たりの配当は，$d: \Omega \to R$ で与えられる．各 $t \in \mathcal{T}$ 期の割引因子（discount factor）は一定で，$\gamma(0<\gamma<1)$ とする．($\frac{1}{\gamma}-1$ が割引率である.）市場価格関数 p の下で，経済構成員 a が取引 x_a を実行すると，各期の取引終了後にその時点で将来の消費に充当できる額の現在割引価値は，

・0期，$e_a^1+p_0(\omega)e_a^2-p_0(\omega)x_{a0}(\omega)$

・1期，$e_a^1+p_0(\omega)e_a^2+(\gamma p_1(\omega)-p_0(\omega))x_{a0}(\omega)-\gamma p_1(\omega)x_{a1}(\omega)$

　⋮

・t 期，$e_a^1+p_0(\omega)e_a^2+\sum_{s=0}^{t-1}\gamma^s(\gamma p_{s+1}(\omega)-p_s(\omega))x_{as}(\omega)-\gamma^t p_t(\omega)x_{at}(\omega)$

$\vdots$

・T 期，$e_a^1+p_0(\omega)e_a^2+\sum_{t=0}^{T-1}\gamma^t(\gamma p_{t+1}(\omega)-p_t(\omega))x_{at}(\omega)-\gamma^T p_T(\omega)x_{aT}(\omega)$

となる．したがって，a は

$$\gamma^T c_a(\omega:p,x_a)$$

$$\equiv e_a^1+p_0(\omega)e_a^2+\sum_{t=0}^{T-1}\gamma^t(\gamma p_{t+1}(\omega)-p_t(\omega))x_{at}(\omega)-\gamma^T p_T(\omega)x_{aT}(\omega)$$ [14)]

だけの消費を行うことが可能になる．

多期間に渡る不完全情報下の経済 $\{v_a, e_a, \mathcal{F}_a, \mu_a\}_{a\in A}$ に対し，市場価格関数 $p=\{p_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ と期間 $\mathcal{T}$ を通じての市場取引 x からなる組 (p,x) が

(1)　各 $t\in\mathcal{T}$ に対し，p_t は $\vee_{a\in A}\mathcal{F}_{at}$- 可測である

(2)　各 $a\in A$ とすべての $t\in\mathcal{T}$ に関し，x_{at} は $\mathcal{F}_{at}\vee\sigma(p_t)$ 可測である

(3)　各 $a\in A$ とすべての $t\in\mathcal{T}$ に関し，x_{at} は空売り制約を満たす

(4)　各 $a\in A$ とほとんどすべての $\omega\in\Omega$ に対し，消費は実行可能である．つまり，$c_a(\omega:p,x_a)\geq 0$ を満たす．

(5)　y_{at} からなる市場取引 y_a が空売り制約を満たし，すべての $t\in\mathcal{T}$ に対し $\mathcal{F}_{at}\vee\sigma(p_t)$-可測であって，実行可能な消費をもたらすとき，いかなる $a\in A$ についても

$$E_a[v_a(\omega, c_a(\omega:p,x_a))]\geq E_a[v_a(\omega, c_a(\omega:p,y_a))]$$

が成立する

(6)　各 $t\in\mathcal{T}$ に対し，$\sum_{a\in A}x_{at}(\omega)=\sum_{a\in A}e_{at}^2$ が，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ について成立する

の各条件を満たすとき，(p,x) を**動学的合理的期待均衡**（*dynamic rational expectations equilibrium*）という．

