均衡分析と集計の効果

山 崎 昭

目　　次

注〔本文中の定理・命題，例，図等の参照方法について〕本文中の定理・命題，補題，例，注，数学注，図は各節毎に一連番号が付されている．これらの定理・命題等を同節内で参照するときは単にその一連番号のみを記して，例えば“定理3によると……”などと書く．しかし現在の節と異なる個所に現れる定理・命題等については各節内の一連番号の前に第何節のものかを表示する番号を書く．例えば“命題 18.1”とは“第18節の命題 1”を指す．

＊　本研究は一部文部省科学研究費補助金を受けて行われたものである．

第6章　ワルラス均衡とコア

一般均衡分析における最も重要な均衡概念はワルラス均衡である．ワルラス均衡は市場における経済構成員の完全競争性を前提とした概念であり，その意味で具体的な競争メカニズムはワルラス均衡概念によって明示されない．これに対しコア概念は，経済構成員の形成するグループ（コアリションとよばれる）を通しての競争メカニズムを明示し，市場という取引機構には依存しない均衡概念である．

本章とこれに続く第7章において我々は消費セクターのみからなる経済を考え，これら2種類の主要均衡概念について，その相互関係と決定性の問題を分析の対象としたい．

本章では，まず第16節において，ワルラス均衡の定義とその意味を簡単に議論し，続く第17節において，コア概念の定義と意味を問題にする．第18—21節において，これらの相互関係を詳細に分析するが，本章のハイライトは第21節におけるワルラス配分の集合とコアの同値定理である．非分割財を含む本論の一般均衡モデルにおいて Aumann (1964) の同値定理は必ずしも成立しないが（例18.1参照），第2編において詳細な分析を行った集計によるスムージング効果・連続化効果が期待できるような経済環境においては，同値定理が常に成立することが明らかにされる．

第22節ではフリー・コミュニケーションを想定する通常のコア概念に対し，情報節約的コア (informationally tight core) の1つの考え方を Schmeidler (1972), Grodal (1972) に従って提示する．

第23節では Hildenbrand (1974) の導入した純粋に競争的な有限経済列の考え方を説明する．これは第8節において導入したアトムレス測度空間を経済構成員の母集団として持つ経済の1つの経済学的解釈を与えると

同時に，有限経済を考える場合の分析用具としても便利である．この節の内容は本章の他の節からは独立している．

ワルラス均衡とコアの決定性の問題は第7章において論ずることにしたい．

16. ワルラス均衡

本編では，第8節で導入した「経済」の定式化のうち，主として「ミクロ経済」の定式化を，分析の出発点とする．したがって，今後は特にことわらない限り，「経済」とは「ミクロ経済」を指すものとする．

$(A, \mathscr{A}, \nu)$ を経済構成員の(アトムレス確率)測度空間，すなわち，経済構成員の母集団 (the population of economic agents) としよう．先の定義8.1によれば，**経済** (an economy) $\mathscr{E}$ とは条件

$$\int_A e d\nu < \infty$$

を満足する1つの可測写像 $\mathscr{E}:(A, \mathscr{A}, \nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ (ここで e は $\mathscr{E}(a)=(X_a, >_a, e(a))$ によって定まる写像 $e: A\to\Omega$) である．

ある経済 $\mathscr{E}:(\mathscr{A}, \mathcal{A}, \nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ を所与とする．**経済 $\mathscr{E}$ における配分 f** (an allocation f for $\mathscr{E}$) とは，母集団 A から財空間 Ω への可積分写像 f で

$$f(a)\in X(a),\ \text{a. e. } a\in A$$

の条件を満たすものをいう．いかなる経済 $\mathscr{E}$ が分析の対象となっているのか前後関係から明白な場合，略して**配分** f ということにする．

経済 $\mathscr{E}:(A, \mathscr{A}, \nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ における配分 f が**フィージブル** (feasible) であるというのは，配分 f を実行するときに要する各財の総量 $\left(\text{すなわち} \int_A f d\nu\right)$ が，経済 $\mathscr{E}$ における初期保有量の総量 $\left(\int_A e d\nu\right)$ を超過しないことを意味する．つまり，配分 f が条件

$$\int_A f d\nu \leqq \int_A e d\nu$$

を満足するならば，f はフィージブルであるとよばれる．

古典的に**市場均衡** (market equilibrium) もしくは**競争均衡** (competitive equilibrium) とよばれる均衡概念を次に導入しよう．

定義 1〔ワルラス均衡〕 経済 $\mathscr{E}:(A, \mathscr{A}, \nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ の**ワルラス均衡** (Walras equilibrium), (p,f), とは，価格ベクトル $p\neq 0\in R^l_+$ と経済 $\mathscr{E}$ における配分 f からなる組でつぎの 2 条件

（1） $f(a)\in D(X_a, >_a, p\cdot e(a), p)$, a. e. $a\in A$;

（2） $\int_A f d\nu \leqq \int e d\nu$;

を満足するものをいう．

上で定義されたワルラス均衡概念は，周知のように，通常我々が「市場 (market)」とよぶ一定の取引機構 (a transaction institution) の存在を前提とする．市場とは，直接交渉，電信・電話，テレックス，コンピューター，等々のありうべき情報伝達手段の利用により各種の財の売買が行われるようなアブストラクトな「場」を指す．このような取引の場において，各種の財に対する価格——すなわち，価格ベクトル $p=(p^1, \cdots, p^l)$ ——が一意的に引き合いに出 (quote) され，そのもとで財の売買が自由に行われる——すなわち，i 財 1 単位と p^i/p^j 単位の j 財が自由に交換されうる——機構（インスティテューション）を想定するのである．

すべての経済構成員がこの取引機構に参加しうるとして，市場における経済構成員 $a\in A$ の行動およびその結果を考えよう．構成員 a の消費特性は経済 $\mathscr{E}$ において $(X_a, >_a, e(a))$ によって与えられる．したがって，a は彼の予算集合 $B(X_a, p\cdot e(a), p)=\{x\in X(a)|p\cdot x\leqq p\cdot e(a)\}$ の中から最も好ましい消費ベクトルを選択する．こうして価格ベクトル p を通じ各

経済構成員は分権化された (decentralized) 意思決定を行い，その結果各財に対する総需要量が各財の総供給量を超過しないならば，この状態を経済 $\mathscr{E}$ のワルラス均衡とよぶのである．この均衡概念は，各経済構成員が市場における価格ベクトルを所与と考え，他の経済構成員の意思とは全く無関係に自己の意思決定を行うという行動様式を前提とする．その意味でワルラス均衡概念はゲーム論でいう「非協力的概念」(noncooperative concept) である．

以上のように，完全に独立した各個人の行動を調整し，体系全体における無矛盾性(コンシステンシー)を約束する役割は，市場価格によって担われる．

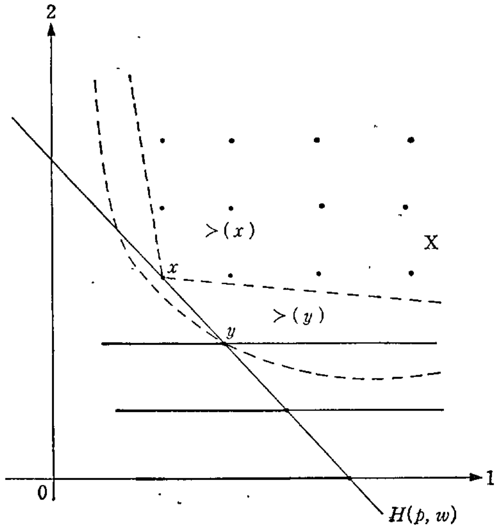
ここで定義1の条件に関し，1つの注意を与えておきたい．条件(2) により，定義1のワルラス均衡においては，総需要量と総供給量とが一致することは要請されていない．前者が後者を超過しなければよい．したがって，条件(2) は財の自由可処分性 (free disposability of commodities) を前提としたワルラス均衡の概念を規定していることになる．自由可処分性の仮定を除去することの困難性については，第7章において触れることとしたい．

