

不確実性と市場均衡

武 隈 慎 一

目 次

第一章 期待効用の理論	135
§ 1 期待効用	135
§ 2 可測効用指数の存在	137
§ 3 期待効用仮説	146
第二章 一時的均衡の理論	153
§ 1 一時的均衡	153
§ 2 経済主体の行動	157
§ 3 需要対応の連続性	161
§ 4 一時的均衡の存在	165
第三章 合理的期待均衡の理論	170
§ 1 合理的期待と市場均衡	170
§ 2 完全伝達均衡	175
§ 3 一般化モデルと消費者行動	178
§ 4 一般化モデルにおける合理的期待均衡	182
数学注	187
§ 1 基礎的表記法	187
§ 2 位相空間	191
§ 3 ユークリッド空間	195
§ 4 不動点定理	198

§5 測度論	199
§6 測度の弱収束	202
§7 条件付確率	205
参考文献	207

第一章 期待効用の理論

不確実性が存在する経済の理論的説明において第一に必要なことは、経済主体の整合的な行動基準を明らかにすることである。そのための理論として、公理体系的に構築された期待効用仮説と呼ばれる理論がある。それは選択対象が不確実性を含む場合の経済主体の行動基準を説明する理論であり、経済主体は不確実性下では彼の効用の期待値を最大にするように行動することを主張するものである。

期待効用仮説に公理的説明を最初に与えたのは J. von Neumann & O. Morgensten (1944) である。より一般的な場合の証明は I. N. Herstein & J. Milnor (1953) によって与えられている。更に、一般的な確率空間における論証が J. Grandmont (1972) によってなされている。また仮説の経験的妥当性が M. Friedman & L. J. Savage によって議論されている。

§1 期待効用

不確実性下の経済主体の行動を説明する場合、経済主体は彼の効用の期待値を最大にするように行動するという想定がしばしば採用される。この節では、単純な状況において、期待効用の意味を明らかにする。

二つの状態 (state) が存在し、それらを 1, 2 とする。各状態 1, 2 のもとでは結果 (consequence) として x_1, x_2 がそれぞれ実現するものとする。経済主体はどちらの状態が起きるか、即ちいずれの結果が実現するかは知らないが、各状態が起きる確率を知っているとする。各状態 1, 2 の起きる確率をそれぞれ π_1, π_2 とする。従って、経済主体の直面している不確実な状況は $\pi = (\pi_1, \pi_2)$ なるベクトルによって表現される。これを富くじ (lottery) (又は、見込み (prospect)) と呼ぶ。確率の定義より可能

なすべての富くじの集合は

$$\Pi = \{\pi = (\pi_1, \pi_2) | \pi_1 \geq 0, \pi_2 \geq 0, \pi_1 + \pi_2 = 1\}$$

となる。

経済主体の結果についての満足が効用関数 $u(\cdot)$ によって表現されるとする。即ち、 $u(x_1), u(x_2)$ はそれぞれ結果 x_1, x_2 が実現したとき経済主体が得る効用水準を表す。但し、 $u(x_1) < u(x_2)$ であることを仮定する。つまり、経済主体にとって状態 1 より状態 2 の方がより望ましいとする。

他方、経済主体は富くじからも満足を得るであろう。富くじについての効用関数を $U(\cdot)$ とする。即ち、各富くじ $\pi \in \Pi$ の効用水準が $U(\pi)$ で表される。ここで問題となるのは、富くじの効用 $U(\pi)$ はいかなる値でなければならないかということである。

特別な富くじ $(1, 0)$ を考える。つまり、状態 1 が確率 1 で実現し、状態 2 の実現する確率が 0 であるような富くじである。このような富くじを持つことは、確実に結果 x_1 が手に入ることを意味するから、富くじ $(1, 0)$ の効用は結果 x_1 の効用と等しい筈である。同様に、もう一つの特別な富くじ $(0, 1)$ の効用は結果 x_2 の効用と等しい筈である。従って、関数 $U(\cdot)$ は次の条件を満たさなければならない。

条件 1: $U(1, 0) = u(x_1), U(0, 1) = u(x_2)$

二つの富くじ $\pi, \pi' \in \Pi$ をそれぞれ

$$\pi = (\pi_1, \pi_2), \pi' = (\pi'_1, \pi'_2)$$

とする。経済主体にとって状態 1 より状態 2 の方がより望ましいのであるから、状態 2 の実現する確率がより大きい富くじの方がより高い効用を与える筈である。従って、関数 U は次の条件を満たさなければならない。

条件 2: もし $\pi_2 \geq \pi'_2$ (即ち、 $\pi_1 \leq \pi'_1$) ならば、 $U(\pi) \geq U(\pi')$ であり、又逆も成立する。

効用関数 $U(\cdot)$ を、各 $\pi \in \Pi$ について

$$U(\pi) = \pi_1 u(x_1) + \pi_2 w(x_2)$$

と定義すると、明らかに上述の二条件を満たす。この効用関数においては、富くじ π の効用が結果 x_1, x_2 から得る効用の期待値として表されることになる。更に、整合的な性質として次の条件を満足する。

条件 3: 任意の $\pi, \pi' \in \Pi$ と $0 \leq \theta \leq 1$ なる θ について

$$U(\theta\pi + (1-\theta)\pi') = \theta U(\pi) + (1-\theta)U(\pi')$$

が成立する。

この条件は、富くじ $\theta\pi + (1-\theta)\pi'$ を、確率 θ で富くじ π が、確率 $1-\theta$ で富くじ π' が手に入る富くじと解釈するならば、その効用 $U(\theta\pi + (1-\theta)\pi')$ は二つの富くじ π, π' の効用 $U(\pi), U(\pi')$ の期待値になることを意味する。

上述のことから明らかなように、富くじの効用は期待効用として表現されるのが自然である。次節では、より一般的な状況において、整合的な性質を持つ期待効用指数が存在することを示す。

§2 可測効用指数の存在

この節では不確実性を含む選択対象に効用指数が存在するための条件を明らかにする。ここでは不確実性を伴う選択対象を抽象的に取扱うことにする。経済主体が関心を持つ不確実な選択対象をすべて富くじ (lottery ticket) と呼ぶことにする。すべての富くじの集合を S とする。

次に、富くじ一次結合が定義する。即ち、任意の二つの富くじ $s, t \in S$ と $0 \leq \theta \leq 1$ なる数 θ について $\theta s + (1-\theta)t$ と表記される富くじの一次結合を定義する。数 θ を確率と解釈すると、その一次結合は富くじ s, t がそれぞれ確率 $\theta, 1-\theta$ で手に入るという不確実性を表していると解釈される。富くじの集合 S の基本的性質として以下の条件が成立すると仮定する。

仮定 2.1: 任意の $s, t \in S, 0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \lambda \leq 1$ について以下のことが成立する.

- 1) $\theta s + (1-\theta)t \in S$
- 2) $1s + 0t = s$
- 3) $\theta s + (1-\theta)t = (1-\theta)t + \theta s$
- 4) $\lambda[\theta s + (1-\theta)t] + (1-\lambda)t = \lambda\theta s + (1-\lambda\theta)t$

上記の条件 1) は、富くじの一次結合は富くじであることを意味する.

条件 2) は、確率 1 で富くじ s が実現するという不確実性は富くじ s そのものであることを意味する. 条件 3), 4) は、一次結合の演算について交換法則と分配法則が成立することを意味する.

注 2.2: 条件 2), 3) のもとでは、条件 4) は次の条件と同値である.

4') 任意の $s, t \in S, 0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \lambda \leq 1, 0 \leq \kappa \leq 1$ について,

$$\begin{aligned} & \lambda[\theta s + (1-\theta)t] + (1-\lambda)[\kappa s + (1-\kappa)t] \\ &= [\lambda\theta + (1-\lambda)\kappa]s + [\lambda(1-\theta) + (1-\lambda)(1-\kappa)]t \end{aligned}$$

が成立する.

経済主体としてある個人を想定し、その個人は富くじに関して選好を持っているとする. つまり、個人は自己の基準に従って富くじに順序を付けている. その順序 (ordering) を記号 $\succeq$ で表し、それは富くじの集合 S の上で定義されたある二項関係 (binary relation), 即ち、 $\succeq \subset S \times S$ であるとする. 表記方法として、二つの富くじ $s, t \in S$ について、 $(s, t) \in \succeq$ であるとき、 $s \succeq t$ と書くこととし、更に「富くじ s は富くじ t より選好されるか、又は無差別である」という個人の選好を表すとする. 又、もし $r \succeq s$ 且つ $s \succeq t$ ならば、 $r \succeq t$ と書くことにする.

次に二項関係 $\succeq$ に対応して 2 つの二項関係 $>, \sim$ をそれぞれ以下のように定義する.

定義 2.3:

1) $s \succeq t, \text{not } t \succeq s$ であることを $s \succ t$ と表記する.

2) $s \succeq t, t \succeq s$ であることを $s \sim t$ と表記する.

また, $s \succ t$ は「富くじ s は富くじ t より選好される」, $s \sim t$ は「富くじ s と富くじ t は無差別である」と解釈される.

個人の富くじに関する順序 $\succeq$ がいかなる条件を満たすならば, その順序を数値化することが可能であるかが問題となる. 順序 $\succeq$ に以下の性質を仮定する.

仮定 2.4: 順序 $\succeq$ は反射的, 完備的, 推移的である. 即ち, $s, t, r \in S$ のとき以下のことが成立する.

1) $s \succeq s$ が成立する.

2) もし $s \neq t$ ならば, $s \succeq t$ 又は $t \succeq s$ が成立する.

3) もし $r \succeq s$ & $s \succeq t$ ならば, $r \succeq t$ が成立する.

公理 2.5: もし $s \sim s'$ ならば, 任意の $t \in S$ と $0 \leq \theta \leq 1$ について

$$\theta s + (1-\theta)t \sim \theta s' + (1-\theta)t$$

が成立する.

公理 2.6: $r \succ t, 0 \leq \theta \leq 1, 0 \leq \lambda \leq 1$ とする. このとき

$$\theta r + (1-\theta)t \succ \lambda r + (1-\lambda)t$$

であるための必要十分条件は $\theta > \lambda$ である.

公理 2.7: もし $r \succeq s \succeq t$ ならば, $0 \leq \theta \leq 1$ なる適当な数 θ について $s \sim \theta r + (1-\theta)t$ が成立する.

$r \succ t$ なる任意の二要素 r, t について, 集合 S_{rt} を

$$S_{rt} := \{s \in S | r \succeq s \succeq t\}$$

と定義する.

補題 2.8: 任意の $s \in S_{rt}$ について, $0 \leq \theta \leq 1$ であり,

$$s \sim \theta r + [1-\theta]t$$

となる数 θ が唯一つ存在する.

証明：上記の性質をもつ数 θ の存在は公理 2.7 より明らかである。又、その一意性は公理 2.6 による。■

定義 2.9：補題 2.8 における数 θ を、 $\theta_{rt}(s)$ と表記すると、二要素 $r, t \in S$ に存在して、 S_{rt} 上の実数値関数

$$s \rightarrow \theta_{rt}(s)$$

が定義される。

補題 2.10： $s, s' \in S_{rt}$ とする。このとき

$$\theta_{rt}(s) > \theta_{rt}(s')$$

であるための必要十分条件は $s > s'$ である。

証明：公理 2.6 より明らかである。■

補題 2.11：もし $s, s' \in S_{rt}, 0 \leq \lambda \leq 1$ ならば

$$\theta_{rt}(\lambda s + [1-\lambda]s') = \lambda \theta_{rt}(s) + [1-\lambda] \theta_{rt}(s')$$

が成立する。

証明：補題 2.8 および関数 $\theta_{rt}(\cdot)$ の定義より

$$s \sim \theta_{rt}(s)r + [1-\theta_{rt}(s)]t,$$

$$s' \sim \theta_{rt}(s')r + [1-\theta_{rt}(s')]t$$

となる。したがって、公理 2.5 を二度適用すると

$$\begin{aligned} \lambda s + [1-\lambda]s' &\sim \lambda[\theta_{rt}(s)r + [1-\theta_{rt}(s)]t] + [1-\lambda][\theta_{rt}(s')r + [1-\theta_{rt}(s')]t] \\ &= [\lambda\theta_{rt}(s) + [1-\lambda]\theta_{rt}(s')]r + [1-\lambda\theta_{rt}(s) - [1-\lambda]\theta_{rt}(s')]t \end{aligned}$$

を得る。最後の等式は注 2.2 による。これは、補題 2.10 により

$$\theta_{rt}(\lambda s + [1-\lambda]s') = \lambda \theta_{rt}(s) + [1-\lambda] \theta_{rt}(s')$$

であることを意味する。■

定義 2.12：二要素 $a, b \in S$ について、 $a > b$ であるとする。二要素 $r, t \in S_{rt}$ となるように選ぶとき、 S_{rt} 上の実数値関数 M_{rt} を

$$M_{rt}(s) = \frac{\theta_{rt}(s) - \theta_{rt}(b)}{\theta_{rt}(a) - \theta_{rt}(b)}.$$

と定義する.

補題 2.13: 関数値 $M_{rt}(s)$ は要素 r, t には依存しない. 即ち, $a, b \in S_{rt}$, $a, b \in S_{r't'}$ なるように r, t, r', t' を選ぶならば,

$$M_{rt}(s) = M_{r't'}(s) \quad (\forall s \in S_{rt} \cap S_{r't'})$$

が成立する.

証明: 二要素 r, t が $a, b \in S_{rt}$ となるように選ばれたとする. このとき, 任意の $s \in S_{rt}$ について, 関数値 $M_{rt}(s)$ が要素 a, b, s にだけ依存することを示せばよい.

1) $s \in S_{ab}$ の場合

定義 2.9 より, 次のことが成立している.

$$s \sim \theta_{ab}(s)a + [1 - \theta_{ab}(s)]b$$

従って, 補題 2.10 と 2.11 より

$$\begin{aligned} \theta_{rt}(s) &= \theta_{rt}(\theta_{ab}(s)a + [1 - \theta_{ab}(s)]b) \\ &= \theta_{ab}(s)\theta_{rt}(a) + [1 - \theta_{ab}(s)]\theta_{rt}(b) \end{aligned}$$

を得る. この式を変形すると

$$\theta_{ab}(s) = \frac{\theta_{rt}(s) - \theta_{rt}(b)}{\theta_{rt}(a) - \theta_{rt}(b)}$$

即ち, $M_{rt}(s) = \theta_{ab}(s)$ となる.

2) $s \succeq a$ の場合

$a \in S_{ab}$ であるから, 定義 2.9 より, 次のことが成立する.

$$a \sim \theta_{ab}(a)s + [1 - \theta_{ab}(a)]b$$

但し, $a \succ b$ であるから, $\theta_{ab}(a) \neq 0$ であることに注意する. 補題 2.10 と 2.11 より

$$\begin{aligned} \theta_{rt}(a) &= \theta_{rt}(\theta_{ab}(a)s + [1 - \theta_{ab}(a)]b) \\ &= \theta_{ab}(a)\theta_{rt}(s) + [1 - \theta_{ab}(a)]\theta_{rt}(b) \end{aligned}$$

を得る. この式を変形すると

$$\frac{1}{\theta_{sb}(a)} = \frac{\theta_{rt}(s) - \theta_{rt}(b)}{\theta_{rt}(a) - \theta_{rt}(b)}$$

すなわち, $M_{rt}(s) = 1/\theta_{sb}(a)$ となる.

3) $b \succeq s$ の場合

$b \in S_{as}$ であるから, 定義 2.9 より, 次のことが成立する.

$$b \sim \theta_{as}(b)a + [1 - \theta_{as}(b)]s$$

但し, $a > b$ であるから, $\theta_{as}(b) \neq 1$ であることに注意する. 補題 2.10 と 2.11 より

$$\begin{aligned}\theta_{rt}(b) &= \theta_{rt}(\theta_{as}(b)a + [1 - \theta_{as}(b)]s) \\ &= \theta_{as}(b)\theta_{rt}(a) + [1 - \theta_{as}(b)]\theta_{rt}(s)\end{aligned}$$

を得る. この式を変形すると

$$\frac{-\theta_{as}(b)}{1 - \theta_{as}(b)} = \frac{\theta_{rt}(s) - \theta_{rt}(b)}{\theta_{rt}(a) - \theta_{rt}(b)}$$

すなわち, $M_{rt}(s) = -\theta_{sb}(a)/(1 - \theta_{sb}(a))$ となる.

故に, いずれの場合にも関数値 $M_{rt}(s)$ は要素 r, t から独立であることが示された.

以上の補題を用いて, 富くじの効用関数が存在することが証明される.

定義 2.14: 関数 $U: S \rightarrow R$ が順序保存的 (order-preserving) であるとは, $s \succeq s'$ ならば $U(s) \geq U(s')$ であり, 又その逆も成立することを意味する.

定義 2.15: 関数 $U: S \rightarrow R$ が線型 (liner) であることは, 任意の $s, s' \in S$, $0 \leq \lambda \leq 1$ について

$$U(\lambda s + [1 - \lambda]s') = \lambda U(s) + [1 - \lambda]U(s')$$

が成立することを意味する.

命題 2.16 [I. N. Herstein & J. Milnor (1953)]: 集合 S 上の順序保存的な線型の実数値関数が存在する.

証明: 集合 S 上に関数 $U: S \rightarrow R$ を定義する.