動学的合理的期待均衡が要請する諸条件の意味は以下のようになろう．

(1)　市場価格が反映する情報は市場取引に参加した人々の持つ情報に限られ，それ以外の情報は反映しない．

(2)　市場取引を行う人は取引の時点で保有する自己の情報と，取引時点を含めそれまでの市場価格から学んだ情報に基づいて自分自身の取引を認識することができる．

(3)　市場で空売りは許されない．

(4)　各構成員の市場取引は予算的に実行可能であり，フィージブルな消費をもたらす．

(5)　どの人も各期各期に予想される市場価格に基づき自分にとってベストだと考えられる（つまり，期待効用を最大化する）取引計画を立てる．

(6)　資産市場において需要量と供給量は一致する．

市場価格関数 $p=\{p_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ と情報の増大系 $\mathcal{F}_a=\{\mathcal{F}_{at}\}_{t\in\mathcal{T}}$ が与えられたとき，各期の価格 p_t から学ぶことによって得られる情報の増大系を $\mathcal{F}_a\vee\sigma(p)\equiv\{\mathcal{F}_{at}\vee\sigma(p_t)\}_{t\in\mathcal{T}}$ と書こう．また，情報の増大系 $\mathcal{F}_a\vee\sigma(p)$ から得られる情報分割系を $\mathcal{I}_a^p=\{\mathcal{I}_{at}^p\}_{t\in\mathcal{T}}$ と書くことにする．

以下では，上で定式化した証券市場において動学的合理的期待均衡が実現するものとして，市場取引と市場価格の特徴を分析しよう．

7.4　投機的取引とバブル

市場における取引が実需に基づくものかそれとも投機によるものかをどのように判断したらよいだろうか．ある意味で第 7.1 節における判断基準は，取引がパレート改善するためのものか否かによるものと言える．市場が 1 回のみ開かれ，市場取引についてその実行可能性とお互いに不利な取引はしないという共通の認識があれば，基本的に市場取引は実需のみだというのが定理 7.1 の主張である．この小節では多期間に渡る証券市場取引を考察しているから，情報の多様性（ヘテロジュネエティー）が投機的取引を生む可能性があるだろう．その点の分析を進めたい．J. M. Harrison

と D. M. Kreps［7, p. 323］は本節で考察するような投機的取引をつぎのように定義している．つまり，いったん購入した「証券を永久に手元に置いておくことを余儀なくされる場合と比較して，それを再販売する権利がある場合に，より高い価格を支払ってもよい」と考えて行動するときに，そのような行動を**投機的行動**（*speculative behavior*）という．本小節では本来あるべき価格水準からのこのような意味での乖離を引き起こす行動として投機を捉え，市場価格の本来あるべき水準からの乖離をバブルとして考える．以下，F. Allen 等［2］が導入したバブルの定義を使って議論することにしたい．

平均的価格バブル

ある時点 $t \in \mathcal{T}$ における証券の市場価格 $p_t(\omega)$ が，いかなる経済構成員 $a \in A$ をとってみても，その時点までの自己の情報と市場価格から学習した情報 $\mathcal{F}_{at} \vee \sigma(p_t)$ を用いて評価した証券の価値を上回るとき，t と ω において平均的価格バブルの発生が見られるという．より具体的には以下のように定義される．まず，各 $a \in A$ について $S \in \mathcal{F}$ に対し，$\mathcal{F}$ 上の確率測度

$$\pi_a(S) \equiv \frac{\int_S E_a[D_2 v_a(\omega, c_a(\omega : p, x_a)) \mid \mathcal{F}_{at} \vee \sigma(p_t)] d\mu_a}{\int E_a[D_2 v_a(\omega, c_a(\omega : p, x_a)) \mid \mathcal{F}_{at} \vee \sigma(p_t)] d\mu_a}$$

を定める．ここで $D_2 v_a(\omega, c_a(\omega : p, x_a))$ は ω における消費の限界効用を表す．消費が1単位増加するとしよう．このとき，事象 S において期待できる効用の増分が，事象 S に限定しない場合に期待できる効用の増分の何割かを示すのが $\pi_a(S)$ である．a が危険中立的であれば，$D_2 v_a(\omega, c_a(\omega : p, x_a)) =$ 一定値 δ となるから

$$\pi_a(S) \equiv \frac{\int_S E_a[\delta \mid \mathscr{F}_{at} \vee \sigma(p_t)]d\mu_a}{\int E_a[\delta \mid \mathscr{F}_{at} \vee \sigma(p_t)]d\mu_a}$$

$$= \frac{\delta\mu_a(S)}{\delta} = \mu_a(S)$$

が成立し，各 $t \in \mathscr{T}$ に対し π_a は $\mathscr{F}_{at} \vee \sigma(p_t)$ 上で μ_a と一致する．

すべての $a \in A$ に対し，条件

$$E^{\pi_a}[p_t - \gamma^{T-t}d \mid \mathscr{F}_{at} \vee \sigma(p_t)] > 0, \ a.e. I_{at}^p(\omega)$$