さて，本章の目的はワルラス均衡と，ある意味でその対極的位置にある均衡概念——コア——との関係を，本論で導入した一般的な均衡モデルの中で論ずることにある．本論で取り扱う財空間 Ω が非分割財を含むことから，定義1における条件(1) の要請を若干弱め，以下のような均衡概念を導入することが有用である．

先ず任意の $(X, \succ, w, p) \in \mathscr{P} \times R \times R_+^l$ に対し集合

$$D_w(X, \succ, w, p) = \{x \in B(X, w, p) \mid \succ(x) \cap H_<(p, w) \cap X = \phi\}$$

を定義し，**弱需要集合** (weak demand set) とよぶことにしよう．需要集合 $D(X, \succ, w, p)$ は $\{x \in B(X, w, p) \mid \succ(x) \cap H_\leqq(p, w) \cap X = \phi\}$ であるか



$x \in D(X, \succ, w, p)$
$y \notin D(X, \succ, w, p)$
$x, y \in D_w(X, \succ, w, p)$

第 1 図　需要と弱需要

ら，弱需要集合と需要集合の違いはつぎのようになる．x が需要ベクトル（つまり，$x \in D(X, \succ, w, p)$）であれば，予算集合内に x よりも好まれる消費ベクトルは存在しない．x が**弱需要ベクトル** (weak demand vector)（つまり，$x \in D_w(X, \succ, w, p)$）であれば，市場価値額が所得水準 w よりも低い消費ベクトルで x よりも好まれるものはない．ただし，市場価値額がちょうど w と等しくなるような消費ベクトルで x よりも好ましいものが存在することは除外されない．明らかに $D(X, \succ, w, p) \subset D_w(X, \succ, w, p)$ であり，この包含関係は一般に強い意味で成立する．（第1図参照．）

定義 2〔弱ワルラス均衡〕 経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ における**弱ワルラス均衡** (weakly Walras equilibrium), (p,f), とは, 価格ベクトル $p\neq 0\in R^l_+$ と経済 $\mathscr{E}$ における配分 f からなる組で次の条件

（1） $f(a)\in D_w(X(a),\succ_a,p\cdot e(a),p)$, a. e. $a\in A$;

（2） $\int_A fd\nu\leqq\int_A ed\nu$;

を満足するものをいう.

定義 3〔均衡価格ベクトル, 弱均衡価格ベクトル, ワルラス配分, 弱ワルラス配分〕 (p,f) を経済 $\mathscr{E}$ のワルラス均衡 (弱ワルラス均衡) とする. このとき, 価格ベクトル p を**均衡価格ベクトル** (equilibrium price vector) (**弱均衡価格ベクトル** (weak equilibrium price vector)) とよび, 配分 f を**ワルラス配分** (Walras allocation) (**弱ワルラス配分** (weakly Walras allocation)) とよぶ. 経済 $\mathscr{E}$ におけるワルラス配分 (弱ワルラス配分) 全体の集合を $\mathscr{W}(\mathscr{E})$ $(\mathscr{W}_w(\mathscr{E}))$ と書く.

注 1 文献によっては, 弱ワルラス均衡を**疑似均衡** (pseudo-equilibrium), **疑似競争均衡** (pseudo-competitive equilibrium) とよぶことがある. (例えば, Hildenbrand (1968, 1969), Yamazaki (1978b) を参照.) 近似均衡 (approximate equilibrium) とよぶことも考えうるが, 余りにも多種類の近似均衡の概念が文献に見られるため (例えば, Starr (1969), Broome (1972), Hildenbrand, Schmeidler, and Zamir (1973), Khan (1975) 等参照), この用語を避けることにした. 弱ワルラス均衡を疑似均衡とよぶならば, 弱需要集合は**疑似需要集合** (pseudo-demand set) とよぶことになろう.

選好関係 $(X,\succ)$ から導かれる関係 $\precsim$ に対し

$$\succsim(x)=\{z\in X|\ x\precsim z\}$$

と定義しよう. このとき, $\succsim(x)=\mathrm{cl}\succ(x)$ であり, $x\in D_w(X,\succ,w,p)$

ならば，x は集合 $\succsim(x)$ の上で**支出を最小化** (expenditure minimizing) する．

Debreu (1962) の**準均衡** (quasi-equilibrium) 概念は，つぎに定義される**準需要集合** (quasi-demand set) D_q に基づいている：

$$D_q(X, \succ, w, p) := D(X, \succ, w, p) \cup \{x \in X \mid p \cdot x = w = \min p \cdot X\}$$

消費集合 X の凸性が仮定されていなければ，準需要の概念は必ずしも有効な概念とは言い難い．（第 2 章注 7.5 を参照のこと．）

17. 経済のコア

ワルラス均衡の概念は，経済が市場というある一定の取引機構を持つことと，各経済構成員が(市場)価格ベクトルを所与として行動する，という意味における完全競争性 (perfect competitiveness) とを前提とした均衡概念である．ワルラス均衡は，経済構成員の行動様式の中に完全競争性を内在化させているため，直接，定義により完全競争的な均衡なのである．

これに対し，ある特定の取引機構を必ずしも前提としない，インスティテューション・フリー (institution-free) な，しかも経済構成員の行動それ自体が完全競争性を前提としないような均衡概念を与えようというのが，コア概念の 1 つの考え方である．

経済のある配分が提示されたとき，もし経済構成員のあるグループが，彼ら相互間の初期保有量の再配分によって，より好ましい新しい配分を達成できるとすれば，先の配分は均衡状態における配分とは言い難い．この考え方において想定されているのは，各経済構員成はより良い配分を実現させるために，相互の協力を惜しまないという行動様式である．換言すれば，「同種の利害関係」を持ったグループを通しての競争を想定するのである．

経済 $\mathscr{E}:(A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P} \times \Omega$ を所与とするとき，任意の $S \in \mathscr{A}$ を経

済構成員の**コアリション** (*coalition* of economic agents) とよぶ．一般に σ 集合代数 $\mathscr{A}$ は，A の部分集合全体ではないが，$\mathscr{E}$ が有限経済であれば $\mathscr{A}$ は A のベキ集合であるから，コアリション全体は経済 $\mathscr{E}$ において考慮可能なすべての経済構成のグループと解釈できよう．

定義 1〔改善可能性〕 $f: A \to \Omega$ を経済 $\mathscr{E}: (A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P} \times \Omega$ のある配分とする．コアリション $S \in \mathscr{A}$ が**配分 f を改善できる** (can improve upon f) とは，経済 $\mathscr{E}$ のある配分 g が存在し，つぎの条件を満足することである：

（1） $g(a) >_a f(a)$,　a. e. $a \in S$;

（2） $\nu(S) > 0$,　$\int_S g d\nu \leqq \int_S e d\nu$.