集合 S の中に $a > b$ なる二要素 a, b が存在しない場合は、任意の $s \in S$ について $U(s) = 0$ と定義する。この場合、明らかに関数 U は順序保存的で線型である。

$a > b$ なる二要素 a, b が存在する場合は関数 U を次のように定義する。各 $s \in S$ について集合 S の二要素 r, t を $s, a, b \in S_{rt}$ となるように選ぶ。必要ならば、 r は s 又は a と等しく選び、また t は s 又は b と等しく選び、このことは常に可能である。従って、補題 2.13 により、

$$U(s) = M_{rt}(s)$$

と定義することができる。

次に、この様に定義された関数 U が順序保存的で、また線型であることを示す。任意の二要素 s, s' について、二要素 r, t を $s, s', a, b \in S_{rt}$ となるように選ぶ。関数 U の定義より

$$U(s) = \frac{\theta_{rt}(s) - \theta_{rt}(b)}{\theta_{rt}(a) - \theta_{rt}(b)}, \quad U(s') = \frac{\theta_{rt}(s') - \theta_{rt}(b)}{\theta_{rt}(a) - \theta_{rt}(b)}$$

となる。上の二式における関数 θ_{rt} の性質により、補題 2.10 より、もし $s \geq s'$ ならば $U(s) \geq U(s')$ となり、更に補題 2.11 より、任意の $0 \leq \lambda \leq 1$ について

$$U(\lambda s + [1 - \lambda]s') = \lambda U(s) + [1 - \lambda]U(s')$$

が成立することが容易に確かめられる。■

命題 2.17: 集合 S 上で定義される順序保存的で線型な関数は、一次変換を除いて一意的に存在する。即ち、 $U: S \rightarrow R$ と $V: S \rightarrow R$ を順序保存的で線型な関数とすると、ある数 $\alpha > 0, \beta$ が存在して

$$V = \alpha U + \beta$$

が成立する。

証明: 集合 S の中に $a > b$ なる二要素 a, b が存在しない場合は、関数 U, V は共に一定の値をとる関数であるから、 $\alpha = 1, \beta = V(s) - U(s)$ (但し、

$s \in S$) とすればよい.

次に, $a > b$ なる二要素 a, b が存在する場合は

$$\alpha = \frac{U(a) - U(b)}{V(a) - V(b)}, \quad \beta = -\alpha V(b) + U(b)$$

とする. このとき, 任意の $s \in S$ について, $U(s) = \alpha V(s) + \beta$ であることを示す.

1) $s \in S_{ab}$ の場合

公理 2.7 より, $s \sim \theta a + [1 - \theta]b$ なる数 θ が存在する. 関数 U, V は順序保存的で線型であるから

$$U(s) = \theta U(a) + [1 - \theta]U(b),$$

$$V(s) = \theta V(a) + [1 - \theta]V(b)$$

が成立する. これらの式より

$$\theta = \frac{U(s) - U(b)}{U(a) - U(b)} = \frac{V(s) - V(b)}{V(a) - V(b)}$$

を得る. これより $U(s) = \alpha V(s) + \beta$ が成立することを確かめることが出来る.

2) $s \succeq a$ の場合

公理 2.7 より, $a \sim \theta s + [1 - \theta]b$ なる数 θ が存在する. 関数 U, V は順序保存的で線型であるから

$$U(a) = \theta U(s) + [1 - \theta]U(b),$$

$$V(a) = \theta V(s) + [1 - \theta]V(b)$$

が成立する. これらの式より

$$\frac{1}{\theta} = \frac{U(s) - U(b)}{U(a) - U(b)} = \frac{V(s) - V(b)}{V(a) - V(b)}$$

を得る. 同様にして, これより $U(s) = \alpha V(s) + \beta$ を得る.

3) $b \succeq s$ の場合

公理 2.7 より, $b \sim \theta a + [1-\theta]s$ なる数 θ が存在する. 関数 U, V は順序保存的で線型であるから

$$U(b) = \theta U(a) + [1-\theta]U(s),$$

$$V(b) = \theta V(a) + [1-\theta]V(s)$$

が成立する. これらの式より

$$\frac{-\theta}{1-\theta} = \frac{U(s)-U(b)}{U(a)-U(b)} = \frac{V(s)-V(b)}{V(a)-V(b)}$$

を得る. 同様にして, これより $U(s) = \alpha V(s) + \beta$ を得る. ■

命題 2.16 において存在が主張されている関数 U は富くじの効用関数であることは言うまでもない. 即ち, 関数 U は順序保存的であり, 富くじの順序を实数の大小に対応させている. 更に関数 U が線型であることは, 命題 2.17 に示されるように, 単調一次変換以外の変換を許容しない. このことは関数 U の表す富くじの効用は単にその大小だけが問題なのではなく, 効用の数値そのものが意味を持つことになる.

例えば, 富くじ s, s', r, r' において

$$U(s) - U(s') > U(r) - U(r')$$

であるとする. 即ち, 富くじ s と s' の効用の差は富くじ r と r' の効用の差より大であるとする. 他の効用関数 V は効用関数 U の単調一次変換であり, $V = \alpha U + \beta$ ($\alpha > 0$) と表されるから,

$$V(s) - V(s') = \alpha(U(s) - U(s'))$$

$$> \alpha(U(r) - U(r'))$$

$$= V(r) - V(r')$$

となる. つまり, 効用差の大小は単調一次変換に関して不変である. このように富くじの効用は一つの基数的性質を持ち, この意味において富くじの効用は可測的 (measurable) であると言われる.

§3 期待効用仮説

この節では不確実性をより明示的に取扱い不確実性が存在する状況に関する個人の順序付けは期待効用によって表現されることを証明する。

実現する可能性のあるすべての結果 (consequence) の集合を X で表し、数学的構造として集合 X は可分距離空間であることを仮定する。空間 X のすべてのボレル集合からなる集合系を $\mathcal{B}(X)$ で表す。各ボレル集合 $B \in \mathcal{B}(X)$ は事象 (event) と呼ばれる。可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上で定義されるすべての確率測度の集合を $\mathcal{M}(X)$ で表す。各測度 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ は集合 X 内の結果の実現可能性に関する不確実性を表現しており、富くじと解釈される。また、集合 $\mathcal{M}(X)$ には弱位相が与えられているとする。

経済主体として個人を考え、その個人の富くじに関する選好を表す順序を $\succeq$ とする。即ち、 $\succeq \subset \mathcal{M}(X) \times \mathcal{M}(X)$ である。順序 $\succeq$ に対応して、二つの二項関係 $>, \sim$ を定義 2.3 と同様に定義する。

仮定 3.1: 順序 $\succeq$ は前節の仮定 2.4 に相当する条件を満たす。即ち、順序 $\succeq$ は反射的、完備的、推移的である。

仮定 3.2: 順序 $\succeq$ は連続 (continuous) であるとする。すなわち、任意の $\nu \in \mathcal{M}(X)$ について、二つの集合

$$\{\mu \in \mathcal{M}(X) | \mu \succeq \nu\}, \{\mu \in \mathcal{M}(X) | \nu \succeq \mu\}$$

は閉集合である。

定義 3.3: 関数 $U: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ が順序 $\succeq$ に関して順序保存的であるとは、 $\mu \succeq \nu$ ならば $U(\mu) \geq U(\nu)$ であり、又もその逆も成立することを意味する。

命題 3.4: 仮定 3.1, 3.2 のもとでは順序 $\succeq$ に関して順序保存的な連続関数 $V: \mathcal{M}(X) \rightarrow \mathbb{R}$ が存在する。

証明: 空間 X は可分な距離空間であるから、空間 $\mathcal{M}(X)$ も可分な距

離空間である (数学注, 定理 6.6). 可分な距離空間は開集合の可算基を持つことが知られている. 又, G. Debreu (1964, Prop. 3, p. 291) の命題によると, 可算基を持つ位相空間において, 任意の反射的, 完備的, 推移的, 且つ連続な順序に関して順序保存的な連続関数が存在する. 従って, 所望の関数 $V: \mathcal{M}(X) \rightarrow R$ が存在する. ■

集合 $\mathcal{M}(X)$ は前節の富くじの集合 S に対応する. 実際, 二つの富くじの一次結合を以下の様に定義すると, 集合 $\mathcal{M}(X)$ は仮定 2.1 に相当する条件を満たすことを容易に示すことが出来る.

定義 3.5: 二つの富くじ $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X)$ と $0 \leq t \leq 1$ なる数 t について, $t\mu + (1-t)\nu$ と表記される富くじを次のように定義する. 即ち, 任意の $B \in \mathcal{B}(X)$ について

$$(t\mu + (1-t)\nu)(B) = t\mu(B) + (1-t)\nu(B)$$

となる測度であるとする.

補題 3.6: $\mu \succeq \nu$ とする. このとき $[0, 1]$ から $\mathcal{M}(X)$ への写像

$$t \rightarrow t\mu + (1-t)\nu$$

は連続である.

証明: $t_n \rightarrow t_0$ のとき, $t_n\mu + (1-t_n)\nu$ が $t_0\mu + (1-t_0)\nu$ に弱収束することを示せばよい. 実際, 任意のボレル集合 $B \in \mathcal{B}(X)$ について, 明らかに

$$\lim_n (t_n\mu(B) + (1-t_n)\nu(B)) = (t_0\mu(B) + (1-t_0)\nu(B))$$

が成立する. このことは, 数学注, 定理 6.5 より, $t_n\mu + (1-t_n)\nu$ は $t_0\mu + (1-t_0)\nu$ に弱収束することを意味する. ■

定義 3.7: $\beta \succeq \alpha$ であるとき, 集合 $[\alpha; \beta]$ を

$$[\alpha; \beta] := \{\mu \in \mathcal{M}(X) \mid \beta \succeq \mu \succeq \alpha\}$$

と定義する.

補題 3.8: もし $\mu \in [\alpha; \beta]$ ならば, 適当な数 $t \in [0, 1]$ のもとで $\mu \sim t\beta + (1-t)\alpha$ となる.

証明: $\mu \succeq \alpha = 0\beta + 1\alpha$ 且つ $1\beta + 0\alpha = \beta \succeq \mu$ であるから, 補題 3.6 と仮定 3.2 より, 所望の数 t が存在することは明らかである. ■

仮定 3.9: もし $\mu_1 \sim \mu_2$ ならば, 任意の $\nu \in \mathcal{M}(X)$ と $0 \leq t \leq 1$ について

$$t\mu_1 + (1-t)\nu \sim t\mu_2 + (1-t)\nu$$

が成立する.

補題 3.10: もし $\mu > \nu$ 且つ $0 < t < 1$ ならば,

$$\mu > t\mu + (1-t)\nu > \nu$$

が成立する.

証明: もし仮に $t_0\mu + (1-t_0)\nu \succeq \mu$ 且つ $0 < t_0 < 1$ となるような数 t_0 が存在するとしよう. $\mu > \nu = 0\mu + 1\nu$ であるから, 補題 3.6 と仮定 3.2 より, $0 < s \leq t_0$ なる数 s について

$$s\mu + (1-s)\nu \sim \mu$$

が成立する. 従って, 仮定 3.9 により,

$$s[s\mu + (1-s)\nu] + (1-s)\nu = s^2\mu + (1-s^2)\nu \sim \mu$$

となる. 同様に仮定 3.9 を繰返し適用することにより, 任意の自然数 n について

$$s^n\mu + (1-s^n)\nu \sim \mu$$

となる. 従って補題 3.6 と仮定 3.2 より, $n \rightarrow \infty$ とすると, $\nu \sim \mu$ となる.

これは, 仮定 $\mu > \nu$ に矛盾する. 即ち, $0 < t < 1$ なる任意の数 t について $\mu > t\mu + (1-t)\nu$ が成立する. 同様にして, $t\mu + (1-t)\nu > \nu$ が成立することが証明される. ■

補題 3.11: もし $\mu > \nu$ ならば, $s > t$ であることは

$$s\mu + (1-s)\nu > t\mu + (1-t)\nu$$

となるための必要十分条件である.

証明: $s > t$ と仮定する. 補題 3.10 より, $s\mu + (1-s)\nu > \nu$ が成立する. 従って, $t/s < 1$ であるから, 再び補題 3.10 により

$$s\mu + (1-s)\nu > (t/s)[s\mu + (1-s)\nu] + (1-t/s)\nu = t\mu + (1-t)\nu$$

となる。

逆に, $s\mu + (1-s)\nu > t\mu + (1-t)\nu$ と仮定する。明らかに $s \neq t$ である。仮に $s < t$ であるとする, 証明の前半から

$$t\mu + (1-t)\nu > s\mu + (1-s)\nu$$

となる。これは矛盾である。故に, $s > t$ である。■

定義 3.12: 関数 $U: \mathcal{M}(X) \rightarrow R$ が線型 (linear) であるとは, 任意の $\mu, \nu \in \mathcal{M}(X), 0 \leq t \leq 1$ について

$$U(t\mu + [1-t]\nu) = tU(\mu) + [1-t]U(\nu)$$

が成立することを意味する。

命題 3.13 [J. M. Grandmont (1972)]: 仮定 3.1, 3.2, 3.9 のもとで, 順序 $\succeq$ について順序保存的な線型の連続な関数 $U: \mathcal{M}(X) \rightarrow R$ が存在する。

証明: 仮定 3.1, 3.9 と補題 3.8, 3.11 により, 前節で命題 2.16 の前提がすべて満たされていることが分かる。従って, 順序 $\succeq$ について順序保存的な線型の関数 $U: \mathcal{M}(X) \rightarrow R$ が存在する。故に, 関数 U の連続性だけを証明すればよいことになる。

連続性の証明は空間 $\mathcal{M}(X)$ が距離空間であること (数学注, 定理 6.6) から点列を使うことが出来る。点列 $\{\mu_n\}_{n=1,2,\dots}$ が μ_0 に収束するとしよう。仮定 3.2 により, 2 点 α, β を適当に選ぶと, $[\alpha, \beta]$ が μ_0 の近傍となる。また, $\alpha > \beta$ となるように選ぶとする。もしその様に選ぶことが出来ないときは, 関数 U は一定の値を取る関数であり, それは明らかに連続である。一般性を失うことなく, 各 n について $\mu_n \in [\alpha, \beta]$ であると仮定することが出来る。補題 3.8 によると, 各 n について, $\mu_n \sim t_n\alpha + (1-t_n)\beta$ となるような数 t_n が存在する。従って, 命題 3.4 により,

$$\lim_n V(t_n\alpha + (1-t_n)\beta) = \lim_n V(\mu_n)$$

$$= V(\mu_0)$$

となる。故に、点列 t_n の集積点の一つを t_0 とすると、補題 3.6 を考慮すれば、 $V(t_0\alpha + (1-t_0)\beta) = V(\mu_0)$ である。即ち、 $\mu_0 \sim t_0\alpha + (1-t_0)\beta$ であり、従って

$$\begin{aligned} U(\mu_0) &= U(t_0\alpha + (1-t_0)\beta) \\ &= t_0U(\alpha) + (1-t_0)U(\beta) \end{aligned}$$

を得る。このことは、 $U(\alpha) \neq U(\beta)$ であることを考慮すれば、集積点 t_0 は一意的であることを意味する。即ち、点列 t_n は t_0 に収束しなければならない。従って

$$\begin{aligned} \lim_n U(\mu_n) &= \lim_n U(t_n\alpha + (1-t_n)\beta) \\ &= \lim_n [t_nU(\alpha) + (1-t_n)U(\beta)] \\ &= t_0U(\alpha) + (1-t_0)U(\beta) \\ &= U(\mu_0) \end{aligned}$$

を得る。故に、関数 U は連続であることが証明された。■

補題 3.14: もし関数 $U: \mathcal{M}(X) \rightarrow R$ が線型で且つ連続であるならば、有界である。

証明: もし仮に有界でないとすると、 $\mathcal{M}(X)$ から点列 $(\mu_n)_{n=1,2,\dots}$ を適当に選び、 n につき $U(\mu_n) > 2^n$ となるようにすることが出来る。ここで各 n につき、測度 ν_n を

$$\nu_n = \sum_{k=1}^n (2^{-k} / \sum_{j=1}^n 2^{-j}) \mu_k$$

と定義する。また測度 ν_0 を

$$\nu_0 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} \mu_k$$

と定義する。数学注、定理 6.5 によって、 ν_n は ν_0 に収束することが容易に証明することが出来る。従って、関数 U が線型、連続であることから

$$U(\nu_0) = \lim_n U(\nu_n)$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_n \sum_{k=1}^n (2^{-k} / \sum_{j=1}^n 2^{-j}) U(\mu_k) \\
 &> \lim_n \sum_{k=1}^n (1 / \sum_{j=1}^n 2^{-j}) \\
 &= +\infty
 \end{aligned}$$

となる。これは矛盾である。■

記号 δ_x で、点 $x \in X$ に退化 (degenerate) した測度、即ち

$$\delta_x(\{x\}) = 1$$

となるような測度を表とすると、富くじに関する順序付けから結果に関する順序 $\succeq_0$ を以下のように導出することが出来る。

$$\succeq_0 = \{(x, y) \in X \times X \mid \delta_x \succeq \delta_y\}$$

これは確率 1 で結果 x が実現する富くじ δ_x を結果 x そのものと同一視する順序付けである。個人が結果について順序付けをしているとすれば富くじの順序付けとこのような整合性を持たなければならない。

命題 3.15 [J. M. Grandmont (1972)]: 仮定 3.1, 3.2, 3.9 のもとで、集合 X 上で定義された有界連続関数 $u: X \rightarrow R$ が存在し、以下の性質を持つ。

- 1) 関数 u は $\succeq_0$ について順序保存的である。即ち、 $x \succeq_0 y$ ならば、 $u(x) \geq u(y)$ であり、又その逆も成立する。
- 2) 関数 $U: \mathcal{M}(X) \rightarrow R$ を、各 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ について

$$U(\mu) = \int_X u d\mu$$

と定義すると、関数 U は $\succeq$ について順序保存的である。

証明: 命題 3.13 と補題 3.14 より、 $\succeq$ について順序保存的な線型連続有界関数 $U: \mathcal{M}(X) \rightarrow R$ が存在する。関数 $u: X \rightarrow R$ を、各 $x \in X$ について $u(x) = U(\delta_x)$ と定義する。関数 U は連続であり、写像 $x \in X \rightarrow \delta_x \in \mathcal{M}(X)$ は連続であるから (数学注, 定理 6.8), 関数 u も連続である。関数 u の有界性は関数 U の有界性より明らかである。又、関数 U は $\succeq$ について順序保存的であるから、 $\succeq_0$ の定義により関数 u は $\succeq_0$ について

順序保存的である。即ち、この命題の条件 1) が証明された。従って、残りの条件 2) が成立することを示せばよい。

ケース 1): 測度 μ が有限サポートを持つとする。即ち、 $\text{supp } \mu = \{x_1, \dots, x_n\}$ とすると、

$$\mu = \sum_{i=1}^n p_i \delta_{x_i}$$

となる。但し、 $p_i = \mu(\{x_i\})$ ($i=1, \dots, n$) である。従って、関数 U の線型性により、

$$\begin{aligned} U(\mu) &= \sum_{i=1}^n p_i U(\delta_{x_i}) \\ &= \sum_{i=1}^n p_i u(x_i) \\ &= \int_X u d\mu \end{aligned}$$