が成り立つとき，t と ω において**平均的価格バブル**（*mean price bubble*）の発生が見られる（あるいは，t 期の価格 p_t は**平均的バブルを含む**）という．ここで E^{π_a} は確率 π_a による期待値を表す．このような平均的価格バブル発生の要件はつぎの命題に示される通りである．

定理 7.3（平均的価格バブルの発生要件）

(p, x) を多期間に渡る不完全情報下の経済 $\{v_a, e_a, \mathscr{F}_a, \mu_a\}_{a \in A}$ における動学的合理的期待均衡とする．このとき，t と ω において平均的価格バブルの発生が見られるための必要条件は，いかなる経済構成員 $a \in A$ をとっても，ある t' $(t \leq t' < T)$ において，ほとんどすべての $\omega' \in I_{at'}^p(\omega)$ に対し厳密な空売り制約を受けていることである．

証明　仮に $k(0 < k \leq T-t)$ に対し，

$$(\clubsuit) \quad E^{\pi_a}[\gamma^k p_{t+k} \mid \mathscr{F}_{at} \vee \sigma(p_t)](\omega') > p_t(\omega'), \ a.e. \omega' \in I_{at}^p(\omega)$$

だったとしよう．任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$y_{a\tau}(\omega') = \begin{cases} x_{a\tau}(\omega') + \varepsilon & \tau = t, t+1, \cdots, t+k-1 \text{ で } \omega' \in I_{at}^p(\omega) \text{ の場合} \\ x_{a\tau}(\omega') & \text{その他の場合} \end{cases}$$

と定めれば，

$$c_a(\omega' : p, y_a) - c_a(\omega' : p, x_a) = \begin{cases} (\gamma^k p_{t+k}(\omega') - p_t(\omega'))\varepsilon & \omega' \in I_{at}^p(\omega) \\ 0 & \text{その他の場合} \end{cases}$$

となる．このような x_a から y_a への取引の変化がもたらす消費者 a の期待効用の変化 $E_a[v_a(\cdot, c_a(\cdot : p, y_a)) - v_a(\cdot, c_a(\cdot : p, x_a))]$ は，

$$E_a[D_2 v_a(\cdot, c_a(\cdot : p, x_a))(c_a(\cdot : p, y_a) - c_a(\cdot : p, x_a))]$$

で近似される．ところが，

$$\begin{aligned} &E_a[D_2 v_a(\cdot, c_a(\cdot : p, x_a))(c_a(\cdot : p, y_a) - c_a(\cdot : p, x_a))] \\ &\quad = E_a[E_a[\chi_{I^p_{at}(\omega)} D_2 v_a(\cdot, c_a(\cdot : p, x_a))(\gamma^k p_{t+k} - p_t)\varepsilon \mid \mathcal{F}_{at} \vee \sigma(\dot{p}t))]] \\ &\quad = E_a[E_a[D_2 v_a(\cdot, c_a(\cdot : p, x_a))]E^{\pi_a}[\chi_{I^p_{at}(\omega)}(\gamma^k p_{t+k} - p_t)\varepsilon \mid \mathcal{F}_{at} \vee \sigma(pt))]] > 0 \end{aligned}$$

となる．ここで最後の不等号は効用関数が厳密な単調増加関数であることと（♣）による．よって，取引 y_a は a の効用を高めることになり矛盾．したがって，各 $a \in A$ に対し，

$$(\spadesuit) \quad E^{\pi_a}[\gamma^k p_{t+k} \mid \mathcal{F}_{at} \vee \sigma(p_t)](\omega') \leq p_t(\omega'), \ \ a.e.\, \omega' \in I^p_{at}(\omega)$$

が成立する．（$I^p_{at}(\omega)$ は $\mathcal{F}_{at} \vee \sigma(p_t)$ のアトムであることに注意．）

この（♠）の式において

$$E^{\pi_a}[\gamma^k p_{t+k} \mid \mathcal{F}_{at} \vee \sigma(p_t)](\omega') < p_t(\omega'), \ \ a.e.\, \omega' \in I^p_{at}(\omega)$$