コアリション $S \in \mathscr{A}$ が配分 f を改善できることを，S は f を**ブロック(阻止)できる** (can block f) と言うこともある．ただし，S が f をブロックできると言っても，S 以外の構成員，すなわち $A \backslash S \in \mathscr{A}$，の行動を何らかの形で阻止（ブロック）するという意味は全くないので注意する必要がある．

定義 2〔経済のコア〕 経済 $\mathscr{E}: (A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P} \times \Omega$ におけるフィージブルな配分のうち，$\mathscr{A}$ におけるいかなるコアリションもそれを改善できないようなもの全体を経済 $\mathscr{E}$ の**コア** (core) とよび，これを $\mathscr{C}(\mathscr{E})$ と書く．$\mathscr{C}(\mathscr{E})$ に属する配分 f を**コア配分** (a core allocation) とよぶ．

前節で指摘したように，すべての財が必ずしも完全分割可能財ではないような財空間 Ω において均衡配分とコア配分との関係を分析する場合，均衡配分全体の集合をやや“膨らませ”て，弱均衡配分の概念を用いると便利である．同様にコア概念の場合も，“改善できる”条件を強めることにより，コアよりもやや拡大された集合を導入することにしたい．言わば，

コアリション $S\in\mathscr{A}$ が“ゆとり”を持って与えられた配分を改善できることを要請するのである.

定義 3〔強改善可能性〕 $f:A\to\Omega$ を経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ の1つの配分とする. コアリション $S\in\mathscr{A}$ が**配分 f を強く改善できる** (can strongly improve upon f) とは, 経済 $\mathscr{E}$ における配分 g が存在し, 以下の2条件を満たすことである:

(1) $g(a)\succ_a f(a)$, a. e. $a\in S$;

(2) $\nu(S)>0$, $\displaystyle\int_S g d\nu<\int_S e d\nu$.

この“強改善可能性”の定義に基づいて, コア配分全体の集合よりもやや大きい“弱コア”を導入する.

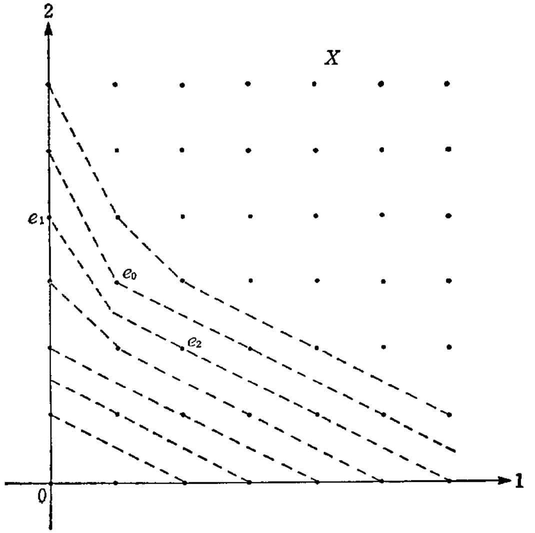
定義 4〔経済の弱コア〕 経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ におけるフィージブルな配分のうち, $\mathscr{A}$ におけるいかなるコアリションもそれを強く改善できないような配分全体を経済 $\mathscr{E}$ の**弱コア** (weak core) とよび, これを $\mathscr{C}_w(\mathscr{E})$ と書く. $\mathscr{C}_w(\mathscr{E})$ に属する配分 f を**弱コア配分** (a weak core allocation) とよぶ.

一般に $\mathscr{C}(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}_w(\mathscr{E})$ が成立することはコアと弱コアの定義から明白である. しかもこの包含関係は強い意味で成立することを下の例が示している.

例 1 $\Omega:=Z^2$, $X:=Z_+^2$ ($Z:=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$, $Z_+:=\{0,1,2,\cdots\}$), $e_0:=(1,3)$ とし, 第1図に示された破線と消費集合 X との共通集合を無差別曲線として持つ選好関係を $(X,\succ)$ としよう. $(A,\mathscr{A},\nu)$ をある任意のアトムレス確率測度空間とし, 各 $a\in A$ に対し

$$\mathscr{E}(a):=(X,\succ,e_0)$$

と定義する ($\mathscr{E}$ はコンスタント・マップ). $f(a)=e_0$ によって経済 $\mathscr{E}$ の



配分 f —— $(\forall a\in A)\ f(a)=e_0$
配分 g —— $(\forall a\in A_1)\ g(a)=e_1$;
$(\forall a\in A_2)\ g(a)=e_2$.

$f\in\mathscr{C}(\mathscr{E})$;
$g\in\mathscr{C}_w(\mathscr{E})$, $g\notin\mathscr{C}(\mathscr{E})$

第 1 図　コアと弱コア

配分 $f: A\to\Omega$ を定義すれば，$f\in\mathscr{C}(\mathscr{E})$ である．$e_1:=(0, 4), e_2:=(2, 2)$ と置き，$A_1, A_2\in\mathscr{A}$ を $A_1\cap A_2=\phi$, $A_1\cup A_2=A, \nu(A_i)=1/2$ $(i=1, 2)$, とする．写像 $g: A\to\Omega$ を

$$g(a):=e_1,\quad a\in A_1$$

$$g(a):=e_2,\quad a\in A_2$$

によって定義すれば，g は経済 $\mathscr{E}$ の配分であり，かつ，$g\in\mathscr{C}_w(\mathscr{E})$ であ

る．しかし，g は，例えばコアリション A_1 によって改善される（配分 f を用いる）から，$g \notin \mathscr{C}(\mathscr{E})$ である．

本節の最後にコア概念に関し幾つかの注釈を加えることにしたい．

第 1 は，先に説明した経済構成員の行動様式に関する仮定についてである．ゲーム論的視点からすればコアは協力概念（cooperative concept）に基づいた解概念である．しかし，ここで注意に値するのは Edgeworth (1881) によるコアの説明である．彼は最終的な財の配分を経済構成員間の一連の契約（contract）の帰結によるものとして説明した．したがって，Edgeworth の観点からすれば，所与の配分を改善できるコアリションはコアリションに属する経済構成員全員の協力によって形成されるというより，むしろ，ある特定の経済構成員が自らの利益をねらって，他の構成員の自発的参加の下に，種々の契約もしくは再契約を取りまとめた結果に過ぎないのである．したがって，いかなる構成員も自己の利益のために自由に契約や再契約を締結することが許されるならば，あるコアリションによって改善可能な配分は，契約および再契約が可能な経済においては，必ず改善されることになる．以上の考え方からすれば，コア概念は非協力的概念となり，一般に指摘される程，協力概念と非協力概念の差は明確ではないことになる．

第 2 は，ワルラス均衡概念が取引機構を明確にする必要があるのに対し，コア概念はインスティテューション・フリーである点についてである．コアは経済構成員の消費特性に関するデータのみから（もちろん，生産経済においてはこれに生産技術に関するデータが加わるが），最終的な配分を決定できるのである．取引が行われるインスティテューショナル・フレームフークからコア概念が独立しているということは，コア概念を魅力的にしていると同時に，その 1, 2 の欠点を浮き彫りにする．その 1 つは Mas-

Colell (1982) によって指摘されている次の点である．取引機構が抽象化されているがゆえに，各コアリションによって提案されてくる再配分に関するフィージビリティーは，すべての財に対するフィージビリティーを同時に考慮した時のものである．このことは，1つの経済の中に無数の全く異なる部分経済を考え，それら部分経済における競争を通して経済全体の競争が機能していることを意味することになる．その2は，生産経済においては，取引機構を特定化しない経済はかなり特殊化したものにならざるを得ない点である．この点については再度第8章で議論することにしたい．