となる。故に、この場合は条件 2) が成立している。

ケース 2): 測度 μ は任意のものとする。有限サポートの測度の集合は弱位相のもとで空間 $\mathcal{M}(X)$ において稠密であるから (数学注, 定理 6.7) 各測度 μ_n は有限サポートを持つような点列 $\{\mu_n\}_{n=1,2,\dots}$ で測度 μ に収束するものが存在する。関数 U が連続であることとケース 1) により、

$$\begin{aligned} U(\mu) &= \lim_n U(\mu_n) \\ &= \lim_n \int_X u d\mu_n \end{aligned}$$

を得る。又、関数 u が有界連続であるから、写像

$$\nu \in \mathcal{M}(X) \rightarrow \int_X u d\nu \in \mathbb{R}$$

は連続である (数学注, 注 6.4)。従って、

$$\lim_n \int_X u d\mu_n = \int_X u d\mu$$

となる。上記の二式より、この場合も条件 2) が成立する。■

この命題でその存在が証明された関数 u は、ノイマン・モルゲンシュテルン効用関数と呼ばれる。この命題は、不確実な状況を表す確率測度 μ 、即ち、富くじ μ の効用 $U(\mu)$ は、各結果 $x \in X$ の効用 $u(x)$ の測度

μ に関する期待値に等しいことを主張している。従って、個人は不確実性下では結果の効用の期待値に注目し、それを最大にするように行動するということになる。これが所謂、「期待効用仮説」の主張である。

第二章 一時的均衡の理論

一般均衡理論に不確実性を導入した理論に所謂「一時的均衡の理論」なるものがある。その理論における顕著な特長は期待を外生的なものとして取扱っていることである。経済主体は経済の状態を観察することから何らかの予想を持ち、その予想に基づいて行動する。予想は経済の状態に依存し、経済の状態が変われば予想は変化する。然しながら、予想形成の仕方は不変であり、その意味において期待は一定であり外生的なものである。このような所与の期待を各経済主体が持つときの市場均衡を説明するのが一時的均衡の理論である。

一時的均衡の理論的体系は確立された一般均衡モデルに不確実性が組込まれたものである。先物市場における投機や貨幣の存在を説明するのに極めて有用な分析手法である。基礎的な分析は、D. Sondermann (1971), J. M. Grandmont (1971), J. R. Green (1973) 等によってなされている。又この分野の包括的な展望論文としては J. M. Grandmont (1977) がある。

§1 一時的均衡

静態的競争均衡の概念をより一般化し、将来に関する不確実性を組込んだ市場均衡として、**一時的均衡** (temporary equilibrium) と呼ばれる概念がある。経済主体は単に現在の状態だけを問題とするのではなく、将来のことも考慮しながら行動する。従って、現在の行動の決定は現在の状況だけに依存するのではなく、現在の状況に基づいてなされる将来の状況に関

する予想にも依存する。例えば、消費者が市場で財を需要あるいは供給するとき、現在の市場における財の価格だけを考慮するのではなく、現在の価格から将来の価格を予想し、将来の市場の状況を予測しながら現在の市場で行動すると考えられる。一時的均衡とは、経済主体がこの様に行動するときの経済における市場均衡である。この節では、単純化された経済において一時的均衡の概念を明らかにする。

経済には一種類の消費財と貨幣が存在し、消費財は非耐久財で次期に持越すことが出来ないとする。経済主体としては消費者だけが存在するとする。代表的消費者は以下の様に行動する。消費者が考慮する期間は二つあり、それらを「今期」と「来期」と呼ぶことにする。「今期」を数字1、「来期」を数字2で表す。消費者の財の初期保有量を

$$e = (e_1, e_2, m_1)$$

とする。 e_1 は今期の期首に所有している消費財の量であり、 e_2 は来期の期首に所有する消費財の量を表し、それは今期において既知であると仮定する。 m_1 は今期の期首に所有している貨幣の量とする。

消費者の効用は今期における消費財の消費量 x_1 と来期における消費財の消費量 x_2 に依存し、効用関数

$$u = U(x_1, x_2)$$

で与えられるとする。

経済には二つの市場が存在するとする。一つは消費財を直接に売買する市場、即ち消費財の直物市場である。もう一つは来期における消費財の売買契約を予め結ぶための市場、即ち先物市場である。消費財は非耐久財であると仮定しており、今期の消費財を来期に持越すことは出来ないが、貨幣と先物市場は今期と来期を結びつける働きをする。例えば、もし消費者が今期の消費を控えて来期の消費を増やしたいと思うならば、今期の財の初期保有の一部を直物市場で売り、得た所得で先物市場で来期の財の所有

権を買ったり、単に貨幣で来期に持越すことが出来る。逆に、今期の消費を増やして来期の消費を減らしたいと思うならば、来期に持越す貨幣量を減らしたり、先物市場で来期の財の所有権を売り、直物市場において消費財を買うことが出来る。又、先物市場では消費者は投機をすることが出来る。消費財の来期の価格は不確実であるから、今期の先物市場での消費財の価格より来期の価格の方が高くなると思う消費者は来期の消費財の所有権を買うであろうし、安くなると思う消費者は来期の消費財の所有権を売るであろう。

消費者の市場における行動を

$$z = (x_1, b, m_2)$$

で表す。 x_1 は消費者の今期の消費財の消費量、 b は来期の消費財の所有権に対するネットの需要量、 m_2 は来期へ持越す貨幣量を表す。消費財の直物価格を p_1 、先物価格を q とすると、貨幣の価格は1であるから、価格体系 p は

$$p = (p_1, q, 1)$$

となる。このとき消費者の行動 z は

$$(1) \quad p_1 x_1 + q b + m_2 = p_1 e_1 + m_1$$

なる予算制約式を満たさなければならない。もし仮に消費者に今期の行動が z であり、来期における消費財の価格が p_2 になったとする。この場合来期の消費財の初期保有量は $e_2 + b$ となるから、来期の予算制約式は

$$(2) \quad p_2 x_2 = p_2 (e_2 + b) + m_2$$

となる。今期の消費財の消費量 x_1 は既に決まっているから、消費者は来期においては消費財の消費量 x_2 を決めることになる。従って、消費者は効用 $U(x_1, x_2)$ が最大になる様に(2)の予算制約のもとで来期の消費量 x_2 を決定する。そのとき得られる効用の最大値は今期の消費者の行動 z と来期の消費財の価格 p_2 の関数になる。それを

$$v(z, p_2)$$

で表わすことにする。

今期においては、来期の消費財の価格 p_2 は不確実である。消費者は今期の価格体系 p から来期の消費財の価格 p_2 を予想すると仮定しよう。今期の価格体系が p である時来期の価格が p_2 になる確率（密度）を

$$f(p, p_2)$$

とする。つまり、今期の価格体系が p である時の来期の価格 p_2 に関する消費者の予想が確率密度関数 $f(p, \cdot)$ で与えられることになる。消費者の今期の行動が z であり来期の価格が p_2 である時得られる最大の効用が $v(p, p_2)$ であるから、消費者の今期の行動が z であり今期の価格体系が p である時の期待効用は

$$V(z, p) = \int v(z, p_2) f(p, p_2) dp_2$$

となる。消費者はこの期待効用が最大になる様に今期の価格体系 p が与えられたときの予算制約(1)のもとで行動 z を決定する。従って、消費者の行動 z は価格体系 p の関数となり、それを

$$z = D(p)$$

で表すことにする。この関数は直物市場と先物市場における需要と貨幣の需要を表す。この需要関数によって消費者の今期の直物市場と先物市場における行動がすべて表現されている。

予算制約式(1)は価格体系 p の比例的变化に関しては実質的变化はないから、需要関数は0次同次である。即ち、任意の価格体系 p と正数 λ について

$$(3) \quad D(p) = D(\lambda p)$$

が成立する。更に、消費者の行動 z は予算制約式(1)を満たさなければならないから、任意の価格体系 p について

$$(4) \quad p \cdot D(p) = p_1 e_1 + m_1$$

が成立する。

上述の様な行動様式をとる消費者が経済に多数存在するとする。第 i 番目の消費者の需要関数を $D^i(p)$ 、消費財および貨幣の初期保有量を $e^i = (e_1^i, e_2^i, m_1^i)$ とする。直物市場と先物市場における超過需要を表す総超過需要関数を $\zeta(p)$ とすると、それは

$$\zeta(p) = \sum_i [D^i(p) - (e_1^i, 0, m_1^i)]$$

で定義される。この総超過需要関数によって両市場の状態が表現されている。明らかに、両市場を均衡状態にする価格体系は $\zeta(p) = 0$ を満たすベクトル p である。その価格体系のもとで実現する状態を一時的均衡と呼ぶ。

総超過需要関数の性質として、各消費費者の需要関数が(3)と(4)の性質を持つことから、任意の価格体系 p と正数 λ について

$$\zeta(p) = \zeta(\lambda p),$$

$$p \cdot \zeta(p) = 0$$

が成立する。即ち、総超過需要関数 $\zeta(p)$ は 0 次同次であり、且つワルラス法則を満たす。従って、議論は従来の一般均衡の存在問題に帰着するのである。故に、総超過需要関数が連続になるような状況においては均衡価格体系が存在することが推論される。

§2 経済主体の行動

この節では、より一般化された経済において経済主体の行動を明らかにする。経済主体としては消費者を考える。経済には l 種類の財があるとする。即ち、財空間を l 次元ユークリッド空間 R^l とする。これらの財には単に普通の財だけではなく、例えば、貨幣、あるいは先物取引も含まれる。消費者はこれらの財の売買を今期行うとする。消費者は過去の結果として当初いくらかの財を所有しており、それらを他の消費者と交換するこ

とを考えている。財の交換において消費者には物理的制約がある。例えば、通常の消費財ならば非負の量でなければならない。先物取引ならば負の量でも意味がある。消費者の財の初期保有量と交換の物理的制約を同時に表現するために、取引集合という概念を用いることにする。消費者の取引集合を $X \subset R^l$ とする。即ち、 R^l の原点 0 は消費者の取引前の初期の状態を表し、集合 X 内の点は取引後消費者が移行可能な状態を表す。

今期の市場の状態を表すパラメーターとして消費者は財の価格だけを考慮するものとする。即ち、市場は競争的であるとする。 l 種類の財の価格は非負のベクトル $p \in R^l$ で表されたとする。財の交換比率だけが意味をもつので、価格を以下に定義される集合 A の範囲に限定することが出来る。

$$A = \{p = (p_1, \dots, p_l) \in R_+^l \mid \sum_{i=1}^l p_i = 1\}$$

市場で成立する価格は消費者にとって二つの理由で重要である。第一に価格体系は財の取引の可能性を規定する。財の価格に対応して今期の取引に使える所得が決定される。消費者の所得は価格の関数であり、非負の値を取るものとする。又、企業からの利潤分配が無限大なることがあるために、一般的には所得は無限大になることも有り得る。消費者の所得関数を

$$\beta: A \rightarrow R_+ \cup \{+\infty\}$$

とする。即ち、各価格 $p \in A$ のもとで消費者の所得は $\beta(p)$ であることを表す。所得 $\beta(p)$ は企業からの利潤も含まれる。消費者は予算制約を満さなければならないから、以下に定義される予算集合の範囲に取引が限定される。

$$B(p) = \{x \in X \mid p \cdot x \leq \beta(p)\}$$

このように定義される価格と予算集合の関係、

$$p \in A \rightarrow B(p) \subset R^l,$$

を**予算対応**と呼ぶことにする。

現在の価格体系が消費者にとって重要である第二の理由は、それから將

来における経済の状態の予想を行うからである。将来実現する可能性があるすべての経済の状態の集合を S とする。各要素 $s \in S$ は、例えば将来の市場における財の価格を表している。ここでは、より一般的に、消費者に影響するであろう将来の経済の状態を表す。消費者は集合 S の中のいかなる状態が実現するかは事前には予測できないが、どのような確率で各状態が実現するかを予測する。即ち、消費者は状態の実現可能性についての確率分布を予測するものとする。数学的には、集合 S は可分な距離空間であり、 $\mathcal{B}(S)$ を集合 S のボレル集合の集合系としたとき、 $\mathcal{B}(S)$ 上で定義される確率測度の集合を $\mathcal{M}(S)$ で表すことにする。消費者の予想は一つの関数

$$\phi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{M}(S)$$

で表現されたとする。これを**予想関数**と呼ぶことにする。現在の市場において財の価格が $p \in \mathcal{A}$ ならば、消費者は将来の経済状態の実現可能性が確率測度 $\phi(p)$ で表されると予想するのである。価格 p が変化すると予想 $\phi(p)$ も変化する。然しながら、予想形成の仕方、即ち、関数 ϕ は不変である。この意味において、将来の状態に関する消費者の期待は固定的であり外性的なものである。

消費者が現在決定しなければならないことは取引集合の中のどの取引を実行するかである。当然、その時の財の価格のもとで予算制約を満すような取引を選ばなければならない。加えて、現在実行する取引は将来実現する経済の状態と両立するものでなくてはならない。例えば、現在の取引において過度な先物取引をすると、将来都合の悪い状態が実現すると消費者は破産に追込まれるかもしれない。このような現在の取引と将来の状態との関連を消費者は考慮しなければならないのである。もし将来の状態が $s \in S$ であるとき、それに対して許容される現在の取引の集合を $A(s) \subset X$ とする。即ち、 $x \in A(s)$ ならば、取引 $x \in X$ と状態 $s \in S$ は許容的な組

合せであることを意味する。このような対応、

$$s \in S \rightarrow A(s) \subset X,$$

許容対応と呼ぶことにする。

もし将来の状態が $s \in S$ ならば、消費者は現在の取引を集合 $A(s)$ の中から選ばなければならない。然しながら消費者には将来の状態は不確実であり事前には知ることは出来ない。従って、自己の予想に基づいて許容的ではない組合せが発生することを避けるように現在の取引を選択するものとする。即ち、現在の市場において価格が $p \in \Delta$ のとき、消費者の予想では確率 1 で許容的な組合せが実現するように、現在の取引を以下で定義される集合 $C(p)$ の範囲から選択しなければならない。

$$C(p) = \{x \in X \mid \forall s \in \text{supp } \phi(p), x \in A(s)\}$$

ここで、 $\text{supp } \phi(p)$ は測度 $\phi(p)$ のサポートを表す。消費者の予想 $\phi(p)$ では将来の状態が $\text{supp } \phi(p)$ の範囲から実現する確率は 1 であり、その範囲のいかなる状態とも許容的になる取引を消費者は選ぶ。この意味において消費者は「確実」に非許容的な事態が発生することを回避する。

上記の各価格 p と許容的な取引の集合 $C(p)$ との関係、

$$p \in \Delta \rightarrow C(p) \subset R^L,$$

を予想許容対応と呼ぶことにする。

現在の取引は消費者の今期の効用に影響する。また現在の取引は将来の行動を規定するという意味において将来の効用に間接的に影響する。また将来の経済の状態は将来の効用に影響する。このように消費者の満足は究極的には現在の取引と将来の状態に依存する。然しながら、将来の状態は不確実である。従って、消費者は将来の状態の実現の仕方、即ち確率分布に関心を持つ。故に、消費者の選好は現在の取引と将来の状態に関する確率分布の組合せについての順序付けである。消費者の順序を $\succeq$ で表すと、 $\succeq$ は集合 $X \times \mathcal{M}(S)$ 上の二項関係である。二つの組合せ $(x, \mu), (x', \mu')$

$\in X \times \mathcal{M}(S)$ について,

$$(x, \mu) \succeq (x', \mu')$$

という表記は, 消費者は (x, μ) を (x', μ') より選好する, 又は無差別であることを意味する.

消費者は市場において財の価格 $p \in \mathcal{A}$ が与えられたとき, 自己の予想 $\phi(p)$ に基づいて, 最も高い満足を得るように取引を選択する. そのとき消費者は予算制約 $B(p)$ と付加的制約 $C(p)$ を同時に満たさなければならない. 従って, 消費が選択可能な取引の範囲 $\alpha(p)$ は

$$\alpha(p) := B(p) \cap C(p)$$

と定義される. このとき, 対応,

$$p \in \mathcal{A} \rightarrow \alpha(p) \subset X$$

を制約対応と呼ぶことにする.

価格体系が $p \in \mathcal{A}$ のとき, 消費者は制約 $\alpha(p)$ の中で最も望ましい取引を選択する. 従って, 消費者が望む取引の集合を $D(p)$ とすると, 次の様に定義される.

$$D(p) := \{x \in \alpha(p) \mid \forall x' \in \alpha(p), (x, \phi(p)) \succeq (x', \phi(p))\}$$

各価格 p と最も高い満足を与える取引の集合 $D(p)$ との関係,

$$p \in \mathcal{A} \rightarrow D(p) \subset R^I,$$

を需要対応と呼ぶことにする.

§3 需要対応の連続性

この節では, 前節において説明された消費者行動が価格体系について連続的になるための条件を明らかにする. 即ち, 適当な仮定のもとで, 消費者の需要関数が価格について連続になることを証明する.

集合 $P \subset \mathcal{A}$ を

$$P := \{p \in \mathcal{A} \mid p > 0, \beta(p) < +\infty\}$$

と定義する. 予想関数 ϕ より, 対応 σ を次のように定義する. 即ち, 各 $p \in P$ について

$$\sigma(p) := \sup \phi(p)$$

とする. 集合 $\mathcal{M}(S)$ には弱収束の位相が与えられているものとする.

仮定 3.1: 予想関数 ϕ について以下のことを仮定する.

- 1) 関数 ϕ は集合 P 上で連続である.
- 2) 対応 σ は集合 P 上で上半連続である.

補題 3.2 [J. Green, (1973, Rmk. 3. 1)]:

対応 σ は連続である.

証明: 仮定 3.1 の条件 2) より, 下半連続性だけを証明すればよい. $s \in \sigma(p)$ とする. 点 p に収束する点列 p_n を取る. もし σ が下半連続でないなら, 点 s の開近傍 N が存在して,

$$N \cap \sup \phi(p_n) = \emptyset$$

が無限個の添字 n について成立する. 従って,

$$\sup \phi(p_n)(N) = 0$$

が無限個の添字 n について成立. $\phi(p_n)$ は $\phi(p)$ に弱収束するから, 数学注の定理 6.5 より, $\sup \phi(p)(N) = 0$ を得る. 従って, $N \cap \sup \phi(p) = \emptyset$ となり, これは矛盾である. ■

仮定 3.3: 許容対応 A は連続であり, 更に以下の条件を満たす.