が成立する場合，実数 δ に対し

$$z_{a\tau}(\omega') = \begin{cases} x_{a\tau}(\omega') - \delta & \tau = t, t+1, \cdots, t+k-1 \text{ で } \omega' \in I^p_{at}(\omega) \text{ の場合} \\ x_{a\tau}(\omega') & \text{その他の場合} \end{cases}$$

と取引 z_a を定めるとき，いかなる $t'(t \leq t' \leq t+k-1)$ についても空売り制約に反しないような $\delta > 0$ が存在すれば，a は効用を高めることになり矛盾が生じる．したがって，集合 $I^p_{at}(\omega)$ の上では，ある $t'(t \leq t' \leq t+k-1)$ に対し，ほとんどすべての $\omega' \in I^p_{at'}(\omega) \subset I^p_{at}(\omega)$ に関し，空売り制約を受けていることになる．

この議論は任意の $k(0 < k \leq T-t)$ について成立し，しかも均衡条件から $d(\omega') = p_T(\omega')$ がほとんどすべての $\omega' \in \Omega$ について成立する．よって，

$$E^{\pi_a}[\gamma^{T-t} d - p_t \mid \mathcal{F}_{at} \vee \sigma(p_t)](\omega') < 0, \ \ a.e.\, \omega' \in I^p_{at}(\omega)$$

であれば，ある $t'(t \leq t' < T)$ において，ほとんどすべての $\omega' \in I^p_{at'}(\omega)$ に対

し厳密な空売り制約を受けていることになる. ■

価格バブル

上で分析した平均的価格バブルよりも強いバブルの概念を導入しよう. 市場価格関数 p が与えられたとき, t 期の価格 p_t が ω において**バブル**を含むとは, すべての経済構成員 $a \in A$ に対し,

$$I^p_{at}(\omega) \subset B_t \equiv \{\omega' \in \Omega \,|\, p_t(\omega') > \gamma^{T-t} d(\omega')\}$$

が成り立つことである. 換言すると, 市場における証券価格が証券の現在割引価値を上回っていることをすべての人が知っていることである. この強い意味での価格バブルの特徴はつぎの命題で与えられる.

定理 7.4 (バブルの共通認識不可能性)

$\{v_a, e_a, \mathcal{F}_a, \mu_a\}_{a\in A}$ を多期間に渡る不完全情報下の経済とし, 情報構造は有限連続性を持つものとする. このとき, この経済の動学的合理的期待均衡 (p, x) における t 期の価格 p_t が ω においてバブルを含むならば, バブルは ω において共通認識され得ない.

証明 動学的合理的期待均衡 (p, x) における t 期の価格 p_t が ω においてバブルを含めば平均的価格バブルが発生するから, 定理 7.3 の証明の中で示したように, 任意の k $(0<k\leq T-t)$, 各 $a \in A$ に対し,

$$(\spadesuit) \quad E^{\pi_a}[\gamma^k p_{t+k} \,|\, \mathcal{F}_{at} \vee \sigma(p_t)](\omega') \leq p_t(\omega'), a.e.\ \omega' \in I^p_{at}(\omega)$$

が成立する. ところが (p, x) は均衡であり, すべての $a \in A$ が空売り制約を受けていることはあり得ないから, ($\spadesuit$) の式において少なくとも一人の a に対し, 等号が成立する. したがって, 各構成員 $a \in A$ の情報分割系 $\mathcal{I}^p_a = \{\mathcal{I}^p_{at}\}_{t\in\mathcal{T}}$ から得られる共通認識の情報分割系と順帰納的共通情報分割系をそれぞれ

・$\mathcal{I}^p_A = \{\mathcal{I}^p_{At}\}_{t\in\mathcal{T}}$

・$\mathcal{I}^{p*} = \{\mathcal{I}^{p*}_t\}_{t\in\mathcal{T}}$

と書くと，任意の k $(0<k\leq T-t)$ について

$$p_t(\omega)\leq \text{ess sup}\,\{\gamma^k p_{t+k}(\omega')\,|\,a\in A, \omega'\in I^p_{at}(\omega)\}$$

$$(\clubsuit)\qquad =\text{ess sup}\,\{\gamma_k p_{t+k}(\omega')\,|\,\omega'\in I^{p*}_t(\omega)\}$$

$$=\text{ess sup}\,\{\gamma_k p_{t+k}(\omega')\,|\,\omega'\in I^p_{At}(\omega)\}$$