第3は，コア概念の要請する情報量の問題である．ワルラス均衡概念が各経済構成員に要請する情報は価格ベクトルに関するものだけである．これに対し，コア概念を協力概念と理解すれば，コアに属する配分が達成されるには，各コアリションに属する構成員の少くとも一人が他の構成員の選好関係および初期保有量を知っているか，さもなければ，構成員同志のコミュニケーションによって相互の選好関係および初期保有量を伝達する必要がある．そのため一般にはコア概念がイントリンシックに要請する情報量はばく大である．

18. ワルラス配分とコア

市場における経済構成員間の競争が完全に行き着いた状態を描写しているのがワルラス均衡である．コアは取引機構から独立した競争的状態における配分を描写しているのであるから，ワルラス配分がコア配分になっていることは直観的に理解できよう．この直観的理解は，弱ワルラス配分と弱コア配分に対しても正しいことがこの節で確認される．

これに反し，コア概念によって定義される競争状態が，経済構成員母集団の人口の増大とともに，ワルラス均衡において想定される完全競争状態

に近づくかどうかは，より詳細な吟味を要する．

命題 1〔ワルラス配分とコア，弱ワルラス配分と弱コア〕 $\mathscr{E}:(A, \mathscr{A}, \nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ を任意の経済とする．このときつぎの諸性質が成立する．

（1） $\mathscr{W}(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}(\mathscr{E})$

（2） $\mathscr{W}_w(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}_w(\mathscr{E})$

証明 (1) $f\in\mathscr{W}(\mathscr{E})$ とする．仮に $f\notin\mathscr{C}(\mathscr{E})$ であったとしよう．そうするとコアの定義から，$\nu(S)>0$ なるある $S\in\mathscr{A}$ と経済 $\mathscr{E}$ におけるある配分 $g:A\to\Omega$ に対し，条件

（i） $g(a)>_a f(a)$, a. e. $a\in S$;

(ii) $\int_S g d\nu \leqq \int_S e d\nu$;

が成立する．

(i) および f がワルラス配分であることから，ある価格ベクトル $p\in R^l_+$ について条件

$$p\cdot g(a) > p\cdot e(a), \quad \text{a. e. } a\in S$$

が成り立つ．よって，

$$\int_S p\cdot g(a)d\nu > \int_S p\cdot e(a)d\nu$$

となり，

$$p\cdot\int_S g d\nu > p\cdot\int_S e d\nu$$

を得るが，これは (ii) に反する．

(2) $f\in\mathscr{W}_w(\mathscr{E})$ とする．仮に $f\notin\mathscr{C}_w(\mathscr{E})$ であったとしよう．そうすると弱コアの定義から，$\nu(S)>0$ なるある $S\in\mathscr{A}$ と経済 $\mathscr{E}$ におけるある配分 $g:A\to\Omega$ に対し条件

（i） $g(a)>_a f(a)$, a. e. $a\in S$;

(ii)　$\int_S g d\nu < \int_S e d\nu$;

が成立する.

(i) および f が弱ワルラス配分であることから，ある価格ベクトル $p \neq 0 \in R^l_+$ に対し条件

$$p \cdot g(a) \geqq p \cdot e(a), \quad \text{a. e. } a \in S,$$

が成り立つ．よって，

$$p \cdot \int_S g d\nu \geqq p \cdot \int_S e d\nu$$

を得るが，これは (ii) に反する．■

財空間 Ω が R^l に等しくない場合，つまり，すべての財が完全分割可能財であるとは限らない場合，Aumann (1964) の命題——ワルラス配分とコア配分の集合の同値定理——が必ずしも成立しないことは，つぎの第19節において示される．したがって本節では，“古典的” Aumann の同値定理を，追加的諸条件を仮定することなく，より一般的な財空間 Ω の下で修正することを試みたい．修正された同値定理は，ワルラス配分の集合とコア配分の集合それぞれを膨らませることによって得られる同値定理である．

定理 2〔弱ワルラス配分の集合と弱コアの同値定理〕 $\mathscr{E}:(A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P}_{ins} \times \Omega$ をある経済とすれば

$$\mathscr{W}_w(\mathscr{E}) = \mathscr{C}_w(\mathscr{E})$$

が成立する.

証明　命題1の (2) が成立するから，

$$\mathscr{C}_w(\mathscr{E}) \subset \mathscr{W}_w(\mathscr{E})$$

の成立することを示せばよい．そこで，$f \in \mathscr{C}_w(\mathscr{E})$ としよう．各 $a \in A$ に

対し

$$\succ_a(f) := \{x \in X_a \mid x \succ_a f(a)\},$$
$$\Psi(a) := \succ_a(f) - e(a)$$

を定義する（第1，2図参照）．選好関係 $(X_a, \succ_a)$ の局所非飽和性により $\succ_a(f) \neq \phi$ となるから，$\Psi(a) \neq \phi$ が各 $a \in A$ について成り立つ．対応 $a \mapsto \succ_a(f)$ を F とする．すなわち，

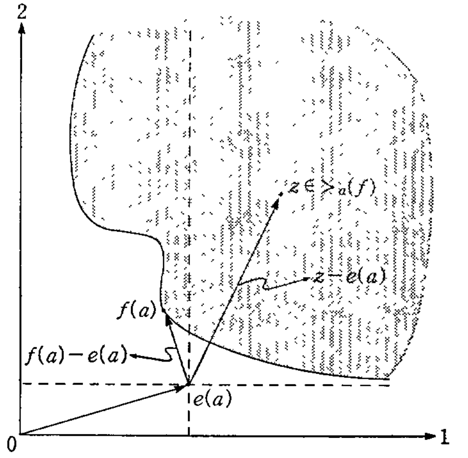
$$F := \{(a, x) \in A \times \Omega \mid x \succ_a f(a)\}$$

とすれば，F は可測である．つぎに，集合 G を

$$G := \{(X, \succ, x, y) \in \mathscr{P} \times \Omega \times \Omega \mid x \succ y\}$$

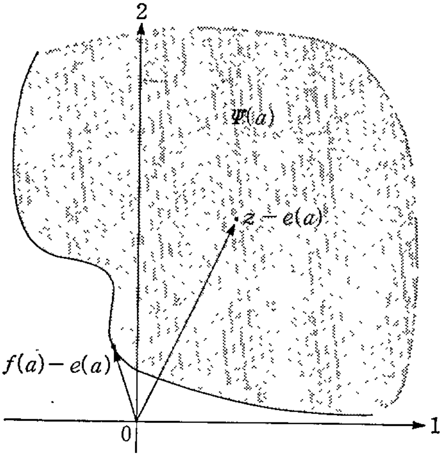
によって定めると，系 4.3 により G は Borel 集合である．ここで写像 g: $A \times \Omega \to \mathscr{P} \times \Omega \times \Omega$ を

$$(a, x) \mapsto (X_a, \succ_a, x + e(a), f(a))$$



$$\succ_a(f) := \{x \in X \mid x \succ_a f(a)\}$$

第 1 図 $f(a)$ よりも好ましい消費ベクトルの集合



第　2　図

と定義すれば，$\mathscr{G}$ の可測性から g は可測写像となり，しかも $\Psi=g^{-1}(G)$ となることが容易に確認できる．ゆえに，Ψ は可測である．