- 1) 任意の $s \in S$ について, $A(s)$ は閉凸集合である.
- 2) 原点 0 のある近傍 N が存在し, 任意の $s \in S$ について $N \subset A(s)$ が成立する.

仮定 3.4: 任意の $p \in P$ について, ある $s \in \sigma(p)$ が存在して, 集合 $A(s)$ は下に有界である.

補題 3.5: 予想許容対応 C は P 上で連続であり, 各 $p \in P$ について以下のことが成立する.

1) $C(p)$ は下から有界な閉凸集合である.

2) $0 \in \text{int } C(p)$

証明: 対応の値 $C(p)$ が下から有界な閉凸集合であることは, 仮定 3.3 の条件 1) と仮定 3.4 より明らかである. また, 仮定 3.3 の条件 2) より $0 \in \text{int } C(p)$ であることも自明である.

対応 C の下半連続性を証明するために, $x \in \text{int } C(p)$ とすると, 点 x のある近傍 N_x が存在し, $N_x \subset C(p)$ となる. 対応 C の定義より, 任意の $s \in \sigma(p)$ について, $N_x \subset A(s)$ が成立する. 対応 A の下半連続性と $A(s)$ の凸性により, 各 $s \in \sigma(p)$ について, 点 s のある近傍 U_s が存在して, $s' \in U_s$ ならば $x \in A(s')$ が成立することを容易に証明することが出来る. 他方, 明らかに

$$\sigma(p) \subset \bigcup \{U_s | s \in \sigma(p)\}$$

が成立するから, 対応 σ の上半連続性より, 点 p の近傍 V_p が存在し, 任意の $p' \in V_p$ について,

$$\sigma(p') \subset \bigcup \{U_s | s \in \sigma(p)\}$$

が成立する. 即ち, $p' \in V_p$ とすると, 任意の $s' \in \sigma(p')$ について, ある点 $s \in \sigma(p)$ が存在し, $s' \in U_s$ となり, 従って, $x \in A(s')$ となる. これは, 任意の $p' \in V_p$ について, $x \in C(p')$ であることを意味する. これは対応 C の下半連続性を意味する.

他方, 対応 C の上半連続性は, その定義および対応 A と対応 σ の上半連続性より容易に証明される. ■

仮定 3.6: 所得関数 β は集合 P 上で連続である.

補題 3.7: 制約対応 α は集合 P 上で連続であり, また各 $p \in P$ について, $\alpha(p)$ は非空なコンパクト凸集合である.

証明: 各 $p \in P$ について

$$\alpha(p) = \{x \in C(p) | p \cdot x \leq \beta(p)\}$$

であることから、補題 3.5 より、 $\alpha(p)$ が非空なコンパクト凸集合であることは明らかである。更に、補題 3.5 と仮定 3.6 より、対応 α は連続であることは容易に証明される。■

仮定 3.8: 順序 $\succeq$ は完備的、反射的、推移的、そして連続であるとする。
(第一章、仮定 3.1, 3.2 を参照)

この仮定の替りに、通常はノイマン・モルゲンシュテルン効用関数の存在が仮定される。即ち、集合 $X \times S$ 上で定義された有界で連続な実数値関数 $u: X \times S \rightarrow R$ が存在し、各 $x \in X$ と $\mu \in \mathcal{M}(S)$ について

$$U(x, \mu) = \int_S u(x, \cdot) d\mu$$

と定義される関数 $U: X \times \mathcal{M}(S) \rightarrow R$ は順序 $\succeq$ について順序保存的となる。然しながら、実際にはノイマン・モルゲンシュテルン効用関数の存在を明示的に仮定する必要はないのである。

補題 3.9: 各 $p \in P$ について、需要集合 $D(p)$ は非空なコンパクト集合である。

証明: 補題 3.7 より、制約集合 $\alpha(p)$ はコンパクトである。従って、順序 $\succeq$ についての仮定 3.8 により、集合 $D(p)$ は非空であることが容易に証明される。また、明らかに、集合 $D(p)$ は閉集合である。従って、それはコンパクトである。■

補題 3.10: 需要対応 D は価格集合 P 上で上半連続である。

証明: もし対応 D が上半連続でないならば、ある点 $p_0 \in P$ と $D(p_0) \subset U$ なる開集合 U に対して、点 p_0 に収束する点列 p_n と点列 x_n が存在して、各 n について $x_n \in D(p_n)$, $x_n \notin U$ が成立する。このとき、対応 α の上半連続性と $\alpha(p_0)$ のコンパクト性より、点列 x_n は有界な点列であり、従って収束すると仮定してもよい。収束点を x_0 とすると、 $x_0 \notin U$ 、即ち $x_0 \notin D(p_0)$ となる。他方、対応 α の上半連続性と $\alpha(p_0)$ のコンパクト性より、 $x_0 \in \alpha(p_0)$ となる。従って、ある点 $z_0 \in \alpha(p_0)$ が存在し、

$$(z_0, \phi(p_0)) > (x_0, \phi(p_0))$$

が成立する。対応 α の下半連続性より、点 z_0 に収束するある点列 z_n が存在し、十分に大きな n について $z_n \in \alpha(p_n)$ が成立する。順序 $\succeq$ と関数 ϕ の連続性より、大きな n については

$$(z_n, \phi(p_n)) > (x_n, \phi(p_n))$$

が成立する。これは $x_n \in D(p_n)$ に矛盾する。■

仮定 3.11:

- 1) (単調性): 任意の $s \in S$ について、もし $x \in A(s)$, $x < x'$ ならば $x' \in A(s)$, $x' > x$ が成立する。
- 2) (凸性): 任意の $(x, \mu) \in X \times \mathcal{M}(S)$ について、集合

$$\{x' \in X | (x', \mu) \succeq (x, \mu)\}$$

は凸集合である。

補題 3.12: 各 $p \in P$ について、以下のことが成立する。

- 1) $p \cdot D(p) = \beta(p)$
- 2) $D(p)$ は凸集合である。

証明: 集合 $D(p)$ は制約集合 $\alpha(p)$ 内で最も選好される点の集合であるから、仮定 3.11 の条件 1) より、予算制約式において等式が成立しなければならない。即ち、性質 1) が成立する。同仮定の条件 2) より、明らかに、性質 2) が成立する。■

§4 一時的均衡の存在

この節では、多数の消費者が存在し、それらが第二節で明らかにされた行動様式をとる経済を考察する。経済の一時的均衡を定義し、従来の一般均衡分析において仮定されている諸条件のもとで、それが存在することを証明する。

消費者の人数を m とする。第 i 番目の消費者の取引集合を X_i , 所得

関数を β_i , 予想関数を ϕ_i , 選好を表す $X_i \times \mathcal{M}(S)$ 上の順序を $\succeq_i$, 許容対応を A_i とする。それらは前節の諸仮定をすべて満足するものとする。このとき、第二節で定義したように、各消費者 i の需要対応を D_i で表すことにする。個々の生産者は明示的には取扱わず、それらの行動を経済全体の生産可能性集合によって表現する。その生産集合を $Y \subset R^l$ とする。従って、考察される経済は

$$\mathcal{E} = \{X_i, \beta_i, \phi_i, \succeq_i, A_i \ (i=1, \dots, m), Y\}$$

と表記される。

生産集合 Y の形状および消費者の所得関数との整合性について以下のこと仮定する。

仮定 4.1: 生産集合 Y は以下の条件を満足する。

- 1) 集合 Y は原点を含む閉凸集合である。
- 2) $y \in Y$ 且つ $y' \leq y$ ならば、 $y' \in Y$ である。
- 3) $R_+^l \cap Y$ は有界な集合である。
- 4) $Y \cap (-Y)$ は有界な集合である。
- 5) 任意の $p \in \Delta$ について $\sup p \cdot Y = \sum_{i=1}^m \beta_i(p)$ が成立する。

意味ある価格の集合として、集合 Q を

$$Q := \{p \in \Delta \mid p > 0, \sup p \cdot Y < +\infty\}$$

と定義する。

補題 4.2: 集合 Q は非空な凸集合であり、更に以下の性質を持つ。

- 1) $\dim Q = l-1$
- 2) $Q = \bigcap_{i=1}^m P_i$ (集合 P_i は、各消費者 i について、前節において定義された集合 P に対応するものである)

証明: 集合 Q は定義より凸集合になる。非空であることは、仮定 4.1 の条件 1) と 3) より、明らかである。補題の性質 1) は同仮定の条件 1) と 4) より容易に証明される。更に、性質 2) は同仮定の条件 5) より導

出される。■

各価格 $p \in Q$ について、供給集合 $Z(p)$ を

$$Z(p) := \{y \in Y \mid p \cdot y = \sup p \cdot Y\}$$

と定義する。

補題 4.3: 供給対応 Z は集合 $\dot{Q}$ 上で上半連続である。更に、各 $p \in \dot{Q}$ について以下のことが成立する。

1) $Z(p)$ は非空なコンパクト凸集合である。

2) $p \cdot Z(p) = \sum_{i=1}^m \beta_i(p)$

証明: 性質 2) は対応 Z の定義と仮定 4.1 の条件 5) より自明である。

次に、各 $p \in \dot{Q}$ について集合 $Z(p)$ が閉集合であることは明らかである。

もし、ある点 $p \in \dot{Q}$ について $Z(p)$ がコンパクトでないならば、それは有界でないことを意味する。このことは、補題 4.2 の性質 1) より、点 p の近くの適当な点 $q \in \dot{Q}$ をとると、 $\sup q \cdot Y = +\infty$ となり、矛盾する。このことにより、性質 1) を得る。

もし対応 Z が集合 $\dot{Q}$ 上で上半連続でないならば、ある点 $p_0 \in \dot{Q}$ と $Z(p_0) \subset U$ なる開集合に対して、点 p_0 に収束する点列 p_n と点列 x_n が存在して、各 n について $x_n \in Z(p_n)$, $x_n \notin U$ が成立する。

ある点 $x_0 \in Z(p_0)$ を選ぶ。既に表示したように集合 $Z(p_0)$ はコンパクト集合であるから、集合 U は有界であると仮定してよい。従って、各 n について適当な $0 < \theta_n \leq 1$ なる数 θ_n を選ぶと、

$$\hat{x}_n := \theta_n x_n + (1 - \theta_n) x_0$$

と定義される点列 $\hat{x}_n$ が有界で、各 n について $\hat{x}_n \notin U$ となるようにすることが出来る。生産集合 Y の凸性より、各 n について $\hat{x}_n \in Y$ である。更に、その有界性により、字列 $\hat{x}_n$ がある点 $\hat{x}_0$ に収束すると仮定してもよい。以上のことから $\hat{x}_0 \in Y$ 且つ $\hat{x}_0 \notin U$, 即ち、 $\hat{x}_0 \notin Z(p_0)$ となる。

他方、対応 Z の定義から、各 n について

$$\begin{aligned} p_n \cdot \hat{x}_n &= \theta_n p_n \cdot x_n + (1 - \theta_n) p_n \cdot x_0 \\ &\geq \theta_n p_n \cdot x_0 + (1 - \theta_n) p_n \cdot x_0 \\ &= p_n \cdot x_0 \end{aligned}$$

が成立する。従って、極限において、 $p_0 \cdot \hat{x}_0 \geq p_0 \cdot x_0$ となる。これは $\hat{x}_0 \in Z(p_0)$ を意味し、矛盾である。■

市場均衡は価格ベクトル p 、各消費者 i の取引 x_i 、生産計画 y の組合せ、 $\{p, x_1, \dots, x_m, y\}$ 、によって表記される。

定義 4.4: 価格 $p \in Q$ 、消費者 i の取引 $x_i \in X_i$ 、生産計画 $y \in Y$ の組合せ、 $\{p, x_1, \dots, x_m, y\}$ 、が以下の条件を満たすとき、**一時的均衡**と呼ぶ。また、このときベクトル p を**均衡価格**と呼ぶ。

- 1) $x_i \in D_i(p) \quad \forall i=1, \dots, m$
- 2) $p \cdot y \geq p \cdot y' \quad \forall y' \in Y$
- 3) $\sum_{i=1}^m x_i = y$

但し、 D_i は消費者 i の前節における需要対応 D に相当する。

一時的均衡の存在を証明するために、各 $p \in Q$ について、総超過需要集合 $\zeta(p)$ を

$$\zeta(p) := \sum_{i=1}^m D_i(p) - Z(p)$$

と定義する。明らかに、 $0 \in \zeta(p)$ となるような価格 p を見つけることが、均衡の存在を示すことになる。

補題 4.5: 総超過需要対応 ζ は集合 $\bar{Q}$ 上で上半連続であり、また各 $p \in \bar{Q}$ について、以下のことが成立する。

- 1) $\zeta(p)$ は非空なコンパクト凸集合である。
- 2) $p \cdot \zeta(p) = 0$ (ワルラス法則)

証明: 補題 3.10, 3.12, 4.3 より明らかである。■

更に、超過需要対応 ζ に以下のことを仮定する。それは財が消費者には望ましいものであって、価格がゼロになるか又は所得が無限大になる場合

には財の超過需要が限りなく大きくなることを意味する。

仮定 4.6: もし各 $n=1, 2, \dots$ について, $p_n \in \dot{Q}, z_n \in \zeta(p_n)$ であり, 更に $p_n \rightarrow p_0 \in \partial Q$ とする. このときある価格 $\bar{p} \in \dot{Q}$ が存在し, 無限個の n について, $\bar{p} \cdot z_n > 0$ が成立する.

命題 4.7: 上記の全仮定のもとで経済 $\mathcal{E}$ には一時的均衡が存在する.

証明: 補題 4.2 より集合 Q は非空な凸集合である. また, $Q \subset A$ であることから, 以下のような性質を持つ集合列 G_n が存在する.

- 1) $G_n \subset G_{n+1} \quad \forall n=1, 2, \dots$
- 2) $\bigcup_n G_n = Q$
- 3) 集合 G_n はコンパクト凸集合である.

集合 W_n を

$$W_n := \{w \in R^m \mid p \cdot w \leq 0 \quad \forall p \in G_n\}$$

と定義すると, それは原点を頂点とする閉凸錐となる. 対応 ζ を G_n 上に限定すると, 補題 4.5 と数学注の定理 4.6 により, ある $p_n \in G_n$ が存在して $\zeta(p_n) \cap W_n \neq \emptyset$ となる. 即ちある $x_n \in W_n \cap \zeta(p_n)$ が存在する. 点列 p_n はコンパクト集合 A 内の点列であるから, 一般性を失うことなく, ある点 $p_0 \in A$ に収束すると仮定することが出来る. 更に仮定 4.6 より, $p_0 \in \dot{Q}$ でなければならない. 総超過需要関数がコンパクト値であることと上半連続性により, 点列 x_n も有界な点列であると見なせる. 故にある点 x_0 に収束すると仮定しても一般性を失わない. 従って, 以下のことが成立する.

$$p_0 \cdot x_0 = 0, x_0 \in \zeta(p_0)$$

更に, 任意の n について, $x_n \in W_n$ であることから, 任意の n について, $x_0 \in W_n$ となる. 従って, 任意の $p \in \dot{Q}$ について, $p \cdot x_0 \leq 0$ が成立する. 従って, $p_0 \in \dot{Q}$ であることと補題 4.1 の性質 1) より, $x_0 = 0$ でなければならない. つまり, $0 \in \zeta(p_0)$ となり, 価格 p_0 は均衡価格である. ■

第三章 合理的期待均衡の理論

不確実性が存在するとき経済主体は自己の予想あるいは期待に基づいて経済活動を行う。この場合経済主体は経済の中で観測される現象に依存して期待を形成する。逆に、経済主体の期待に基づく活動は経済に影響を与える。期待と経済現象のこのような相互依存関係を分析するのが、合理的期待均衡の理論である。これは期待を外生的に導入し期待が経済を決定するという一面だけを分析する一時的均衡の理論と異なる点である。

期待と経済には整合性が要求される。期待は経済を観察することから形成された期待であり、逆に経済は期待に基づく活動の結果として実現する経済でなければならない。このような整合的状况にある期待を合理的期待と呼ぶ。合理的期待とは観察と矛盾しない期待、即ち、正しい期待のことである。合理的期待のもとで実現する市場均衡は合理的期待均衡と呼ばれる。

不確実性とは情報の不足あるいは欠如を意味する。静態的経済においては、経済主体に情報の量と種類に関して差異が存在し、「情報の偏在」が主要な問題となる。この種の不確実性が存在する経済が R. Radner (1979), B. Allen (1981) などによって分析されている。

§1 合理的期待と市場均衡

不確実性が存在する競争経済では、経済主体の行動は二つの要素に依存する。第一の要素は言うまでもなく市場における価格である。経済主体は需要または供給を価格に依存して決定する。第二の要素は不確実な経済の環境に関する情報である。然しながら、各経済主体が入手する情報は往々にして経済環境を完全に知るには不十分である。また各経済主体が入手す

る情報は経済主体間で異なり、各経済主体は互いに他の経済主体が得ている情報を知らない。このような状況における経済主体の最も単純な行動様式は、自分が入手した情報以外はまったく不明であるとして行動する仕方である。各経済主体がこの様に市場で行動したとき、市場で一つの均衡状態が実現する。この場合、経済主体の行動が入手した情報に依存しているのであるから、当然のことながら実現する市場状態も経済主体が持っている情報に依存する。従って、すべての経済主体が得る情報と実現する市場の状態との間には関係が発生する。特に、市場で観察される均衡価格は経済主体全員の情報に依存している。言い換えると、経済主体が入手した全情報は均衡価格に反映される。この全情報と均衡価格との関係を**第一次の関係**と呼ぶことにする。

もし同じ状況が幾度も繰り返される定常的な経済であるならば、やがては経済主体は均衡価格と経済主体全員が入手した情報との間の関係に気付く。即ち、上述の第一次の関係を知り、そしてその関係も自己の行動様式に取入れるようになる。即ち、経済に存在する全情報から均衡価格を期待（予想）する。このような期待は、換言すれば、観察可能な市場価格から他の経済主体が入手している未知の情報を推測することを意味する。経済主体はその推測も組込んで自己の需要あるいは供給を決定する。各経済主体がこの様な行動をする時、市場で実現する均衡価格と経済に存在する全情報との間には新たな関係が生ずる。この関係を**第二次の関係**と呼ぶことにする。