を得る．ここで最後の等号は命題6.1による．また，$p_t(\omega')$ は $I^p_{At}(\omega)$ の上でほとんどいたる所一定だから，$p_t(\omega)$ はその一定値を表すものとする．情報構造の連続性により，$\#\mathcal{I}_{a(t+k)}-\#\mathcal{I}_{at}<\infty$ であり，p_{t+k} はほとんどすべての $\omega'\in I^p_{a(t+k)}(\omega)$ において一定値であるから，($\clubsuit$) の最初の sup は max に換えられる．同様に，上の最後の sup も命題6.5より max に換えられる．よって，ある $G\subset I^p_{At}(\omega)$, $\mu(G)>0$ で，ほとんどすべての $\omega'\in G$ と任意の k $(0<k\leq T-t)$ に対し

$$p_t(\omega')\leq\gamma^k p_{t+k}(\omega')$$

となるものが存在する．したがって，ほとんどすべての $\omega'\in G$ に対し

$$(\diamondsuit)\quad p_t(\omega')\leq\gamma^{T-t}p_T(\omega')=\gamma^{T-t}d(\omega')$$

が成立する．t 期の価格 p_t が ω においてバブルを含むことが共通認識されるならば

$$I^p_{At}(\omega)\subset\{\omega'\in\Omega\,|\,(\forall a\in A)I^p_{at}(\omega')\subset B_t=\{\omega''\in\Omega\,|\,p_t(\omega'')>\gamma^{T-t}d(\omega'')\}\}$$

とならねばならないが，これは ($\diamondsuit$) の式と $\mu(G)>0$ であることに矛盾する．よって，t 期の価格 p_t が ω においてバブルを含むことは共通認識され得ない．　■

市場の均衡価格が価格バブルを含むならば，すべての人々が市場価格は将来の市場価格の現在割引価値以上の水準にあることを認識している．しかし，上記定理7.4は，その事実を他人が認識していることを相互に認識することは有り得ないことを示している．このような価格バブルを含む均衡の具体例を次節で取り上げよう．

7.5　価格バブルの具体例

第7.4節では，平均価格バブルの発生要件を考察し，ついで価格バブルの共通認識不可能性を議論した．この節では動学的合理的期待均衡が価格バブルを含むような経済の具体例を取り上げ，価格バブルの共通認識不可能性命題（定理7.4）を確認してみよう．F. アレン等［2］が示した価格バブルの具体的数値例に依拠しつつ，価格バブル発生の構造がよりトランスパレントに見えるように，彼らの数値例を一般化した形に修正した上でこれを提示したい．

例（情報の多様性と価格バブルの発生例）　第7.3節のモデルをつぎのように単純化する．

・経済構成員は3人．$A=\{a_1, a_2, a_3\}$

・自然の状態は11．$\Omega=\{\omega_B, \omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$

・期間は3期間．$\mathcal{T}=\{0, 1, 2\}$

・各構成員の効用関数は危険中立的．

・各構成員の事前的主観確率．

Ω	ω_B	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
$22\times\mu_{a_1}$	1	3	1	1	1	1	1	1	1	1	10
$22\times\mu_{a_2}$	1	1	3	1	1	1	1	1	1	1	10
$22\times\mu_{a_3}$	1	1	1	3	1	1	1	1	1	1	10

・情報分割で示された各構成員の情報構造．

$\mathcal{I}_{at}$	情報分割
$\mathcal{I}_{a_1 0}$	$\{\omega_B, \omega_4\}$ $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$
$\mathcal{I}_{a_2 0}$	$\{\omega_B, \omega_5\}$ $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$