つぎに，下記の主張が成立することを示そう．

主張　$\int_A \Psi d\nu \neq \phi.$

対応　$\overline{\Psi}: A \to \Omega$ を $\overline{\Psi}(a) := \mathrm{cl}\, \Psi(a)$　によって定義すれば，選好関係 $(X_a, >_a)$ の局所非飽和性により，

$$(f(a)-e(a)) \in \overline{\Psi}(a), \quad \text{a. e. } a \in A,$$

である．A から Ω への対応 H を

$$H(a) = \Psi(a) \cap N(f(a)-e(a), r)$$

によって定義しよう．ここで $N(f(a)-e(a), r)$ は，中心 $f(a)-e(a)$，半径 $r>0$ の開球である．a. e. $a \in A$，$f(a)-e(a) \in \overline{\Psi}(a)$ だから，$H(a) \neq \phi$ a. e. $a \in A$ となる．対応 Ψ および 写像 $(f-e)$ の可測性から対応 H の

可測性が従う．したがって，可測選択の定理（数学注 8.4）により，$h(a)\in H(a)$ a.e. $a\in A$ なる可測写像 $h: A\to\Omega$ が存在する．写像 $(f-e)$ は可積分だから，h もまた可積分である．ゆえに，$\int_A hd\nu\in\int_A\Psi d\nu$ となり，主張が証明された．

そこで，つぎに，R^l の部分集合 Z を

$$Z:=\cup\left\{\int_S\Psi d\nu\mid S\in\mathscr{A},\ \nu(S)>0\right\}$$

によって定義しよう．

$$R^l_{--}:=\{x=(x^1,\cdots,x^l)\in R^l\mid(\forall j)x^j<0\}$$

と置き，

（1） $Z\cap R^l_{--}=\phi$

を示そう．仮に，これが成立しなかったとしよう．そうすると，ある $S\in\mathscr{A}$，$\nu(S)>0$，とある可積分写像 $g: A\to\Omega$ に対し

$$g(a)-e(a)\in\Psi(a),\ \text{a.e. } a\in S,$$

が成立し，同時に

$$\int_S(g-e)d\nu\in R^l_{--}$$

となる．この後者は

$$\int_S gd\nu<\int_S ed\nu$$

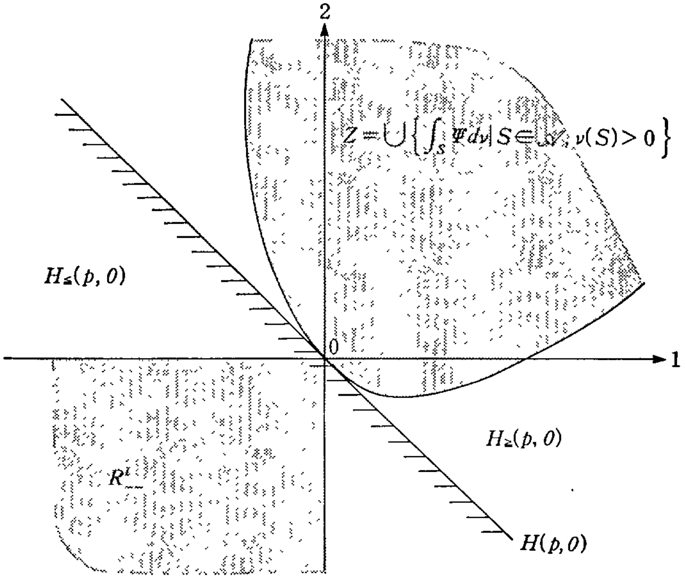
を意味するから，コアリション $S\in\mathscr{A}$ は配分 f を強く改善できることになる．これは f が弱コア配分であったことに反する．

測度空間 $(A,\mathscr{A},\nu)$ はアトムレスであるから，集合 Z は凸集合である．（数学注 8.6 の (3) 参照．）したがって，上の (1) と Minkowski の分離定理により，あるベクトル $p\neq 0\in R^l$ に対し

（2） $Z\subset H_{\geq}(p,0)$；

（3） $R^l_{--}\subset H_{\leq}(p,0)$；

が成立する（第 3 図参照）．



第 3 図

ここで，ベクトル p は実際には $p\in R^l_+$ であることに注意しよう．なぜならば，$p=(p^1, \cdots, p^l)$ としたとき，もし $p^j<0$ ならば $p\cdot z>0$ となる $z\in R^l_{--}$ が存在し，(3) に反するからである．

(2) より，すべての $S\in\mathscr{A}$ について

（4）　$\int_S \Psi d\nu \subset H_{\geqq}(p, 0)$

が成立する．さらに (4) は条件

（5）　a. e. $a\in A,\ \ \Psi(a)\subset H_{\geqq}(p, 0)$

の成立を保証することを以下で示そう．そのため，集合M^* を

$$M^*:=\{a\in A \mid \Psi(a)\subset H_{\geqq}(p, 0)\}$$

によって定義すれば，$M^*\Delta M(=(M^*\backslash M)\cup(M\backslash M^*))$ が ν 零集合となるような $M\in\mathscr{A}$ が存在する．実際，数学命題 7. 3 より写像

$$a\mapsto \inf p\cdot\Psi(a)$$

は $\mathscr{A}_\nu$-可測（$\mathscr{A}_\nu$ は $\mathscr{A}$ の完備化）である．したがって，

$$\{a\in A|\ 0\leqq \inf p\cdot\Psi(a)\}\ \in\ \mathscr{A}_\nu$$

が成立するが，この左辺の集合は M^* に等しい．よって，可測集合 M で $M^*\Delta M$ が ν 零集合になるものが存在する．

(5) が成立しなかったと仮定してみよう．上の議論から集合 M^* を可測集合 M で置きかえれるから，$\nu(C)>0$ なるあるコアリション $C\in\mathscr{A}$ に対し条件

$$(\forall a\in C)(\exists z(a)\in\Psi(a))\ z(a)\in H_<(p, 0)$$

が成立する．ここで写像 z: $C\to\Omega$ が可測となるように点 $z(a)$ を選択することができることを示そう．各 $a\in C$ に対し

$$I(a):=H_<(p, 0)\cap\Psi(a)$$

と置けば，$z(a)\in I(a)$ だから $I(a)\neq\phi$ である．対応 Ψ は可測だから

$$I\in\mathscr{A}\otimes\mathscr{B}(\Omega)$$

が成立する．よって，可測選択の定理から

$$h(a)\in I(a),\ \text{a. e.}\ \ a\in C,$$

を満足する可測関数 $h: C\to\Omega$ が存在する．そこで，$S\in\mathscr{A}$，$S\subset C$，$\nu(S)>0$，を満たす S を適当に取り