経済主体が第一次の関係を期待し、それが実際に実現している第二次の関係と異なるならば、やがては経済主体はそのことを知り、期待が正しくないことに気付く。従って期待を修正する。そして修正された期待のもとで市場価格と情報との間に新たな関係が発生する。期待が実際の市場価格と情報との関係と異なる限り、期待は修正され続ける。経済主体が抱く期

待と、そのもとで実現する情報と市場価格との関係が等しくなると、その期待は修正する必要がなくなり、それは正確なものということになる。この意味で正確な期待を合理的期待 (rational expectation) と呼ぶ。経済主体が合理的な期待を持つとき実現する市場均衡を合理的期待均衡 (rational expectation equilibrium) と呼ぶ。以下では単純化された経済モデルにおいて、この均衡概念を説明する。

経済主体はすべて消費者であり、その人数を m とする。二種類の財が存在し、一つは消費財 (consumption good), 他は資産 (asset) とする。各消費者には市場価格以外にも観測可能な情報があり、第 i 番目の消費者が観察できる情報の集合を S^i で表す。消費者 i は市場で取引をする以前に集合 S^i の中の一つの情報を受取る。但し、集合 S^i は有限個の要素からなる集合とする。全消費者が受取る情報の集合を S とすると、以下のようなになる。

$$S = S^1 \times S^2 \times \dots \times S^m$$

経済主体は情報から経済がいかなる環境にあるかを推測する。一般には消費者が得る全情報を以ってしても環境を完全には知ることが出来ない。ここでは単純化のために、消費者の情報全体からは経済の環境を完全に知ることが可能であると仮定する。即ち、情報の集合 S の各要素が経済の一つの環境に対応しており、集合 S を環境の集合と同一視する。ある環境 $s \in S$ が実現すると、要素 s は消費者に伝わる情報の全体を表す。消費者 i が受取る情報を s^i とすると、情報全体 s は

$$s = (s^1, s^2, \dots, s^m)$$

と表される。

環境すなわち情報は不確実であり、各消費者は自分への情報以外は事前には知ることが出来ない。各消費者は環境に関する (主観的) 確率分布を知っているだけである。消費者 i が想定する集合 S 上の確率分布を

$$\{\alpha_s^i : s \in S\}$$

とする。 α_s^i は環境が s となる確率を表わす。確率の定義から

$$\alpha_s^i \geq 0 \text{ 且つ } \sum_{s \in S} \alpha_s^i = 1$$

が成立する。環境の不確実性は資産の将来における価値の不確実性を引起すと仮定する。即ち、資産の将来価値は環境に依存し、環境 $s \in S$ のもとでは実現する資産価値は v_s になるとする。

消費者 i の財の初期賦存量を

$$e^i = (e_c^i, e_a^i)$$

とする。 e_c^i は消費財の初期保有量を、 e_a^i は資産の初期保有量を表す。

消費者 i の需要を

$$x^i = (c^i, z^i)$$

で表す。 c^i は消費財の需要量を、 z^i は資産の需要量を表す。消費財の価格は、一般性を失なうことなく、1であると仮定することが出来る。資産の価格を p とすると、消費者の需要 x^i は以下の予算制約を満たさなければならない。

$$c^i + pz^i = e_c^i + pe_a^i$$

消費者の効用関数は消費財の消費量と資産の価値額に依存すると仮定する。もし消費者 i の需要が $x^i = (c^i, z^i)$ である時に環境 s が実現したならば、消費者 i の得る効用は

$$u = U^i(c^i, v_s z^i)$$

になるとする。

合理的期待均衡を定義するために一つの概念を導入する。それは予想関数 (forecast function) と呼ばれ、情報全体 $s \in S$ を資産価格 p に対応させるものである。その関数は消費者がどのように情報から資産の均衡価格を予想するかを表現している。予想関数を

$$p = \phi(s)$$

とする。

市場で取引がおこなわれる前に一つの情報 s が消費者に届いたとする。然しながら消費者 i はその一部しか知らない。即ち、その情報全体を

$$s = (s^1, s^2, \dots, s^m)$$

とすると、消費者 i は s^i だけを知っており、他の消費者が受取っている情報を知らない。従って、消費者 i はどのような環境が実現しているのかを知らない。消費者 i は情報全体すなわち環境を予想関数と市場で観察される資産価格から推測する。もし市場での資産価格が p とすると、消費者 i は予想関数 ϕ より情報全体 s は以下の集合に属すと推測する。

$$T = \{t = (t^1, \dots, t^m) \in S | p = \phi(t), t^i = s^i\}$$

従って、情報全体 s が集合 T の範囲にあるとした場合の S 上の条件付き確率分布を

$$\{\beta_s^i : s \in S\}$$

とすると、それは

$$\beta_s^i = \begin{cases} \frac{\alpha_s^i}{\sum_{t \in T} \alpha_t^i} & (\text{もし, } s \in T \text{ ならば}) \\ 0 & (\text{もし, } s \notin T \text{ ならば}) \end{cases}$$

によって与えられる。つまり消費者 i は資産価格 p , 部分情報 s^i , 予想関数 ϕ が与えられたとき、環境 $s \in S$ が実現している確率は β_s^i であると予測している。従って、消費者 i の需要が $x^i = (c^i, z^i)$ であるとする、彼の期待効用は

$$\sum_{s \in S} \beta_s^i U^i(c^i, v_s z^i)$$

となる。消費者 i はこの期待効用が最大になるような需要 x^i を予算制約の範囲から選ぶ。従って、彼の需要 x^i は資産価格 p , 部分情報 s^i , 予想関数 ϕ の関数になる。それを

$$x^i = D^i(p, s^i, \phi)$$

とする。故に、経済の総超過需要関数は

$$Z(p, s, \phi) = \sum_i [D^i(p, s^i, \phi) - e^i]$$

となる。

定義 1.1: 以下の様な性質を持つ予想関数 ϕ を合理的期待均衡と定義する。任意の情報 $s \in S$ について

$$Z(\phi(s), s, \phi) = 0$$

が成立する。

即ち、全ての消費者が予想関数として ϕ を採用したなら、いかなる環境 s が実現し、情報 s が消費者に与えられようとも、予想関数の示す資産価格 $\phi(s)$ のもとで市場が均衡することになる。言い換えれば、予想関数 ϕ で表される消費者の期待は、市場の結果と矛盾しないという意味で正しいことになる。消費者がこの様な予想関数を期待として採用し行動するならば予想した市場価格が実現するため、期待を修正する誘引は存在せずその期待を持ち続ける。

§2 完全伝達均衡

前節において定義される合理的期待均衡と密接に関連する一つの均衡概念を考察しよう。環境 s が実現し、情報 s が消費者に伝達されたとき、市場で取引が行なわれる前に消費者間で情報の交換がなされると想定する。この場合すべての消費者は情報 s の全体を知っていることになる。つまり消費者にとって環境について不確実性がなくなる。従って、消費者 i の需要が $x^i = (e^i, z^i)$ であるとき、効用は

$$U^i(e^i, v_{sz^i})$$

となる。消費者 i はこの値を最大にするような需要 x^i を予算制約のもとで選ぶ。故に、需要 x^i は情報全体 s と資産価格 p の関数になる。それを

$$x^i = \phi^i(p, s)$$

とすると、総超過需要関数は

$$\zeta(p, s) = \sum_i [\phi^i(p, s) - e^i]$$

と定義される。ここで情報 s と価格 p との間の一つの関数関係

$$p = \phi(s)$$

を次の様に定義する。

定義 2.1: 関数 ϕ は以下の性質を持つとき、**完全伝達均衡** (full communication equilibrium) と呼ぶ。即ち、任意の情報 $s \in S$ にいて

$$\zeta(\phi(s), s) = 0$$

が成立する。

完全伝達均衡 ϕ とは、もし消費者間で取引前に情報交換が行なわれるなら、環境が s であるとき資産の均衡価格は $\phi(s)$ になることを示す関数である。

定義 2.2: 完全伝達均衡 ϕ が次の性質を持つとき、**顕示的** (revealing) であると言う。即ち、もし $s \neq t$ ならば、 $\phi(s) \neq \phi(t)$ が成立する。

顕示的な完全伝達均衡 ϕ においては、異なる環境 s, t のもとでは資産の均衡価格 $\phi(s), \phi(t)$ は異なるものになる。即ち、消費者間で取引前に情報を交換するならば、環境の違いは価格に必ず反映されることを意味する。

命題 2.3: 顕示的完全伝達均衡は合理的期待均衡である。

証明: 関数 ϕ を顕示的完全伝達均衡とする。消費者が関数 ϕ を期待に採用したとき、関数 ϕ が合理的期待均衡であることを示す。

環境 $s \in S$ が実現したとする。期待 ϕ によると、 $p = \phi(s)$ なる価格 p が均衡価格となる。実際、以下において価格 p で市場が均衡することを示す。消費者 i は環境 s は次の範囲にあると推測する。

$$T = \{t \in S | p = \phi(t), t^i = s^i\}$$

この場合、関数 ϕ が顕示的であることから、 $T = \{s\}$ となる。従って消

費者 i にとって、情報 s の一部 s^i と価格 p を知り、期待 ϕ を持つときの環境の条件付き分布 $\{\beta_i^t | t \in S\}$ は、

$$\beta_i^t = \begin{cases} 1 & (\text{もし、} t=s \text{ ならば}) \\ 0 & (\text{もし、} t \neq s \text{ ならば}) \end{cases}$$

となる。故に、消費者 i は情報 s の全体を知って行動しているのと、同じ行動を取る。従って、

$$D^i(p, s^i, \phi) = \Phi^i(p, s)$$

が成立する。これは、すべての消費者について成立する。更に、関数 ϕ は完全伝達均衡であるから

$$\sum_i D^i(p, s^i, \phi) = \sum_i \Phi^i(p, s) = \sum_i e^i$$

が成立する。即ち、価格 p は均衡価格である。

以上のことから、任意の環境 $s \in S$ について

$$\sum_i D^i(\phi(s), s^i, \phi) = \sum_i e^i$$

が成立することが分かる。即ち、関数 ϕ は合理的期待均衡である。■

顕示的な完全伝達均衡 ϕ が存在する場合、上述の証明の中で明らかにされている様に、各消費者 i が顕示的な完全伝達均衡 ϕ を期待として採用するならば、資産価格 p と情報の全体 s を知ることは、資産価格 p と情報の一部 s^i と関数 ϕ を知ることに同等である。これが顕示的な完全伝達均衡が合理的期待均衡になる理由である。完全伝達均衡の存在は、所謂「一般均衡の存在定理」により、よく知られた事実である。従って、完全伝達均衡が顕示的になる可能性を分析することによって、合理的期待均衡の存在の可能性を知ることが出来る。実際、完全伝達均衡が例外的な場合を除いて顕示的になることを証明することによって、合理的期待均衡が一般的に存在することが示される。これが R. Radner (1979) と B. Allen (1981) による分析である。

§3 一般化モデルと消費者行動

この節では不確実性を含む一般化された交換経済を考察する。消費者の数は有限であり、その人数を m とする。財の種類も有限であり、その数を l とする。財空間は l 次元ユークリッド空間 R^l であり、すべての消費者の消費集合は、その非負象限 R_+^l とする。第 i 番目の消費者の初期保有量を $e_i \in R_+^l$ とする。

消費集合 R_+^l 上の完備的、反射的、推移的、且つ閉である二項関係の集合を $\mathcal{U}$ とする。即ち。

$\mathcal{U} = \{ \succeq \subset R_+^l \times R_+^l \mid \text{関係 } \succeq \text{ は完備的, 反射的, 推移的な閉集合} \}$ とする。

注 3.1: 集合系 $\mathcal{U}$ は閉収束 (closed convergence) の位相を与えると、コンパクト可分距離空間の G_δ 集合となる。[W. Hildenbrand (1974, Thm. 2, p. 96 & Prob. 4, p. 105)]

集合 $\mathcal{U}$ 上の確率測度の集合を $\mathcal{M}(\mathcal{U})$ で表し、それには弱位相が与えられているとする。集合 $R_+^l \times \mathcal{M}(\mathcal{U})$ 上の一つの二項関係 $\succeq_i^*$ で、第 i 番目の消費者の選好を表すことにする。このとき、各消費者の選好は期待効用として表現可能であることを仮定する。

仮定 3.2: 各消費者 i において、ある有界な連続関数 $u_i: R_+^l \times \mathcal{U} \rightarrow R$ が存在し、これより関数 $U_i: R_+^l \times \mathcal{M}(\mathcal{U}) \rightarrow R$ が

$$U_i(x, \nu) := \int_{\mathcal{U}} u_i(x, \cdot) d\nu$$

と定義されるとき、以下のことが成立する。

- 1) 各 $\succeq \in \mathcal{U}$ について、関数、 $x \rightarrow u_i(x, \succeq)$, は順序 $\succeq$ について順序保存的である。
- 2) 関数 U_i は順序 $\succeq_i^*$ について順序保存的である。

経済における不確実性を表現するために確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ を導入す

る。集合 Ω は自然の状態の集合、 σ -代数 $\mathcal{F}$ は可能なすべての事象の集合、確率測度 μ は自然の状態が起きる客観的な確率分布を表す。この経済においては、個々の自然の状態のもとで各消費者の財の消費に関する選好が事前には分からないという不確実性が存在するとしよう。従って、経済の不確実性は

$$\mathcal{E}: (\Omega, \mathcal{F}, \mu) \rightarrow (\mathcal{U}^m, \mathcal{B}(\mathcal{U}^m))$$

なる可測関数で表現される。関数 $\mathcal{E}$ の第 i 番目の要素を $\mathcal{E}_i: \Omega \rightarrow \mathcal{U}$ で表すことにする。

可測空間 $(\Omega, \mathcal{F})$ 上のある確率測度 μ_i によって、消費者 i が考えている自然の状態の発生に関する確率分布を表す。それは必ずしも客観的確率分布 μ と等しいものではない。確率測度 μ_i は消費者 i の主観的なもので、正確なものである必要はない。更に、 σ -代数 $\mathcal{F}_i \subset \mathcal{F}$ によって、消費者 i が発生した自然の状態に関する事前の情報を表すことにする。

以上をまとめると、経済を規定する基礎的データは

$$\{\mathcal{E}, \succeq_i^*, e_i, \mathcal{F}_i, \mu_i \ (i=1, \dots, m)\}$$

となる。

仮定 3.3: σ -代数 $\mathcal{F}, \mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$ は可算生成的 (countably generated) である。

注 3.4: σ -代数 $\mathcal{F}_i$ が可算生成的であるならば、各点 $\omega \in \Omega$ について、以下の様に定義される、点 ω を含む $\mathcal{F}_i$ -アトム (atom) と呼ばれる $\mathcal{F}_i$ -可測集合 $A(\omega, \mathcal{F}_i)$ が一意的に存在する。[数学注, 定理 7.3]

$$A(\omega, \mathcal{F}_i) := \cap \{E \mid \omega \in E \in \mathcal{F}_i\}$$

各消費者 i の不確実性に関する知識は以下の通りである。第一に消費者 i は関数 $\mathcal{E}_i$ の構造を知っているとする。即ち、自然の状態と自己の選好との関係を知っている。第二に自然の状態の確率分布は測度 μ_i であると想定している。第三に自然の状態を情報 $\mathcal{E}_i$ から事前にある程度知

ることが出来る。もし自然の状態が $\omega \in \Omega$ ならば、消費者 i は自然の状態が点 ω の $\mathcal{F}_i$ -アトムに属することを事前に知ることが出来る。

各消費者は市場に観察可能である財の価格から自然の状態を推測しよう。即ち、消費者は自然の状態と市場価格とには何らかの関係があると期待する。その期待を表現するのに、可測関数

$$\phi: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Delta, \mathcal{B}(\Delta))$$

を用いる。但し、記号 Δ は

$$\Delta := \{p = (p_1, \dots, p_l) \in R_+^l \mid \sum_{i=1}^l p_i = 1\}$$

で定義される価格ベクトルの集合を、また $\mathcal{B}(\Delta)$ は集合 Δ のボレル部分集合からなる σ -代数を表す。これに対応して、関数

$$\psi_i: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Omega \times \Delta, \mathcal{F}_i \times \mathcal{B}(\Delta))$$

を、各 $\omega \in \Omega$ について

$$\psi_i(\omega) = (\omega, \phi(\omega))$$

と定義する。

補題 3.5: 関数 ϕ_i が与えられたときの $\mathcal{E}_i$ に対する μ_i の正則的条件付分布 (regular conditional distribution) が存在する。即ち、以下の性質を持つ関数 $Q_i: \Omega \times \Delta \times \mathcal{B}(\mathcal{U}) \rightarrow [0, 1]$ が存在する。

- 1) 各 $(\omega, p) \in \Omega \times \Delta$ について、 $Q_i(\omega, p, \cdot)$ は $\mathcal{B}(\mathcal{U})$ 上の確率測度である。
- 2) 各 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ について、 $Q_i(\cdot, \cdot, B)$ は $\mathcal{F}_i \times \mathcal{B}(\Delta)$ -可測である。
- 3) もし $C \in \mathcal{F}_i \times \mathcal{B}(\Delta)$, $B \in \mathcal{B}(\Delta)$ ならば,

$$\int_F Q_i(\psi_i(\cdot), B) d\mu_i = \mu_i(F \cap E)$$

が成立する。但し、 $F = \psi_i^{-1}(C)$, $E = \mathcal{E}_i^{-1}(B)$ である。

証明: 注 3.1 により、数学注の定理 7.5 が適用される。■

注 3.6: 数学注の定理 7.6 より、条件付分布 Q_i は一意的である。即ち、

もし二つの条件付分布 Q_i, Q_i' が存在するならば, 測度 $\mu_i \cdot \phi_i^{-1}$ の意味でほとんどすべての $(\omega, p) \in \Omega \times \mathcal{A}$ について, 任意の $B \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ について $Q_i(\omega, p, B) = Q_i'(\omega, p, B)$ が成立する.

また, 明らかに条件付分布 Q_i は, 関数 ϕ と $\mathcal{G}_i$ の測度 μ_i の意味で無視出来る変化には依存しない.