$\mathcal{I}_{a_3 0}$	$\{\omega_B, \omega_6\}$ $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_7, \omega_8, \omega_9, \omega_{10}\}$
$\mathcal{I}_{a_1 1}$	$\{\omega_B, \omega_4\}$ $\{\omega_1, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$ $\{\omega_2, \omega_9\}$ $\{\omega_3, \omega_8\}$ $\{\omega_{10}\}$
$\mathcal{I}_{a_2 1}$	$\{\omega_B, \omega_5\}$ $\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\}$ $\{\omega_3, \omega_7\}$ $\{\omega_1, \omega_9\}$ $\{\omega_{10}\}$
$\mathcal{I}_{a_3 1}$	$\{\omega_B, \omega_6\}$ $\{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_9\}$ $\{\omega_1, \omega_8\}$ $\{\omega_2, \omega_7\}$ $\{\omega_{10}\}$
$\mathcal{I}_{a_1 2}$	$\{\omega_B\}$ $\{\omega_1\}$ $\{\omega_2\}$ $\{\omega_3\}$ $\{\omega_4\}$ $\{\omega_5\}$ $\{\omega_6\}$ $\{\omega_7\}$ $\{\omega_8\}$ $\{\omega_9\}$ $\{\omega_{10}\}$
$\mathcal{I}_{a_2 2}$	$\{\omega_B\}$ $\{\omega_1\}$ $\{\omega_2\}$ $\{\omega_3\}$ $\{\omega_4\}$ $\{\omega_5\}$ $\{\omega_6\}$ $\{\omega_7\}$ $\{\omega_8\}$ $\{\omega_9\}$ $\{\omega_{10}\}$
$\mathcal{I}_{a_3 2}$	$\{\omega_B\}$ $\{\omega_1\}$ $\{\omega_2\}$ $\{\omega_3\}$ $\{\omega_4\}$ $\{\omega_5\}$ $\{\omega_6\}$ $\{\omega_7\}$ $\{\omega_8\}$ $\{\omega_9\}$ $\{\omega_{10}\}$

・証券(危険資産)の初期保有量は各自 4 単位で，最終第 2 期に支払われる配当 $d(\omega)$ は下記の表の通り．表の中で δ は割引因子 γ の逆数で $\delta=\frac{1}{\gamma}$ であり，$0<\gamma<1$ と $H>0$ の値は任意に一定の値を選んでよい．

Ω	ω_B	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
$d(\omega)$	0	$4\delta^2 H$	$4\delta^2 H$	$4\delta^2 H$	0	0	0	0	0	0	0

以上の経済は価格バブルを含む動学的合理的期待均衡を持つことを確認しよう．

・均衡価格の 1 つは，下記の $p=\{p_t\}_{t\in\mathcal{T}}$ で与えられる．

Ω	ω_B	ω_1	ω_2	ω_3	ω_4	ω_5	ω_6	ω_7	ω_8	ω_9	ω_{10}
$p_0(\omega)$	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H	H
$p_1(\omega)$	0	$2\delta H$	$2\delta H$	$2\delta H$	$2\delta H$	$2\delta H$	$2\delta H$	$2\delta H$	$2\delta H$	$2\delta H$	0
$p_2(\omega)$	0	$4\delta^2 H$	$4\delta^2 H$	$4\delta^2 H$	0	0	0	0	0	0	0

・この価格の下で 0 期の均衡純取引は 0 である．さらに，最終 2 期の純取引も 0 とする．均衡における 1 期の純取引量は，下記の表に示された通りである．表の中で $\mathcal{I}^{p}_{at}\equiv\mathcal{I}_{at}\vee\sigma(p_t)$ は，t 期の価格 p_t から情報を学んだ後の a の情報分割を表す．

$\mathcal{I}^p_{a1}$	$\{\omega_B\}$	$\{\omega_4\}$	$\{\omega_1, \omega_5, \omega_6, \omega_7\}$	$\{\omega_2, \omega_9\}$	$\omega_3, \omega_8\}$	$\{\omega_{10}\}$
p_2 の期待値	0	0	$2\delta H$	$2\delta H$	$2\delta H$	0
a_1 の 1 期の純取引	0	-4	2	-1	-1	0
$\mathcal{I}^p_{a2}$	$\{\omega_B\}$	$\{\omega_5\}$	$\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\}$	$\{\omega_3, \omega_7\}$	$\omega_1, \omega_9\}$	$\{\omega_{10}\}$
p_2 の期待値	0	0	$2\delta H$	$2\delta H$	$2\delta H$	0
a_2 の 1 期の純取引	0	-4	2	-1	-1	0
$\mathcal{I}^p_{a3}$	$\{\omega_B\}$	$\{\omega_6\}$	$\{\omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_9\}$	$\{\omega_1, \omega_8\}$	$\omega_2, \omega_7\}$	$\{\omega_{10}\}$
p_2 の期待値	0	0	$2\delta H$	$2\delta H$	$2\delta H$	0
a_3 の 1 期の純取引	0	-4	2	-1	-1	0