$$\int_S hd\nu$$

が定義されるようにする．$I(a)$ の定義から

$$h(a)\in H_<(p, 0)\cap\Psi(a),\ \text{a. e.}\ \ a\in S,$$

であり，これは

$$\int_S\Psi d\nu\not\subset H_\geqq(p, 0)$$

を意味するが，(4) の成立していたことと矛盾する．これで (5) が証明された．

選好関係 $(X_a, \succ_a)$ の局所非飽和性から

(6)　$f(a)-e(a) \in \mathrm{cl}\ \Psi(a)$,　a. e.　$a \in A$,

である．したがって，(5) より

$$f(a)-e(a) \in H_{\geqq}(p, 0),\ \text{a. e. } a \in A$$

が成立する．

今仮に，ある可測集合 S, $\nu(S)>0$, に対し

$$f(a)-(a) \in H_{>}(p, 0),\ \text{a. e. } a \in S$$

であったとしてみよう．そうすると

$$p \cdot \left(\int_A f d\nu - \int_A e d\nu \right) > 0$$

となるが，これは$p \in R^l_+$, $p \neq 0$, かつ

$$\int_A f d\nu \leqq \int_A e d\nu$$

であったことと矛盾する．

したがって，

(7)　$f(a)-e(a) \in H(p, 0)$,　a. e.　$a \in A$,

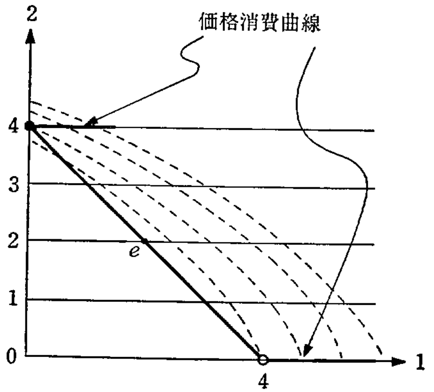
でなければならない．(5) と (7) から

$$f(a) \in D_w(X_a, \succ_a, p \cdot e(a), p),\ \text{a. e. } a \in A,$$

が帰結される．ゆえに，$f \in \mathscr{W}_w(\mathscr{E})$である．■

定理 2 で示された弱ワルラス配分の集合と弱コアの同値定理を，ワルラス配分の集合とコアの同値定理へと拡張することは一般にはできない．事実，下に示す例 1 において，$\mathscr{W}(\mathscr{E})=\phi$, $\mathscr{C}(\mathscr{E}) \neq \phi$ が成立し，したがって，$\mathscr{W}(\mathscr{E}) \neq \mathscr{C}(\mathscr{E})$ である．

例 1〔ワルラス配分の集合とコアとの不一致〕 $\Omega=R \times \{\cdots, -2, -1, 0,$



第 4 図

$1, 2, \cdots\}$, $X:=\Omega\cap R^2_+$, $e=(2, 2)$ とし, 選好関係 $(X, \succ)$ は第4図における破線と X との共通集合を無差別曲線として持つような $(X, \succ)$ とする. $(A, \mathscr{A}, \nu)$ は任意のアトムレス確率測度空間とし, 経済 $\mathscr{E}:(A, \mathscr{A}, \nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ を次のように定める. すなわち, すべての $a\in A$ に対し $\mathscr{E}(a):=(X, \succ, e)$ とする. $\mathscr{E}$ は各構成員が同一の消費特性 $(X, \succ, e)$ を持つような経済である. この経済における各構成員の価格消費曲線は, 第4図に示されている通り, $p^1/p^2=1$ となる価格ベクトル $p=(p^1, p^2)$ において上半連続性を欠き, その結果 $\mathscr{E}$ の総(もしくは平均)超過需要は0ベクトルを通過しないことが簡単に確認できる. よって, $\mathscr{W}(\mathscr{E})=\phi$ である. これに対し $\mathscr{C}(\mathscr{E})\neq\phi$ なることをつぎに示そう. A_1, A_2 を A の任意の可測分割 (つまり, $A=A_1\cup A_2$, $A_1\cap A_2=\phi$, $A_1, A_2\in\mathscr{A}$) で, $\nu(A_1)=\nu(A_2)=0.5$ を満たすものとしよう. このとき, 写像 $f: A\to\Omega$ を

$$f(a) := (0, 4),\quad a \in A_1\,;$$
$$:= (4, 0),\quad a \in A_2\,;$$

によって定義すれば，f は経済$\mathscr{E}$におけるフィージブルな配分である．しかも，いかなるコアリション $S \in \mathscr{A}$ も配分 f を改善できないことが確認できる．よって，$f \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ となる．この例において $\Omega = R^2$ とすれば，上で定めた配分 f はコアリション A_2 によって改善されるようになり，$f \notin \mathscr{C}(\mathscr{E})$ となることに注意しよう．したがって，f がこの例で，コアリションによって改善され得ないのは財の非分割性によるのである．

19. 凸の財空間と同値定理

すべての財が完全分割可能財であれば，前節の例 1 におけるようなワルラス配分の集合とコアとの不一致は一般に生じない．この種の主張は Edgeworth (1881) の古典的命題を最もエレガントな形で述べたもので，Aumann (1964) によって最初の厳密な定式化が与えられた．元来，一般均衡論モデルへの測度論的接近が導入されたのも同値定理を証明するためであった．

本節では Aumann の定理 (1964) を Hildenbrand (1968, 1970b) による一般化の方向で拡張したものを証明することにする．Aumann 自身の定理と比較すれば，財空間 Ω の凸性のみの仮定で良い点，消費集合は R^l_+ に限る必要はなく，さらに，経済構成員によって異なる消費集合であってよい点，選好関係の単調性の代わりに局所非飽性を仮定する点，等が改良されているところである．

定理 1　財空間 Ω は凸集合であり，経済 $\mathscr{E}: (A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P}_{lns} \times \Omega$ は下の条件 [1] あるいは [2] を満足するものとする：

[1]　$X_a = R^l_+$,　$e(a) \in R^l_{++}$,　a. e.　$a \in A$;

［2］（i） a. e. $a\in A$, X_a は Ω の凸部分集合；

（ii） $\int_A e d\nu \in \mathrm{int}\int_A X d\nu$（ここで X は $\mathscr{E}$ によって定められる可測対応 $a\mapsto X_a$ を表す）；

（iii）〔既約性（Irreducibility）〕 $\nu(A_i)>0, i=1, 2,$ なる A の任意の可測分割 $\{A_1, A_2\}$ および，経済 $\mathscr{E}$ の任意のフィージブルな配分 f に対し，

$$\int_{A_1}(e-h)d\nu+\int_{A_2} f d\nu\in\int_{A_2}\{x\in X_a \mid x\succ_a f(a)\}d\nu$$

を満たす配分 $h: A\to\Omega$ が存在する．

このとき経済 $\mathscr{E}$ において

$$\mathscr{W}(\mathscr{E})=\mathscr{C}(\mathscr{E})$$

が成立する．

証明 命題 18.1 の（1）より $\mathscr{W}(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}(\mathscr{E})$ である．したがって，

$$\mathscr{C}(\mathscr{E})\subset\mathscr{W}(\mathscr{E})$$

を示せばよい．コアおよび弱コアの定義より

$$\mathscr{C}(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}_w(\mathscr{E})$$

が成立しているから，定理 18.2 より

（1） $\mathscr{C}(\mathscr{E})\subset\mathscr{W}_w(\mathscr{E})$

を得る．よって，今，$f\in\mathscr{C}(\mathscr{E})$ とすれば，(1) はある価格ベクトル $p\neq 0 \in R_+^l$ に対し，つぎの 2 条件：

（2） $f(a)\in D_w(X_a, \succ_a, p\cdot e(a), p)$, a. e. $a\in A$；

（3） $\int_A f d\nu \leqq \int_A e d\nu$；

が成立することを意味する．ここで，

（4） a. e. $a\in A$, $p\cdot e(a)\notin J_p(X_a) \Rightarrow f(a)\in D(X_a, \succ_a, p\cdot e(a), p)$

であることを示そう．(2) が成り立っているから，今，$p\cdot e(a)\notin J_p(X_a)$ かつ $f(a)\in D_w(X_a, \succ_a, p\cdot e(a), p)$ であると仮定しよう．$p\cdot e(a)\notin J_p(X_a)$