自然の状態が $\bar{\omega} \in \Omega$ であり, 市場において価格が $p \in \mathcal{A}$ であるとする. 消費者 i は自分の情報 $\mathcal{F}_i$ より, 自然の状態は点 $\bar{\omega}$ の $\mathcal{F}_i$ -アトムの範囲にあることを知る. また期待 ϕ より, 自然の状態は

$$\{\omega \in \Omega | \phi(\omega) = \bar{p}\}$$

の範囲にあると予想する. 従って, 消費者 i は自然の状態が

$$F = A(\bar{\omega}, \mathcal{F}_i) \cap \{\omega \in \Omega | \phi(\omega) = \bar{p}\}$$

にあると予想している. 実際. 以下の補題が成立する.

補題 3.7: 測度 μ_i の意味でほとんどすべての $\bar{\omega} \in \Omega$ について, もし $\bar{p} = \phi(\bar{\omega}), \mathcal{G}_i(F) \subset B \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ ならば, $Q_i(\bar{\omega}, \bar{p}, B) = 1$ が成立する.

証明: 数学注の定理 7.8 による. ■

更に, 各 $B \in \mathcal{B}(\mathcal{U})$ について, 条件付分布 Q_i に関する補題 3.5 の性質 2) より, $Q_i(\cdot, \cdot, B)$ は $\mathcal{F}_i \times \mathcal{B}(\mathcal{A})$ -可測である. 従って, 集合 $A(\bar{\omega}, \mathcal{F}_i) \times \{\bar{p}\}$ は $\mathcal{F}_i \times \mathcal{B}(\mathcal{A})$ -アトムであるから, $Q_i(\cdot, \cdot, B)$ はその上で一定である. 即ち, 任意の $\omega \in F$ について

$$Q_i(\omega, \phi(\omega), B) = Q_i(\bar{\omega}, \bar{p}, B)$$

が成立する. 従って, 補題 3.5 の性質 3) により,

$$\mu_i(F) Q_i(\bar{\omega}, \bar{p}, B) = \mu_i(F \cap E)$$

が成立する. 但し, $E = \mathcal{G}_i^{-1}(B)$ である. この式において, 自然の状態が $\bar{\omega}$ であり, 価格が $\bar{p}$ であるとき, 消費者 i は自然の状態は領域 F にあると予想しており, その確率は $\mu_i(F)$ であると考えている. 他方, 自己の選好が領域 B にあり, 且つ自然の状態が領域 F にある確率は $\mu_i(F$

$\cap E$) であると考えている。従って、上式が成立しているのであるから、 $Q_i(\bar{\omega}, \bar{p}, B)$ は自然の状態が領域 F にあるとき選好が領域 B に属す条件付確率を表すことになる。即ち、確率測度 $Q_i(\bar{\omega}, \bar{p}, \cdot)$ は自然の状態が $\bar{\omega}$ 、価格が $\bar{p}$ であるとき、消費者 i が予想している選好の確率分布を表すと解釈される。

自然の状態が $\omega \in \Omega$ であり、市場における価格 $p \in A$ であるとする。消費者 i にとっての予算集合は

$$B_i(p) = \{x \in R_+^I \mid p \cdot x \leq p \cdot e_i\}$$

となる。消費者 i は消費計画 x をこの予算集合から選び、そのとき消費者 i の選好 $\succeq_i^*$ を表す期待効用は、仮定 3.2 より、

$$U_i(x, Q_i(\omega, p, \cdot)) = \int_{\mathcal{E}} u_i(x, \cdot) dQ_i(\omega, p, \cdot)$$

となる。この値を $V_i(x, \omega, p; \phi)$ と表すことにする。従って、消費者 i は予算集合 $B_i(p)$ の範囲から期待効用 $V_i(x, \omega, p; \phi)$ を最大にするような消費計画 x を選択する。その様な最適な消費計画の集合を $D_i(\omega, p; \phi)$ で表すことにする。

§4 一般化モデルにおける合理的期待均衡

前節のモデルにおける市場均衡の概念を定義する。それは消費者が行動するとき用いる市場価格予想関数 ϕ の望ましい性質として定義される。消費者が期待として採用する関数 ϕ が、消費者の行動の結果として実現する市場の状況と矛盾しなければよい。即ち、予想関数によって期待された価格で市場が実際に均衡することである。均衡の定義の整合性のために、以下のことを仮定する。

仮定 4.1: $E \in \mathcal{F}$ であるとき、以下のことが成立する。

- 1) もしある i について $\mu_i(E) = 0$ ならば、 $\mu(E) = 0$ である。
- 2) もし $\mu(E) = 0$ ならば、すべての i について $\mu_i(E) = 0$ である。

この仮定は測度ゼロの集合については客観的確率分布も消費者の主観的確率分布もすべて一致していることを意味する。この仮定により、「ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について」という表現は、測度 $\mu, \mu_1, \dots, \mu_m$ のいずれの意味においてであるかは問題にならない。

仮定 4.2: $\mathcal{F}$ は $\mathcal{F}_1, \dots, \mathcal{F}_m$ を含む最小の σ -代数である。

この仮定はいかなる消費者にも認識されない情報が予想関数に組込まれることを排除している。どの消費者の行動にも影響を与えない情報は市場に反映されないから、その影響は観測されることはなく、従って消費者の期待にそれが組込まれることはないとするのが自然である。

定義 4.3: 可測関数 $\phi: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (A, \mathcal{B}(A))$ が次の性質を持つとき合理的期待均衡と呼ぶ。即ち、適当な可測関数

$$x_i: (\Omega \times A, \mathcal{F}_i \times \mathcal{B}(A)) \rightarrow R_+^l \quad (i=1, \dots, m).$$

が存在し、以下の条件を満たす。

1) 各消費者 i について、

$$x_i(\omega, \phi(\omega)) \in D_i(\omega, \phi(\omega) : \phi)$$

が、測度 μ_i の意味で、ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について成立する。

$$2) \sum_{i=1}^m x_i(\omega, \phi(\omega)) = \sum_{i=1}^m e_i$$

が、測度 μ の意味で、ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について成立する。

この均衡の意味は以下の様に解釈される。自然の状態 $\omega \in \Omega$ が実現しているとする。消費者はいかなる状態が実現しているかを知らない。各消費者 i は自己の情報 $\mathcal{F}_i$ 、確率分布 μ_i 、それらに期待 ϕ を組込んで自然の状態を推測する。他方、他方、期待 ϕ が正しいものならば、市場価格は $\phi(\omega)$ となる筈である。この市場価格のもとで、自然の状態に関する自己の予測に基づいた期待効用を最大にするような消費計画 $x_i(\omega, \phi(\omega))$ を需要する。これが上の定義の条件 1) の意味である。条件 2) は、このような消費者の需要の総和は財の総供給に等しいことを意味している。即ち、

予想された価格 $\phi(\omega)$ は実際に均衡価格である。更に、このことが、仮定 4.1 より、客観的にも主観的にもすべての測度の意味においてほとんどすべての自然の状態 $\omega \in \Omega$ について成立する。即ち、関数 ϕ によって表される期待は、市場で観察される状況と矛盾しない。この意味において期待 ϕ は合理的である。

合理的期待均衡のなかで特別な性質を持つものに注目する。

定義 4.4: 関数 $\phi: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (A, \mathcal{B}(A))$ が次の性質を持つとき**完全顕示的** (completely revealing) であると言う。即ち、ある集合 $\Omega' \in \mathcal{F}$ が存在し、以下の条件を満たす。

- 1) $\mu(\Omega') = 1$
- 2) もし $\omega, \omega' \in \Omega', \phi(\omega) = \phi(\omega')$ ならば $\mathcal{G}(\omega) = \mathcal{G}(\omega')$ である。

この定義は、経済の環境が異なるならば均衡価格も必ず(確率 1 で)異なることを意味する。関数 ϕ が、経済環境の違いは市場価格に反映されるという期待を表現している。

補題 4.5: 関数 ϕ が完全顕示的ならば、各消費者 i について

$$V_i(\cdot, \omega, \phi(\omega) : \phi) = u_i(\cdot, \mathcal{G}_i(\omega))$$

が、測度 μ_i の意味で、ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について成立する。

証明: 関数 ϕ が完全顕示的であるから、定義 4.4 の性質を持つ集合 $\Omega' \in \mathcal{F}$ が存在する。点 $\bar{\omega} \in \Omega'$ を選び、 $\bar{p} = \phi(\bar{\omega})$ とする。消費者 i において、 $\succeq = \mathcal{G}_i(\bar{\omega})$ 、点 $\bar{\omega}$ の $\mathcal{F}_i$ -アトムを $A_i(\bar{\omega}, \mathcal{F}_i)$ とする。集合 F を

$$F := A(\bar{\omega}, \mathcal{F}_i) \cap \phi^{-1}(\bar{p})$$

と定義する。定義 4.4 の条件 2) より、 $\phi^{-1}(\bar{p}) \cap \Omega' \subset \mathcal{G}_i^{-1}(\succeq)$ が成立する。これより $F \cap \Omega' \subset \mathcal{G}_i^{-1}(\succeq)$ となる。従って、仮定 4.1 と前節の注 3.6 より、一般性を失うことなく、 $\mathcal{G}_i(F) = \{\succeq\}$ であるとしてよい。故に、前節の補題 3.7 より、点 $\bar{\omega}$ について $Q_i(\bar{\omega}, \bar{p}, \{\succeq\}) = 1$ が成立するとしてよい。従って、各 $x \in R_+^i$ について

$$\begin{aligned}
 V_i(x, \bar{\omega}, \bar{p}; \phi) &= U_i(x; Q_i(\bar{\omega}, \bar{p}, \cdot)) \\
 &= \int_{\mathcal{Z}_i} u_i(x, \cdot) dQ_i(\bar{\omega}, \bar{p}, \cdot) \\
 &= u_i(x, \mathcal{G}_i(\bar{\omega}))
 \end{aligned}$$

が成立する. ■

この補題は、予想関数が完全顕示的ならば、消費者は不確実性がないかのごとく行動していることを意味している。消費者 i が予想関数 ϕ にもとづいて行動するとしよう。もし自然のある状態 $\bar{\omega} \in \Omega$ が実現し、市場で $\bar{p} = \phi(\bar{\omega})$ なる価格 $\bar{p}$ が実現したとする。このとき消費者 i は自然の状態が $\bar{\omega}$ であることを知らない。しかし、関数 ϕ が完全顕示的ならば、市場価格 $\bar{p}$ より状態 $\bar{\omega}$ が実現していると期待して行動することになる。実際、上の補題は消費者の期待から計算された効用関数 $V_i(\cdot, \bar{\omega}, \bar{p}; \phi)$ が、状態 $\bar{\omega}$ のもとで実現するのは消費者 i の選好 $\mathcal{G}_i(\bar{\omega})$ を表す効用関数 $u_i(\cdot, \mathcal{G}_i(\bar{\omega}))$ と一致していることを主張している。即ち、消費者 i は最初から状態 $\bar{\omega}$ が実現していることを知っているのと同じ行動を取るのである。

命題 4.6: 合理的期待均衡 ϕ が完全顕示的であるとする。このとき適当な可測関数 $\hat{x}_i: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow R_+^l$ ($i=1, \dots, m$) が存在し、測度 μ の意味で、ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について以下のことが成立する。但し、 $p = \phi(\omega)$, $\mathcal{Z}_i = \mathcal{G}_i(\omega)$ ($i=1, \dots, m$) とする。

1) 各消費者 i について、 $\hat{x}_i(\omega) \in B_i(p)$ 且つ、任意の $z \in B_i(p)$ について $\hat{x}_i(\omega) \succeq_{iz} z$ が成立する。

$$2) \quad \sum_i \hat{x}_i(\omega) = \sum_i e_i$$

証明: 定義 4.3 における関数 x_i と ϕ より、関数 $\hat{x}_i$ を

$$\hat{x}_i(\omega) := x_i(\omega, \phi(\omega))$$

と定義すれば、補題 4.5 より直ちにこの命題を得る。■

この命題の意味するところは、完全顕示的な合理的期待均衡は不確実性

が存在しない状況と同じであるということである。市場価格にすべての情報が反映され、その結果消費者は自己の選好を恰も既知であるかの様に行動している。そのとき市場では予想された価格で均衡が実現する。言い換えれば、完全な条件付市場が存在する経済において均衡が達成されているのと同じである。このような合理的期待均衡の存在可能性が B. Allen (1981) によって分析されている。

最後に、完全顕示的な合理的期待均衡に関して、一つの望ましい性質を明らかにしよう。

命題 4.7: 完全顕示的な合理的期待均衡のもとで実現する配分はパレート最適である。即ち、定義 4.3 における可測関数

$$\psi: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow (\Delta, \mathcal{B}(\Delta)),$$

$$x_i: (\Omega \times \Delta, \mathcal{F}_i \times \mathcal{B}(\Delta)) \rightarrow R_+^l \quad (i=1, \dots, m)$$

より可測関数 $\bar{x}_i: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow R_+^l \quad (i=1, \dots, m)$ を

$$\bar{x}_i(\omega) = x_i(\omega, \psi(\omega))$$

と定義するとき、以下の条件を満たす可測関数 $y_i: (\Omega, \mathcal{F}) \rightarrow R_+^l \quad (i=1, \dots, m)$ が存在しない。

- 1) 測度 μ の意味で、ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について、

$$\sum_{i=1}^m y_i(\omega) \leq \sum_{i=1}^m e_i$$

が成立する。

- 2) すべての消費者 i において、測度 μ の意味で、ほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について

$$u_i(y_i(\omega), \mathcal{E}_i(\omega)) \geq u_i(\bar{x}_i(\omega), \mathcal{E}_i(\omega))$$

が成立する。

- 3) ある消費者 j について、集合

$$\{\omega \in \Omega \mid u_j(y_j(\omega), \mathcal{E}_j(\omega)) > u_j(\bar{x}_j(\omega), \mathcal{E}_j(\omega))\}$$

は、測度 μ の意味で、正の測度を持つ。

証明：仮に、上記の条件を満たす関数 $y_i (i=1, \dots, m)$ が存在したとする。
条件 2) と命題 4.6 より、測度 μ の意味でほとんどすべての $\omega \in \Omega$ について、各消費者 i に関して

$$\phi(\omega) \cdot y_i(\omega) \geq \phi(\omega) \cdot e_i$$

が成立する。特に、条件 3) と命題 4.6 より、消費者 j については、集合

$$\{\omega \in \Omega \mid \phi(\omega) \cdot y_j(\omega) > \phi(\omega) \cdot e_j\}$$

は測度 μ の意味で正の測度を持つ。従って、消費者 i について合計し、積分すると、

$$\int_{\Omega} \phi(\omega) \cdot \sum_{i=1}^m y_i(\omega) d\mu > \int_{\Omega} \phi(\omega) \cdot \sum_{i=1}^m e_i d\mu$$

を得る。これは条件 1) に矛盾する。■

数学注

以下では本論文の中で使われている数学の用語、表記方法および諸定理が説明されている。もちろん内容は必要最小限のものに限られ、数学の体系的な解説を目的とはしていない。すべて標準的なものばかりであり、定理の証明はいずれも省略してある。特殊と思われるものについては、その出典が記されている。定理ではないが、基本的と思われる事項は「注」として叙述されている。

§1 基礎的表記法

集合

集合 (set) とは**要素** (element) (あるいは**元**, 又は**点** (point)) と呼ばれるものの集まりである。ある集合 A とある要素 a について、 $a \in A$ と書き、要素 a は集合 A に属することを意味する。 $a \notin A$ と書き、要素 a は集合 A の要素でないことを意味する。何も要素がない集合を**空集合**

(empty set) と呼び、記号 ϕ で表す。特に、集合をその要素とする集合を**集合系** (family) と呼ぶことがある。

集合 A, B について、 $A \subset B$ または $B \supset A$ と書いて、集合 A に属す要素はすべて集合 B にも属することを意味する。このとき A は B の**部分集合** (subset) であると言う。 $A=B$ と書いて、二つの集合は同じものであること ($A \subset B$ 且つ $A \supset B$) であることを意味する。

集合の演算

二つの集合 A, B について、以下のような演算が定義される。

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ 又は } x \in B\}$$

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ 且つ } x \in B\}$$

$$A \setminus B = \{a \in A | a \notin B\}$$

これらはそれぞれ集合 A, B の**和** (union), **積** (intersection), A における B の**補集合** (complement) と呼ばれる。

ある集合系 $\mathcal{A}$ に属す集合の和と積を次のように表記する。

$$\bigcup \mathcal{A} = \{a | \text{ある } A \in \mathcal{A} \text{ が存在し, } a \in A \text{ となる.}\}$$

$$\bigcap \mathcal{A} = \{a | \text{任意の } A \in \mathcal{A} \text{ について, } a \in A \text{ となる.}\}$$

もしある添字の集合 I に属す各添字 $i \in I$ について、ある集合 $A_i \in \mathcal{A}$ が対応して、 $\mathcal{A} = \{A_i | i \in I\}$ となるとき、 $\bigcup \mathcal{A}$ と $\bigcap \mathcal{A}$ はそれぞれ、 $\bigcup_{i \in I} A_i, \bigcap_{i \in I} A_i$ とも表記する。

関数

二つの集合 X, Y について、 $f: X \rightarrow Y$ と書き、集合 X の各要素を集合 Y 内の一要素に対応させる一つの関係を表し、それを X から Y への**関数** (function) (又は、**写像** (mapping) と呼ぶ。 X の各要素 x に対応する Y の要素を $f(x)$ で表す。 X を関数 f の**定義域** (domain), Y を**値域** (range) と呼ぶ。定義域と値域が明らかであるとき、省略して単に関数 f と書く。点 $y \in Y$ の**逆像** (inverse image) とは

$$f^{-1}(y) = \{x \in X | f(x) = y\}$$

で定義される集合を意味する。更に、集合 $U \subset Y$ の逆像とは

$$f^{-1}(U) = \{x \in X | f(x) \in U\}$$

で定義される集合を意味する。

二つの関数 $f: X \rightarrow Y, g: Z \rightarrow W$ において、 $Y \subset Z$ であるとき、関数 f と g の合成 (composite) 関数は、 $g \circ f$ と表記され、

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

で定義される X から W への関数のことである。

対応

二つの集合 X, Y について、 $F: X \rightarrow Y$ と書き、集合 X の各要素を集合 Y の部分集合に対応させる一つの関係を表し、それを対応 (correspondence) と呼ぶ。即ち、各要素 $x \in X$ に集合 $F(x) \subset Y$ を対応させる関係である。

関係

二つの集合を A, B とする。二要素 $a \in A$ と $b \in B$ の順序付けられた組を (a, b) で表すとき、集合 A と B の直積 (direct product) と呼ばれる集合を

$$A \times B = \{(a, b) | a \in A, b \in B\}$$

と定義する。 $\phi \subset A \times B$ である集合 ϕ を、 A と B の関係 (relation) と呼ぶ。 $(a, b) \in \phi$ のことを、 $a \phi b$ と書くことがある。

特に $A=B$ のとき、関係 $\phi \subset A \times A$ は集合 A 上の二項関係 (binary relation) と呼ばれる。以下に二項関係 $\phi \subset A \times A$ にしばしば仮定される諸性質の名称と定義を述べる。

反 射 性: 任意の $a \in A$ について、 $(a, a) \in \phi$ である。

非反射性: 任意の $a \in A$ について、 $(a, a) \notin \phi$ である。

完 備 性: $a \neq b$ である任意の $a, b \in A$ について、 $(a, b) \in \phi$ 又は $(b, a) \in \phi$

である.