この表の中で純取引がバランスすること，また，これらの取引は空売り制約を満たす範囲で危険中立的期待効用を最大化していることが容易に確認できる．したがって，これらの各期の純取引が与える証券需要は均衡条件を満たしている．

ついでこの均衡の特徴を見てみよう．H と γ は任意に選べたから，例えば，$H=900$ 円，割引因子 $\gamma=\dfrac{3}{4}$ とすれば $\delta=\dfrac{4}{3}$ である．したがって，この例では，満期（第 2 期）の証券の価値はただ同然（0 円）の場合と，6,400 円にもなる場合とがある．0 期の市場でこの証券は状態に依存せず常に 900 円で取引される．しかし，第 1 期には価格が一気にただ同然に下落する場合と，逆に 2,400 円に上昇する場合とがある．最終期の価格は証券の配当の価値と同じである．この均衡価格の特徴をさらに列挙してみよう．

・0 期の価格はバブルを含んでいる．実際，つぎのように 2 期の証券価格の現在割引価値が 0 期の証券価格を上回っている状態を

$$B_0 \equiv \{\omega \in \Omega \,|\, p_0(\omega) > \gamma^2 p_2(\omega)\}$$

と置くと，$B_0=\{\omega_B,\omega_4,\omega_5,\omega_6,\omega_7,\omega_8,\omega_9,\omega_{10}\}$ となる．このとき，$\omega_B\in\Omega$ において

$$I^p_{a_10}(\omega_B)=\{\omega_B,\omega_4\}\subset B_0$$
$$I^p_{a_20}(\omega_B)=\{\omega_B,\omega_5\}\subset B_0$$
$$I^p_{a_30}(\omega_B)=\{\omega_B,\omega_6\}\subset B_0$$

だから，$\omega_B\in\Omega$ においては全員，証券価格が証券の現在割引価値を超えていることを知っている．つまり，0期の価格 p_0 は ω_B においてバブルを含んでいる．

・しかし，この事実は共通認識されない．実際，

－　a_1 は証券価格が証券の現在割引価値を超えていることを知っているが，これを a_2 や a_3 が知っていることを知らない．なぜならば，

$$\begin{aligned} I^p_{a_10}(\omega_B)&=\{\omega_B,\omega_4\}\\ &\not\subset\{\omega\,|\,I^p_{a_20}(\omega)\subset B_0\}=\{\omega_B,\omega_5\}\\ I^p_{a_10}(\omega_B)&=\{\omega_B,\omega_4\}\\ &\not\subset\{\omega\,|\,I^p_{a_30}(\omega)\subset B_0\}=\{\omega_B,\omega_6\}\end{aligned}$$

だからである．全く同様に，

－　a_2 は証券価格が証券の現在割引価値を超えていることを知っているが，これを a_1 や a_3 が知っていることを知らない．

－　a_3 は証券価格が証券の現在割引価値を超えていることを知っているが，これを a_1 や a_2 が知っていることを知らない．

したがって，この例では早々と第2段階で，証券価格が証券の現在割引価値を超えていることの相互認識が欠如してしまっている．

9)　一般に，$\Omega\subset\Omega_1\times\Omega_2$ として議論を進めることも可能である．このとき，集合 Ω の代表元を $\omega=(\omega_1,\omega_2)\in\Omega\subset\Omega_1\times\Omega_2$ と書ける．ここで Ω_2 は，例えば，自然の状態の集合 Ω の内，経済構成員の利害に影響しない部分を表し，Ω_1

の元についてのシグナルの集合と解釈して分析することができる．その場合，不完全情報下の経済は $\mathscr{E}=\{u_a:\Omega_1\times R^l_+\to R, e_a:\Omega_1\to R^l_+, \mu_a\}_{a\in A}$ と記述されることになる．