であるから，任意の $z\in X_a\cap H(p, p\cdot e(a))$ に対し，X_a 内の点列 $(z_n)_n$ で，$z_n\to z$ かつ各 n について $z_n\in H_<(p, p\cdot e(a))$，なるものが存在する．$f(a)$ は弱需要ベクトルだから，各 n に対して

$$z_n \not\succ f(a)$$

が成立する．したがって，選好関係 $(X_a, >_a)$ の連続性から

$$z \not\succ_a f(a)$$

を得る．ゆえに，

$$f(a) \in D(X_a, >_a, p\cdot e(a), p)$$

である．これで (4) が証明された．

(4) が成立しているから，$f\in\mathscr{W}(\mathscr{E})$ を帰結するためには

(5)　a. e. $a\in A$,　$p\cdot e(a)\notin J_p(X_a)$

を示すだけでよい．

経済 $\mathscr{E}$ が [1] の条件を満たす場合すべての $a\in A$ について

$$J_p(X_a)=\{0\}$$

である．よって (5) が成立するのは明白である．

経済 $\mathscr{E}$ が [2] の条件を満足する場合を考えよう．X_a は凸集合だから

$$J_p(X_a)=\{w\in R|\ w=\inf\ p\cdot X_a\}$$

であることに注意しよう．実際，

$$J_p(X_a)\supset \text{右辺}$$

であることは明らかである．他方，$x\in X_a$ かつ $p\cdot x>\inf p\cdot X_a$ とすれば，$p\cdot z<p\cdot x$ を満たす $z\in X_a$ が存在する．各 $n=1, 2, \cdots$ に対し

$$z_n:=\left(\frac{1}{n}\right)z+\left(1-\frac{1}{n}\right)x$$

と置けば，消費集合 X_a の凸性から，各 n について，$z_n\in X_a$ および $p\cdot z_n<p\cdot x$ が成立し，定義から $z_n\to x$ である．ゆえに，$x\notin C_p(X_a)$ である．この議論は $p\cdot x'\notin J_p(X_a)$ なる任意の $x'\in X_a\cap H(p, p\cdot x)$ に対して成立

する．よって，$J_p(X_a) \subset$ 右辺　が証明された．

A の部分集合 S^* を

$$S^* := \{a \in A \mid p \cdot e(a) = \inf p \cdot X_a\}$$

によって定義する．(5) を示すには S^* が ν-零集合であることを証明すればよい．集合 S^* は $\mathscr{A}_\nu$-可測だから，ある $S \in \mathscr{A}$ に対し，$S^* \Delta S$ は ν-零集合となる．我々は

$$\nu(S) = 0$$

となることを示したい．仮に $\nu(S) > 0$ であったとしよう．

$$(6)\quad p \cdot \int_S e d\nu = \int_S \inf\ p \cdot X d\nu = \inf\ p \cdot \int_S X d\nu$$

が成立するから，

$$(7)\quad p \cdot \int_S (e - X) d\nu \leqq 0$$

を得る．A の可測分割 $\{A_1, A_2\}$ を

$$A_1 = S,\quad A_2 = A \setminus S$$

によって定めれば，$\int_A e d\nu \in \operatorname{int} \int_A X d\nu$ が条件より成立しているから，$\nu(A_i) > 0,\ i = 1, 2,$ である．よって，経済 $\mathscr{E}$ の既約性により，ベクトル $z \in R^l$ で

$$z \in \int_{A_1} (e - X) d\nu\,;$$

$$z + \int_{A_2} f d\nu \in \int_{A_2} \{x \in X_a \mid x >_a f(a)\} d\nu\,;$$

を満たすものが存在する．したがって，A_2 から Ω への写像 g で

$$g(a) >_a f(a),\ \text{a.e.}\ a \in A_2\,;$$

$$\int_{A_2} g d\nu = z + \int_{A_2} f d\nu\,;$$

を満足するものがある．集合 A_2 の定義および (4) から

$$p\cdot g(a) > p\cdot f(a),\ \text{a. e.}\ \ a \in A_2,$$

が成立する．ここで（7）を用いると

$$p\cdot\int_{A_2} fd\nu < p\cdot\int_{A_2} gd\nu = p\cdot z + p\cdot\int_{A_2} fd\nu$$

$$\leqq p\cdot\int_{A_2} fd\nu$$

を導出できるが，これは矛盾である．

ゆえに $\nu(S)=0$ でなければならない．したがって，集合 S^* は ν-零集合である．■

上記定理1の条件について幾つかのコメントを与えることにしよう．まず，条件［1］の場合，Aumann (1964) におけるように選好関係の単調性 (monotonicity)（つまり，任意の $x \in X$ に対し $R^l_+ + x \subset \succ(x)$ が成立すること）が仮定されれば，あるいは単調性よりもやや弱く，選好関係（X, $\succ$）の弱デザィアラビリティーが仮定されれば，$e(a) \in R^l_{++}$ に代えて，よりアクセプタブルな $e(a) \in R^l_+$ の下で定理が成立する．その理由は，選好関係の単調性もしくは弱デザィアラビリティーが仮定されれば，凸集合の分離定理によってその存在が保証される価格ベクトル $p \in R^l_+$ は R^l_{++} に属することになり，したがって $e(a)=0$ であったとしても $f(a) \in D_w(X_a, \succ_a, p\cdot e(a), p) \Rightarrow f(a) \in D(X_a, \succ_a, p, e(a), p)$ が成立するからである．

［2］の条件は［1］と比較し，各経済構成員の消費集合に関する制約を大幅に緩和している．さらに，［1］においては $e(a) \in X(a)$ が要請されているのに対し，［2］ではこれが条件 (ii) と (iii) に弱められている．$e(a) \in X(a)$ を要請することの経済学的意味は，各経済構成員は経済活動に従事しなくとも自らの生命を維持できるということであり，経済現象の分析にあたりこの種の強い仮定は好ましくない．

条件 (ii) $\int_A ed\nu \in \operatorname{int}\int_A Xd\nu$ の意味は，これを2種類の条件に分離して考

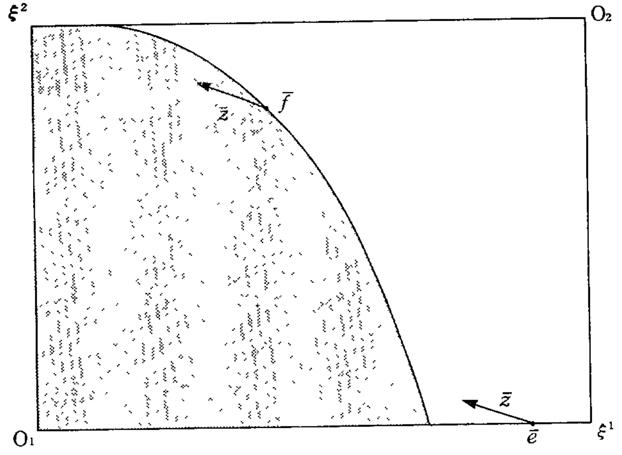
える方が理解しやすい．第1の条件は int $\int_A X d\nu \neq \phi$ ということである．これは，財空間の各座標が代表するすべての財は，必ず経済全体の無視できないような割合の人々によって，消費の対象とされることを意味する．したがって，この第1の要件は我々が経済問題を考察する上での制約にはならない．なぜならば，もし int $\int X d\nu = \phi$ であったとすれば，int $\int X d\nu$ は凸集合だからそれを含む最小の線型部分空間 L を考え，L と財空間 Ω との共通部分を改めて財空間 Ω と書き直した上で，分析を進めればよいからである．第2の条件は，総初期保有量 $\int_A e d\nu$ が $\int_A X d\nu$ の内点になるということである．これは考察の対象となるあらゆる価格ベクトル p の下で経済の平均所得水準が生命を維持できる水準以下にはならないための要件である．生産セクターを分析の枠組の中に入れないうちは，この種の要件は奇異に見えるが，生産技術を考えた枠組の中で解釈すれば，技術が十分に生産的（productive）であるという要請に対応するものである．