推移性: $(a, b) \in \psi$ 且つ $(b, c) \in \psi$ ならば, $(a, c) \in \psi$ である.

ネットと点列

ある添字の集合 I が次の性質を持つある二項関係 $\geq$ で順序付けられているとき, **有向集合** (directed set) と呼ばれる.

- 1) 二項関係 $\geq$ は反射性と推移性を満す.
- 2) 任意 $i, j \in I$ に対して, $k \geq i$ かつ $k \geq j$ なる $k \in I$ が存在する.

上記の性質を持つ有向集合 I の各要素 i がある集合 S 内の一要素 s_i に対応付けられたものを, $(s_i)_{i \in I}$ または単に s_i と表記し, 集合 S 内の**ネット** (net) と呼ぶ. 特に, 添字の集合 I が自然数の集合であり, 二項関係が通常の数的大小関数であるようなネットは**点列** (sequence) と呼ばれる.

ネット $(s_i)_{i \in I}$ は, 集合 I から集合 S への関数と見なすことが出来る. ある有項集合 J から集合 I へのある関数 $f: J \rightarrow I$ が以下の性質を持つとする. 但し, $\geq$ と $\geq_*$ はそれぞれ集合 I と J の二項関係である.

- 1) もし $i \geq_* j$ ならば, $f(i) \geq f(j)$ である.
- 2) 各 $i \in I$ について, ある $j \in J$ が存在して $f(j) \geq i$ となる.

このとき, 合成関数

$$j \in J \rightarrow f(j) \in I \rightarrow s_{f(j)} \in S$$

はネットとなる. このようなネット $(s_{f(j)})_{j \in J}$ をネット $(s_i)_{i \in I}$ の**部分ネット** (subnet) と呼ぶ. 特に部分ネットが点列であるとき, それを**部分点列** (subsequence) と呼ぶ.

特殊記号

以下にしばしば使われる特殊記号の意味を述べておく.

$\forall$: 任意の --- について

$\exists$: --- が存在して

- $\&$: --- 且つ...である.
 $\Rightarrow$: もし---ならば...である.
 $\Leftrightarrow$: --- と...は同値である.
 $:=$: --- を...と定義する.

§2 位相空間

位相空間

ある集合 X と, その集合の部分集合を要素とするある集合系 $\mathcal{T}$ の組 $(X, \mathcal{T})$ について次のことを定義する.

定義 2.1: 組 $(X, \mathcal{T})$ が以下の性質を満足するとき, **位相空間** (topological space) と呼ばれる.

- 1) 空集合 $\emptyset$ と集合 X は $\mathcal{T}$ に属す.
- 2) $\mathcal{T}$ に属す有限個の集合からなる積は $\mathcal{T}$ に属す.
- 3) $\mathcal{T}$ に属す任意の個数の集合からなる和は $\mathcal{T}$ に属す.

このとき集合系 $\mathcal{T}$ は空間 X の**位相** (topology) と呼ばれ, また集合系 $\mathcal{T}$ に属す集合は X の**開集合** (open set) と呼ばれる.

上記の三つの性質を持つ「開集合」と呼ばれる集合を定義することを, 集合 X に「位相を与える」という言い方をする. 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の位相 $\mathcal{T}$ がすでに明らかであるとき, 省略して位相空間 X と呼ぶ.

定義 2.2: 位相空間 X の部分集合 $G \subset X$ が**閉集合** (closed set) であるとは, 補集合 $X \setminus G$ が閉集合となるような集合であることを意味する.

定理 2.3: 位相空間 X の閉集合について以下のことが成立する.

- 1) 空集合 $\emptyset$ と空間 X は閉集合である.
- 2) 有限個の閉集合からなる和は閉集合である.
- 3) 任意の個数の閉集合からなる積は閉集合である.

部分空間

位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の部分集合 $Y \subset X$ に, 空間 X の位相から自然な方法で位相が与えられる. 集合 Y の部分集合からなる集合系 $\mathcal{T}_Y$ を

$$\mathcal{T}_Y := \{V \mid V = Y \cap U \ \exists U \in \mathcal{T}\}$$

と定義すると, 組 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ は, 定義 2.1 の意味において, 位相空間となる.

定義 2.4: 上記のように定義される位相空間 $(Y, \mathcal{T}_Y)$ は位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の部分空間 (subspace) と呼ばれる. 位相 $\mathcal{T}_Y$ は位相 $\mathcal{T}$ の**相対位相** (relative topology) と呼ばれる.

相対位相 $\mathcal{T}_Y$ に注目して, 空間 Y の部分集合 S を, $S \in \mathcal{T}_Y$ であるとき Y 内の開集合, $Y \setminus S \in \mathcal{T}_Y$ であるとき Y 内の閉集合と呼ぶことがある.

積空間

二つの位相空間 $(X, \mathcal{T})$, $(Y, \mathcal{S})$ について, 直積集合 $X \times Y$ の位相 $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ が次のように定義される.

$$\mathcal{T} \times \mathcal{S} := \{W \subset X \times Y \mid \forall (x, y) \in W, \exists U \in \mathcal{T} \ \& \ \exists V \in \mathcal{S}, \\ (x, y) \in U \times V \subset W\}$$

明らかに, 組 $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{S})$ は, 定義 2.1 の意味において, 位相空間となる.

定義 2.5: 上記のように定義される位相空間 $(X \times Y, \mathcal{T} \times \mathcal{S})$ は**直積 (位相) 空間** (product (topological) space) と呼ばれる. また位相 $\mathcal{T} \times \mathcal{S}$ は**直積位相** (product topology) と呼ばれる.

内部, 外部, 閉包, 境界

位相空間 $(X, \mathcal{T})$ の部分集合 S の**内部** (interior), **外部** (exterior), **閉包** (closure), **境界** (boundary) と呼ばれる集合はそれぞれ以下のように定義される.

$$\text{int } S := \bigcup \{U \in \mathcal{T} \mid U \subset S\}$$

$$\text{ext } S := \bigcup \{U \in \mathcal{T} \mid U \subset X \setminus S\}$$

$$\text{cl } S := X \setminus \text{ext } S$$

$$\text{bd } S := \text{cl } S \setminus \text{int } S$$

コンパクト性

定義 2.6: 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ がコンパクト (compact) であることは, $X \subset \bigcup \mathcal{U}$ となるような任意の集合系 $\mathcal{U} \subset \mathcal{T}$ において, 適当に有限個の集合からなる集合系 $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ を選ぶと, $X \subset \bigcup \mathcal{U}_0$ となることを意味する.

位相空間 X の部分集合 Y が, 空間 X の部分空間と見なしたときにコンパクトになる場合, Y を X のコンパクト集合と呼ぶことがある.

ネットの収束

位相空間 $(X, \mathcal{T})$ において, 集合 X 内のあるネットを $(x_i)_{i \in I}$ とし, ある点を $x_0 \in X$ とする. また有向集合 I に付随する二項関係を $\geq$ とする.

定義 2.7: ネット $(x_i)_{i \in I}$ が点 x_0 に収束 (converge) するとは, $x_0 \in U$ となるような任意の集合 $U \in \mathcal{T}$ に対して, 適当な $i_0 \in I$ が存在し, もし $i \geq i_0$ ならば $x_i \in U$ となることを意味する. この時, 点 x_0 はネット $(x_i)_{i \in I}$ の極限 (limit) (あるいは, 収束点) と呼ばれる.

ネット $(x_i)_{i \in I}$ が点 x_0 に収束することを, $\lim_{i \in I} x_i = x_0$ あるいは, 単に $x_i \rightarrow x_0$ と表記する.

連続関数

二つの位相空間 X, Y において, 関数 $f: X \rightarrow Y$ が定義されているとする.

定義 2.8: 関数 $f: X \rightarrow Y$ が連続 (continuous) であるとは, 任意の Y の開集合 U の逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合になることを意味する.

定理 2.9: 関数 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるための必要十分条件は, 任意の Y の閉集合 G の逆像 $f^{-1}(G)$ が X の閉集合となることである.

連続対応

二つの位相空間 X, Y において, 対応 $F: X \rightarrow Y$ が定義されているとする.

定義 2.10: 対応 $F: X \rightarrow Y$ が上半連続 (upper hemi-continuous) であるとは, $F(\bar{x}) \neq \emptyset$ であるような任意の点 $\bar{x} \in X$ において, 次のことが成立することである. $F(\bar{x}) \subset V$ であるような任意の Y の開集合 V に対して, $\bar{x} \in U$ となるような適当な X の開集合 U が存在し, 任意の $x \in U$ について $F(x) \subset V$ となる.

定義 2.11: 対応 $F: X \rightarrow Y$ が下半連続 (lower hemi-continuous) であるとは, $F(\bar{x}) \neq \emptyset$ であるような任意の点 $\bar{x} \in X$ において, 次のことが成立することである. $F(\bar{x}) \cap V \neq \emptyset$ であるような任意の Y の開集合 V に対して, $\bar{x} \in U$ となるような適当な X の開集合 U が存在し, 任意の $x \in U$ について $F(x) \cap V \neq \emptyset$ となる.

定義 2.12: 対応 $F: X \rightarrow Y$ が連続であるとは, 対応 F が上半および下半連続であることを意味する.

定義 2.13: 対応 $F: X \rightarrow Y$ が閉 (closed) であるとは, 対応 F のグラフ, $\{(x, y) \in X \times Y | y \in F(x)\}$, が $X \times Y$ の閉集合であることを意味する.

距離空間

集合 X と集合 $X \times X$ 上の実数値関数 d との組 (X, d) について次のことを定義する.

定義 2.14: 組 (X, d) が以下の性質を満たすとき, 距離空間 (metric space) と呼ぶ. また関数 d は距離 (distance) と呼ばれる.

- 1) $d(x, y) = 0$ であるための必要十分条件は $x = y$ である.
- 2) 任意の $x, y \in X$ について, $d(x, y) = d(y, x)$ である.
- 3) 任意の $x, y, z \in X$ について, 次の三角不等式が成立する.

$$d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$$

距離空間 (X, d) において, 点 $x \in X$ を中心とする半径 $r > 0$ の開球 (open ball) を以下のように定義する.

$$B_r(x) := \{y \in X \mid d(x, y) < r\}$$

このとき空間 X に一つの位相 $\mathcal{T}_d$ が次のように定義される.

$$\mathcal{T}_d := \{U \subset X \mid \forall x \in U, \exists r > 0, B_r(x) \subset U\}$$

この様に定義される組 $(X, \mathcal{T}_d)$ は, 定義 2.1 の意味において, 明らかに位相空間となる. 距離空間 (X, d) は位相が距離 d により上述のように定義される位相空間のことである. また距離 d が既に明らかなきは省略して距離空間 X と呼ぶ.

定義 2.15: 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ が**第二可算的** (second countable) であるとは位相 $\mathcal{T}$ が可算基 (countable base) を持つことを意味する. 即ち, ある可算個の要素からなる集合系 $\mathcal{B} \subset \mathcal{T}$ が存在し,

$$\mathcal{T} = \{U \mid \exists \mathcal{C} \subset \mathcal{B}, U = \bigcup \mathcal{C}\}$$

が成立する.

定義 2.16: 位相空間 $(X, \mathcal{T})$ が**可分** (separable) であるとは, 可算密部分集合が存在することを意味する. 即ち, 可算個の要素からなる部分集合 $D \subset X$ が存在して, 任意の点 $x \in X$ と $x \in U$ なる任意の $U \in \mathcal{T}$ について $U \cap D \neq \emptyset$ が成立する.

定理 2.17: 距離空間 X が可分であるための必要十分条件は, それが第二可算的であることである.

§3 ユークリッド空間

実数

実数直線を R で表す. 拡張された実数直線を $\bar{R}$ で表す. 即ち,

$$\bar{R} = \{-\infty\} \cup R \cup \{+\infty\}$$

$a \leq b$ なる二つの要素 $a, b \in \bar{R}$ について, 四種類の区間 (interval) を以下

の様に定義する.

$$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\}$$

$$[a, b) = \{x \in R \mid a \leq x < b\}$$

$$(a, b] = \{x \in R \mid a < x \leq b\}$$

$$(a, b) = \{x \in R \mid a < x < b\}$$

部分集合 $X \subset R$ について, **上限** (supremum) と **下限** (infimum) をそれぞれ以下の様に定義し, また表記する.

- $\sup X$ とはある数 $b \in \bar{R}$ で以下の性質を持つもの.

$$\forall x \in X, x \leq b \text{ \& \& } \forall a < b, (a, b) \cap X \neq \emptyset$$

- $\inf X$ とはある数 $b \in \bar{R}$ で以下の性質を持つもの.

$$\forall x \in X, b \leq x \text{ \& \& } \forall a > b, [b, a) \cap X \neq \emptyset$$

有限次元ユークリッド空間

記号 R^m によって, 実数直線 R の m 個の直積集合を表すことにする. 但し, m は正の整数とする. 特に $m=1$ とき, 実数の集合 R を意味する. 点 $x \in R^m$ はその第 i 番目の要素を x_i で表せば, $x = (x_1, \dots, x_m)$ と表される m 次元ベクトルである.

任意の $x, y \in R^m$ について, 以下の様な順序を定義する.

- $x \geq y \iff x_i \geq y_i \forall i$
- $x > y \iff x_i > y_i \forall i$
- $x \geq y \iff x \geq y \text{ \& \& } x \neq y$

非負象限 は $R_+^m = \{x \in R^m \mid x \geq 0\}$ と定義される.

二つのベクトル $x, y \in R^m$ の**内積** (inner product) を $x \cdot y$ で表し,

$$x \cdot y := x_1 y_1 + \dots + x_m y_m$$

と定義する. ベクトル $x \in R^m$ の**ノルム** (norm) は

$$\|x\| := \sqrt{x \cdot x}$$

と定義される. 二点 $x, y \in R^m$ の**ユークリッドの距離** (Euclidean distance)

ce) は

$$d(x, y) := \|x - y\|$$

と定義される。このとき組 (R^m, d) は、定義 2.14 の意味において、距離空間となる。

定義 3.1: 距離空間 (R^m, d) は m 次元ユークリッド空間 (m -dimensional Euclidean space) と呼ばれる。

ユークリッド空間 R^m の位相とは、定義 2.14 のように距離 d から与えられる位相を指す。

定理 3.2: 空間 R^m の部分集合が閉集合であるための必要十分条件は、その集合内の任意の収束点列の極限が必ずその集合に属することである。

定義 3.3: 部分集合 $X \subset R^m$ が下に有界 (bounded below) であるとは、任意の $x \in X$ について $b \leq x$ となる適当なベクトル $b \in R^m$ が存在することである。また上に有界 (bounded above) であるとは、任意の $x \in X$ について $x \leq b$ となる適当なベクトル $b \in R^m$ が存在することである。更に、下にも上にも有界であるとき有界 (bounded) であるという。

定理 3.4: 空間 R^m の部分集合 X について、以下のことは同値である。

- 1) 集合 X はコンパクトである。
- 2) 集合 X は有界な閉集合である。
- 3) 集合 X 内の任意の点列からは、その集合内に収束する部分点列を選び出すことが出来る。

関数 $f: X \rightarrow Y$ において、 $X \subset R^m, Y \subset R^l$ とする。但し、集合 X, Y はそれぞれ R^m, R^l の定義 2.4 の意味における部分空間と見なすことにする。

定理 3.5: 関数 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるための必要十分条件は、もし X 内の任意の点列 x_n がある点 x_0 に収束するならば、対応する Y 内の点列 $f(x_n)$ も点 $f(x_0)$ に収束することである。

定理 3.6: 関数 $f: X \rightarrow R$ について、集合 $X \subset R^m$ はコンパクトであるな

らば、関数 f には最大値および最小値が存在する。即ち、ある $x, \bar{x} \in X$ が存在し、任意の $x \in X$ について、 $f(x) \leq f(\bar{x})$ が成立する。

§4 不動点定理

凸集合

定義 4.1: 集合 $X \subset R^m$ が凸 (convex) であるとは、任意の二点 $x, x' \in X$ と任意の数 $\theta \in (0, 1)$ について、 $\theta x + (1-\theta)x' \in X$ が成立することである。

n 個のベクトル $v_1, \dots, v_n \in R^m$ が次の性質を持つとき、一次独立 (linearly independent) であるという。即ち、もし実数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ について $\sum_{i=1}^n \alpha_i v_i = 0$ ならば、 $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ となる。凸集合 $X \subset R^m$ の中から $n+1$ 個の点 $x_0, \dots, x_n$ を選び、 $v_i = x_i - x_0 (i=1, \dots, n)$ としたとき、 n 個のベクトル $v_1, \dots, v_n$ が一次独立になるとする。この様にすることが可能である整数 n の最大値を集合 X の次元 (dimension) と呼び、 $\dim X$ で表す。

凸集合 $X \subset R^m$ の境界と内部はそれぞれ $\partial X, \dot{X}$ で表記され、以下の様に定義される。

$$\partial X = \{x \in X \mid \exists y \in X, \alpha x + (1-\alpha)y \notin X \forall \alpha > 1\}$$

$$\dot{X} = \text{cl } X \setminus \partial X$$

不動点

以下においてユークリッド空間の部分集合を定義域あるいは値域とする連続関数ならびに連続対応を考える。このとき当然のことながら定義域および値域は部分空間と見なされている。