10） 厳密には不等号の代わりに等号を要請する．

11） 価格関数 p をシグナルの集合 Ω_2 上で定義する場合，π を射影 $(\omega_1,\omega_2)\to\omega_2$ として，写像 $\pi\circ p$ の可測性を要請することとなる．このようなセッティングにおいて上記の価格関数は，写像 $\pi\circ p$ に対応する．

12） 集合値関数を対応と呼ぶ．

13） 集合値関数と同一の定義域を持ち，ほとんどいたるところ集合値関数の集合値に属する値を取る可測関数．

14） 効用関数 v_a は単調増加関数だから，消費者が期待効用を最大化するような消費計画を立てれば $x_{aT}(\omega)$ は，ほとんどすべての $\omega\in\Omega$ において 0 である．

8　おわりに

本稿ではヘテロジェニアス heterogeneous な情報を付与された人々から構成される情報社会とそこでの構成員の市場活動のモデルを考察し，社会の情報構造と市場における情報収集が人々の市場活動に与える影響の理論的分析を目標に議論を進めてきた．われわれは，市場における取引の諸性質が取引に参加する人々の間の情報構造にどのように依存するかを明らかにする事に興味を持っているが，本稿の多くの紙面が社会的情報構造の描写と情報に関する社会構成員間の共通認識の諸性質の分析に費やされてしまった．最後の第 7 節が市場経済における情報構造と価格メカニズムに関する分析の出発点である．これまでの文献の多くが，市場における学習効果を通して経済構成員は共通認識を形成し，それが純粋な投機的行動を市場から抹殺するある種の原動力になっていることを指摘してきた．しかし，われわれはすべての興味ある経済現象が人々の共通認識の対象となる

とは考えられない．逆に，共通認識が形成されないところに，市場のバイタリティーの源泉があるように考えられる．その意味で本稿は未だわれわれの研究の端緒を示したにすぎないと言えるだろう．本稿の研究に関連した文献には既に触れたもののほか，Duffie と Huang [6]，星野 [8]，張 [9] 等がある．

参考文献

[1] B. ALLEN, Generic existence of completely revealing equilibria for economies with uncertainty when prices convey information, *Econometrica* 49 (1981), 1173-1199.

[2] F. ALLEN, S. MORRIS AND A. POSTLEWAITE, Finite bubbles with short sale constraints and asymmetric information, *Journal of Economic Theory* 61 (1993), 206-229.

[3] R. AUMANN, Agreeing to disagree, *Annals of Statistics* 4 (1976), 1236-1239.

[4] R. AUMANN, Subjectivity and correlation in randomized strategies, *Journal of Mathematical Economics* 1 (1974), 67-96.

[5] R. AUMANN, Correlated equilibrium as an expression of Bayesian rationality, *Econometrica* 55 (1987), 1-18.

[6] D. DUFFIE AND C.-F. HUANG, Multiperiod security markets with differential information : Martingales and resolution times, *Journal of Mathematical Economics* 15 (1986), 283-303.

[7] J. M. HARRISON AND D. M. KREPS, Speculative investor behavior in a stock market with heterogeneous expectations, *Quarterly Journal of Economics* 92 (1978), 323-336.

[8] Y. HOSHINO, Security markets with differential information, M. A. thesis, Hitotsubashi University, Kunitachi, Tokyo, 1994.

[9] Z. JIALE, Security pricing, equilibria and asymmetric information, M. A. thesis, Hitotsubashi University, Kunitachi, Tokyo, 1994.

[10] P. MILGROM, An axiomatic characterization of common knowledge,

Econometrica 49 (1981), 219-222.

[11] P. MILGROM AND N. STOKEY, Information, trade and common knowledge, *Journal of Economic Theory* 26 (1982), 17-27.

[12] L. SAVAGE, The *Foundations of Statistics*, John Wiley and Sons : New York, 1954.

[13] J. TIROLE, On the possibility of speculation under rational expectations, *Econometrica* 50 (1982), 1163-1181.

[14] A. YAMAZAKI, Differetial information, mimeo., Department of Economics, Hitotsubashi University, Kunitachi, Tokyo, 1993.