定理 4.2 [Brouwer の不動点定理]: 集合 $X \subset R^m$ が非空、凸、コンパクトな部分集合であり、関数 $f: X \rightarrow X$ が連続であるならば、関数 f は不動点 (fixed-point) を持つ。即ち、ある点 $\bar{x} \in X$ において $f(\bar{x}) = \bar{x}$ が成立する。

定理 4.3: 対応 $F: X \rightarrow Y$ において、値域 Y はコンパクトとする。対応 F が閉であるための必要十分条件は、対応 F が上半連続であり、且つ閉値 (各 $x \in X$ について、 $F(x)$ が Y の閉集合) であることである。

定理 4.4 [角谷の不動点定理]: 対応 $F: X \rightarrow X$ において、定義域 X は R^m の非空、凸、コンパクトな部分集合とする。また対応は閉であり、各 $x \in X$ において、像 $F(x)$ は非空な凸集合であるとする。このとき対応は不動点を持つ。即ち、ある点 $\bar{x} \in X$ において、 $\bar{x} \in F(\bar{x})$ が成立する。

錐

定理 4.5: 部分集合 $C \subset R^m$ が (原点 0 を頂点とする) 錐 (cone) であるとは、任意の $x \in C$ と任意の $\theta \geq 0$ について、 $\theta x \in C$ が成立するような集合を意味する。

部分集合 $X \subset R^m$ の極 (polar) は $\text{pol } X$ で表わされ、以下の様に定義される。

$$\text{pol } X := \{p \in R^m | p \cdot x \leq 0\}$$

定理 4.6: 上半連続な対応 $F: X \rightarrow R^m$ において、定義域 X は R^m の非空、凸、コンパクトな部分集合であり、 $0 \notin X$ とする。また各 $x \in X$ について、像 $F(x)$ は非空、凸な閉集合であるとする。更に、各 $x \in X$ について $x \cdot F(x) \leq 0$ が成立する。このとき、ある点 $\bar{x} \in X$ が存在し $F(\bar{x}) \cap \text{pol } X \neq \emptyset$ が成立する。

§5 測度論

測度空間

ある集合 Ω と、その部分集合を要素とするある集合系 $\mathcal{A}$ の組 $(\Omega, \mathcal{A})$ について次のことを定義する。

定義 5.1: 組 $(\Omega, \mathcal{A})$ が以下の性質を持つとき可測空間 (measurable space) と呼ばれる。

- 1) $\emptyset \in \mathcal{A}, \Omega \in \mathcal{A}$ である.
- 2) もし $A \in \mathcal{A}$ ならば, $\Omega \setminus A \in \mathcal{A}$ である.
- 3) もし各 $n=1, 2, \dots$ について $A_n \in \mathcal{A}$ ならば

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A}, \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \text{ が成立する.}$$

上記の性質をもつ集合系 $\mathcal{A}$ は, 集合 Ω の部分集合からなる σ -代数 (σ -algebra) と呼ばれる. 集合系 $\mathcal{A}$ に属す集合を可測集合 (measurable set) .と言う.

位相空間 $(X, \mathcal{T})$ に対して, 一つの σ -代数を

$$\mathcal{B}(X) := \bigcap \{ \mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ は } \mathcal{A} \supset \mathcal{T} \text{ なる } \sigma\text{-代数} \}$$

と定義することが出来る. 即ち, 集合系 $\mathcal{B}(X)$ は集合系 $\mathcal{T}$ を含む最小の σ -代数である. このとき, 組 $(X, \mathcal{B}(X))$ は可測空間となる. 集合系 $\mathcal{B}(X)$ に属する集合は, X のボレル可測 (Borel-measurable) 集合と呼ばれる.

積 (可測) 空間

二つの可測空間 $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ について, 集合系

$$\{A_1 \times A_2 \mid A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2\}$$

を含む最小の σ -代数を $\mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2$ で表す. このとき, 組 $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathcal{A}_1 \times \mathcal{A}_2)$ を積 (可測) 空間 (product (measurable) space) と呼ぶ.

可測関数

二つの組 $(\Omega_1, \mathcal{A}_1), (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$ を可測空間とする. このとき, 次のことを定義する.

定義 5.2: 関数 $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ が可測 (measurable) であるとは, 任意の $A \in \mathcal{A}_2$ について $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}_1$ となる関数であることを意味する.

可測関数は, その可測性を明らかにするため, 通常は

$$f: (\Omega_1, \mathcal{A}_1) \rightarrow (\Omega_2, \mathcal{A}_2)$$

と表す. 但し, 集合 Ω_1, Ω_2 と対をなす σ -代数 $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ が明らかであ

るときは、単に $f: \Omega_1 \rightarrow \Omega_2$ と表記する。

測度空間

集合 Ω , 集合系 $\mathcal{A}$, 関数 $\mu: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ の三つのものからなる組合せ $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ について、次のことが定義される。

定義 5.3: 組合せ $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ が以下の性質を持つとき**測度空間** (measure space) と呼ばれる。

- 1) 組 $(\Omega, \mathcal{A})$ は可測空間である。
- 2) $\mu(\Omega) = 1$
- 3) 関数 μ は**可算加法的** (countably additive) である。即ち、もし各 $n=1, 2, \dots$ について $A_n \in \mathcal{A}$ であり、更に、 $i \neq j$ ならば $A_i \cap A_j = \emptyset$ であるならば、

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

が成立する。

上記の性質を持つ関数 μ は**(確率) 測度** ((probability) measure) と呼ばれる。

積分

測度空間 $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ から実数直線 $(R, \mathcal{B}(R))$ への関数を考察する。

定義 5.4: 可測関数 $f: \Omega \rightarrow R$ は**階段関数** (step-function) であるとは、それが有限個の値を取る関数であることを意味する。

注 5.5: 関数 $f: \Omega \rightarrow R$ が可測であるための必要十分条件は、適当な段階関数からなる関数列 $f_n: \Omega \rightarrow R$ が存在し、各 $\omega \in \Omega$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ が成立することである。

可測関数 $f: \Omega \rightarrow R$ が段階関数なば、定義より、関数は有限個の値 $a_1, \dots, a_n \in R$ を取る。従って、適当な Ω の有限可測分割が存在し、即ち、適当な $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{A}$ について

$$A_i \cap A_j = \emptyset (i \neq j) \text{ \& } \bigcup_{i=1}^n A_i = \Omega$$

となり, 更に各 i について,

$$f_i(\omega) = a_i \quad \forall \omega \in A_i$$

が成立する. この場合, 段階関数の積分は以下のように定義される.

定義 5.6: 段階関数 f の積分 (integral) は $\int f d\mu$ と表記され,

$$\int f d\mu := \sum_{i=1}^n a_i \mu(A_i)$$

と定義される.

注 5.7: 可測関数 $f: \Omega \rightarrow R$ が非負であるとする. 即ち, 任意の $\omega \in \Omega$ について $f(\omega) \geq 0$ である. このとき以下のことが成立する.

1) 関数 f に収束する適当な増加段階関数列が存在する. 即ち, ある段階関数列 f_n が存在し, 各 $\omega \in \Omega$ と $n=1, 2, \dots$ について, $f_n(\omega) \leq f_{n+1}(\omega)$ であり, また $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(\omega) = f(\omega)$ となる.

2) 1) における段階関数列 f_n について, 段階関数の積分の極限值, $\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$ が存在する. 但し, 極限值が $+\infty$ の場合も含む.

3) 2) における極限值は関数列の取り方には依存しない. 即ち, 1) の性質を持つ任意に二つの段階関数列 f_n, g_n について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int g_n d\mu$$

が成立する.

定義 5.8: 非負可測関数 $f: \Omega \rightarrow R$ が可積分 (integrable) であるとは, 上記の注の 1) の性質を持つ段階関数列 f_n について

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu < +\infty$$

となることである. また関数 f の積分は

$$\int f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu$$

と定義される.

任意の可測関数 $f: \Omega \rightarrow R$ について, 二つの非負可測関数 f^+, f^- が以下のように定義される.

$$f^+(\omega) = \max\{f(\omega), 0\}$$

$$f^-(\omega) = \max\{-f(\omega), 0\}$$

定義 5.9: 可測関数 $f: \Omega \rightarrow R$ が可積分であるとは、関数 f^+ と f^- が共に可積分であることを意味する。関数 f の積分は

$$\int f d\mu := \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu$$

と定義される。

§6 測度の弱収束

弱位相

集合 X を距離空間、集合系 $\mathcal{B}(X)$ を X のすべてのボレル可測部分集合からなる集合系とすると、組 $(X, \mathcal{B}(X))$ は可測空間となる。可測空間 $(X, \mathcal{B}(X))$ 上のすべての(確率)測度の集合を $\mathcal{M}(X)$ で表す。また X 上で定義されるすべての有界な実数値連続関数の集合を $\mathcal{C}(X)$ で表すことにする。

測度 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ 、有限個の関数 $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{C}(X)$ 、正の実数 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ について集合 $\mathcal{M}(X)$ の部分集合を定義する。

$$V_\mu(f_1, \dots, f_n, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n) := \{\nu \in \mathcal{M}(X) \mid \left| \int f_i d\nu - \int f_i d\mu \right| < \varepsilon_i \forall i\}$$

この様に定義される集合を測度 μ の近傍と呼び、関数 $f_1, \dots, f_n$ と実数 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n$ を明示的に示す必要のないときは、単に V_μ と表記する。

定義 6.1: 集合 $\mathcal{M}(X)$ の部分集合 U において、任意の $\mu \in U$ について $V_\mu \subset U$ となるような適当な μ の近傍 V_μ が存在するとき、集合 U は開集合であると定義する。これより定義される集合 $\mathcal{M}(X)$ の位相を弱位相 (weak topology) と呼ぶ。

注 6.2: 実際、このように定義された位相が定義 2.1 の三条件に対応する位相の公理を満足することは容易に示すことが出来る。

弱収束

定義 6.3: 集合 $\mathcal{M}(X)$ 内のネット $(\mu_i)_{i \in I}$ が点 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ に弱収束

(weak convergence) するとは、定義 6.1 における弱位相の意味で収束することを意味する。

注 6.4: 集合 $\mathcal{M}(X)$ 内のネット μ_i が点 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ に弱収束するための必要十分条件は、任意の $f \in \mathcal{C}(X)$ について、実数直線 R 内のネット $\int f d\mu_i$ が点 $\int f d\mu$ に収束することである。

定理 6.5 [K. P. Parthasarathy (1967, Thm. 6. 1, p. 40)]: 集合 $\mathcal{M}(X)$ 内のネットを μ_i , ある点を μ とする。このとき以下の事項はすべて同値である。

- 1) ネット μ_i は点 μ に弱収束する。
- 2) 任意の一樣連続な関数 $f \in \mathcal{C}(X)$ について、実数直線 R 内のネット $\int f d\mu_i$ が点 $\int f d\mu$ に収束する。
- 3) 任意の閉集合 $G \subset X$ について次のことが成立する。

$$\limsup_i \mu_i(G) \leq \mu(G)$$

- 4) 任意の開集合 $U \subset X$ について次のことが成立する。

$$\liminf_i \mu_i(U) \geq \mu(U)$$

- 5) $\mu(\text{bd } B) = 0$ であるような任意の集合 $B \in \mathcal{B}(X)$ について次のことが成立する。

$$\lim_i \mu_i(B) = \mu(B)$$

定理 6.6 [K. P. Parthasarathy (1967, Thm. 6. 2, p. 43)]: 空間 $\mathcal{M}(X)$ が可分な距離空間になるための必要十分条件は、空間 X が可分な距離空間であることである。

サポート

空間 X が可分な距離空間であるとき、各測度 $\mu \in \mathcal{M}(X)$ について、以下のような集合が定義される。

$$\text{supp } \mu := \bigcap \{G \mid \mu(G) = 1, G \text{ は } X \text{ の閉部分集合}\}$$

このように定義される集合 $\text{supp } \mu$ は測度 μ のサポート (support),

又は、**スペクトラム** (spectrum) と呼ばれる。集合 $\text{supp } \mu$ は測度 μ の意味で測度が 1 となる最小の閉集合である。

定理 6.7 [K. P. Parthasarathy (1967, Thm. 6, 3, p. 44)]: 空間 X は可分な距離空間であるとする。このとき、サポートが有限集合であるような測度の集合は空間 $\mathcal{M}(X)$ において稠密である。

退化した測度

点 $x \in X$ に**退化した** (degenerate) 測度とは、点 x からなる集合 $\{x\}$ の測度を 1 とするような測度を意味する。そのような測度を δ_x で表す。即ち、 δ_x は、 $\delta_x(\{x\})=1$ となるような集合 $\mathcal{M}(X)$ の一つの測度である。集合 D を次のように定義する。

$$D := \{\delta_x | x \in X\}$$

定理 6.8 [K. P. Parthasarathy (1976 Lem. 6.1, p. 42)]: 集合 D を空間 $\mathcal{M}(X)$ の部分空間と見なすと、空間 X は空間 D と位相同形である。即ち、写像 $x \rightarrow \delta_x$ は一对一の連続写像であり、その逆写像も存在し、連続である。

§7 条件付確率

可算性

可測空間 $(X, \mathcal{A})$ において、次の性質を定義する。

定義 7.1: $(X, \mathcal{A})$ が**可算生成的** (countably generated) であるとは、ある可算個の要素から集合系 $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ が存在し、 $\mathcal{A}$ が $\mathcal{C}$ を含む最小の σ -代数であることを意味する。

定義 7.2: 集合 $A \in \mathcal{A}$ が $\mathcal{A}$ -**アトム** (atom) であるとは、もし $E \subset A$, $E \in \mathcal{A}$ ならば $E=A$ 又は $E=\emptyset$, となるような集合であることを意味する。

定理 7.3 [K. P. Parthasarathy (1967, Thm. 2, 1, p. 132)]: もし $(X,$

$\mathcal{A}$ が可算生成のならば、各点 $x \in X$ について、 $x \in A_x$ となるような $\mathcal{A}$ -アトム A_x が一意的に存在する。更に、任意の $E \in \mathcal{A}$ について $E = \bigcup \{A_x | x \in E\}$ が成立する。

定義 7.4: $(X, \mathcal{A})$ が (標準的) ボレル ((standard) Borel) 空間であるとは、ある完備可分距離空間 Y が存在し、

$$X \in \mathcal{B}(Y) \text{ \& } \mathcal{A} = \{E | \exists B \in \mathcal{B}(Y), E = X \cap B\}$$

が成立する。

条件付確率

確率空間 $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ と可測空間 $(X_1, \mathcal{A}_1)$, $(X_2, \mathcal{A}_2)$ において、可測関数 $f_1: \Omega \rightarrow X_1, f_2: \Omega \rightarrow X_2$ が与えられているものとする。

定義 7.5: f_1 が与えられたときの f_2 に対する μ の正則的条件付分布 (regular conditional distribution) とは、以下の性質を持つ関数

$$Q: X_1 \times \mathcal{A}_2 \rightarrow [0, 1]$$

のことを意味する。

- 1) 各 $x_1 \in X_1$ について、 $Q(x_1, \cdot)$ は $\mathcal{A}_2$ 上の確率測度である。
- 2) 各 $A_2 \in \mathcal{A}_2$ について、 $Q(\cdot, A_2)$ は X_1 上の可測関数である。
- 3) もし $A_1 \in \mathcal{A}_1, A_2 \in \mathcal{A}_2$ ならば、

$$\int_{A_1} Q(\cdot, A_2) d\mu \cdot f_1^{-1} = \mu(f_1^{-1}(A_1) \cap f_2^{-1}(A_2))$$

が成立する。

定理 7.6 [D. Freedman (1983, Thm. 41, p. 348)]: もし $(X_2, \mathcal{A}_2)$ が標準的ボレル空間ならば、正則的条件付分布 Q が存在する。

定理 7.7 [D. Freedman (1983, Thm. 42, p. 348)]: もし $(X_2, \mathcal{A}_2)$ が可算生成のならば、正則的条件付分布 Q は一意である。即ち、二つの正則的条件付分布 Q, Q' について、集合

$$\{x \in X_1 | \forall A \in \mathcal{A}_2, Q(x, A) = Q'(x, A)\}$$

は $\mathcal{A}_1$ -可測であり、測度 $\mu \cdot f_1^{-1}$ の意味で 1 の測度を持つ。

定理 7.8 [D. Freedman (1983, Thm. 51, p. 353)]: もし $(X_1, \mathcal{A}_1)$ が可算生成的ならば, 集合

$$\{\omega \in \Omega \mid x = f_1(\omega) \text{ \& } f_1^{-1}(x) \subset f_2^{-1}(A) \Rightarrow Q(x, A) = 1\}$$

は $\mathcal{F}$ -可測であり, 測度 μ の意味で, 1 の測度を持つ.

参考文献

- Allen, B. (1981) "Generic Existence of completely revealing equilibria for economies with uncertainty when prices convey information," *Econometrica* 49, pp. 1173-1199.
- Debreu, G. (1964), "Continuity properties of Paretian utility," *International Economic Review* 5, pp. 285-293.
- Freedman, D (1983), *Markov Chains*, Springer-Verlag
- Friedman, M. & Savage, L. J. (1948), "The utility analysis of choice involving risk," *Journal of Political Economy* 56, pp. 279-304.
- Grandmont, J. M. (1972), "Continuity properties of a von Neumann-Morgenstern utility," *Journal of Economic Theory* 4, pp. 45-57.
- Grandmont, J. M. (1977), "Temporary general equilibrium theory," *Econometrica* 45, pp. 535-572.
- Herstein, I. N. & Milnor, J. (1953), "An axiomatic approach to measurable utility," *Econometrica* 21, pp. 291-297.
- Hildenbrand, W. (1974), *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton University Press.
- Parthasarathy, K. P. (1967), *Probability Measures on Metric Spaces*, Academic Press.
- Radner, R. (1979), "Rational expectation equilibrium: Generic existence and the information revealed by prices," *Econometrica* 47, pp. 655-678.
- Sondermann, D. (1971), "Temporary Competitive Equilibrium under Uncertainty," in *Allocation Under Uncertainty, Equilibrium, and Optimality*, Proceedings of an I. E. A. Workshop in Economic Theory Bergen, Norway,

ed. by J. Dreze, Macmillan, 1974.

von Neumann, J. & Morgenstern, O. (1944), *Theory of Games and Economic Behavior*, 2nd., 1947, Princeton University Press (銀林浩・橋本和美・宮本敏雄監訳「ゲームの理論と経済行動」全5冊, 東京図書, 昭47-48)