条件（iii）の**既約性**（irreducibility）の意味はつぎのように理解できる．f を任意のフィージブルな配分としよう．経済構成員全体，A，をどのように分割しようと，一方のグループ A_1 に属する構成員は，自己の生命を維持できる水準に消費量を保ちつつ，他方のグループ A_2 に属するすべての構成員が配分 f によって与えられる消費水準よりも好ましい消費水準に達するよう，A_1 の初期保有量の一部を A_2 に与えることができる．

既約性の条件が満たされる場合と満たされない場合の例をエッジワース・ボックス・ダイアグラムを用いて表現すれば，第1図と第2図のようになる．左下隅の O_1 と右上隅の O_2 は，任意の配分 g に対し，グループ A_1 と A_2 への集計された配分

$$\int_{A_1} g d\nu \quad と \quad \int_{A_2} g d\nu$$

を計る原点を示している．箱の大きさは，



第 1 図　既約性が満たされる場合

$$\xi=(\xi^1,\xi^2)=\int_A ed\nu$$

によって与えられる．あるフィージブルな配分 f を所与としよう．図中の点 $\bar{e}$, $\bar{f}$ はそれぞれ

$$\bar{e}:=\int_{A_1} ed\nu\,;$$

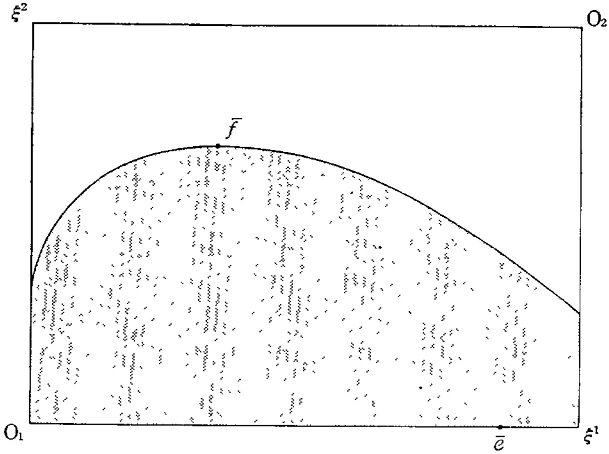
$$\bar{f}:=\int_{A_1} fd\nu\,;$$

である．

配分 h に対応する点 $\bar{h}$ も同様に定める．図の陰影部は集合

$$\int_{A_2}\{x\in X_a|x>_a f(a)\}\,d\nu$$

を示す．$\bar{z}:=\bar{h}-\bar{e}$ とし，ベクトル $\bar{z}$ によって配分 h を指定する．第１図によって表現される経済の場合，$\bar{z}$ を図のように定めれば既約性の条件中



第 2 図　既約性が満たされない場合

の要請は満たされる．第2図の場合，箱の中でこの要請を満たし得ないから，経済は既約的ではない．

以上の議論から理解できるように，経済が既約性を持つか否かは，選好関係と初期保有量分布の双方に依存している．定理1の条件［1］は［2］の要件を満たしているから，［2］の特殊ケースである．［1］の条件を特に述べた理由は，既約性の条件が選好関係の性質から独立した形で表現されるとすれば，［1］のようになることを強調するためである．経済学的観点からは［2］の形の条件の方が好ましいと言えるであろう．

20. 初等的財空間と同値定理

前節ではすべての財が完全分割可能である場合を採り上げ，コア配分とワルラス配分の同値定理——Aumann の定理——を証明した．しかしながら，この定理が一般に非分割財を含む財空間に拡張され得ないことは，

例 18.1 において確認した通りである.

例 18.1 の状況を詳しく眺めてみよう. この例においてコアとワルラス配分の集合が一致しないのは, ワルラス配分が存在しないにもかかわらずコア配分は存在するからである. ワルラス配分が存在しない理由は, 経済の総(超過)需要が財の非分割性により(第1種の)不連続性を持つことにあった.

ところで, 定理 18.2 ではコアとワルラス配分の集合の双方を少々拡大し, 弱コアと弱ワルラス配分の集合の間で同値定理が成立することを調べた.

では, コア概念を修正することなく, ワルラス均衡概念の変更のみで, コアと一致するような均衡配分の集合は考えられないだろうか. この問いに答えるのが本節の目的である.

このような均衡概念は, 明らかにつぎの 2 つの要件を満たさねばならない. 第1は, 弱ワルラス均衡と同様に, 財の非分割性によりその上半連続性(第1種の連続性)を阻害されないような“需要対応”によって定義されること. 第2は, 弱ワルラス均衡よりやや制約された均衡概念であること.

上の要件を端的に満足する均衡概念を導入する目的から, 本節では非常に根本的な非分割財の形を考えたい. したがって, つぎに財空間に関する1つの概念を導入しよう.

定義 1〔初等的財空間 (Elementary Commodity Space)〕 財空間 Ω が

$$\Omega = Z^{l-1} \times R \qquad (Z = \{\cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots\})$$

の形に書けるとき, Ω は**初等的** (elementary) であるとよばれる. 換言すれば, 初等的財空間は (l-1) 個の純粋非分割財と1個の完全分割可能財からなる. (例 1.1 の(2)および図 1.2 を参照せよ.) 財空間 Ω が初等的であるとき, 第 l 番目の財を完全分割可能財とする ($l \in \mathscr{D}_0^c$).

定義 2〔弱正ワルラス均衡，弱正ワルラス配分〕 Ω を初等的財空間とし，$\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ を任意の経済とする．(p,f) を経済 $\mathscr{E}$ の弱ワルラス均衡とするとき，もし価格ベクトル $p=(p^1,\cdots,p^l)$ が $p^l>0$ の条件を満たすならば，(p,f) を**弱正ワルラス均衡** (weakly positive Walras equilirium) とよぶ．(p,f) が弱正ワルラス均衡であれば，配分 f を経済 $\mathscr{E}$ の**弱正ワルラス配分** (weakly positive Walras allocation) といい，その集合を $\mathscr{W}^d_w(\mathscr{E})$ と書く．

定理 1〔弱正ワルラス配分の集合とコアの同値定理〕 Ω を初等的財空間とし，$\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}_{lns,odd}\times\Omega$ はつぎの条件を満たす任意の経済とする：

(1) $X_a=R^l_+\cap\Omega$, $e^l(a)>0$, $(\exists t>0)[e(a)-(0,\cdots,0,t),e(a)]\subset X_a$ が a. e. $a\in A$ に対して成立する；

(2) 〔純粋非分割財から来る所得の充分性〕 任意の $p\in R^l_+$, $p\neq 0$, に対し，$p^l=0$ ならば $\{a\in A|p\cdot e(a)>\inf\, p\cdot X_a\}$ は ν-零集合とはならない．

このとき，$\mathscr{W}^d_w(\mathscr{E})=\mathscr{C}(\mathscr{E})$

が成立する．

証明 最初に $\mathscr{C}(\mathscr{E})\subset\mathscr{W}^d_w(\mathscr{E})$ を証明しよう．定理 18.2 より

$$\mathscr{C}(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}_w(\mathscr{E})\subset\mathscr{W}_w(\mathscr{E})$$

が成立している．そこで $f\in\mathscr{C}(\mathscr{E})$ とすれば，ある価格ベクトル $p\neq 0$ $\in R^l_+$ に対し，(p,f) は弱ワルラス均衡となる．この価格ベクトル p が，実は $p^l>0$ の条件を満たすことを示そう．仮に $p^l=0$ であったとしよう．そうすると，純粋分割財から来る所得の充分性により，$\nu(S)>0$ なるある $S\in\mathscr{A}$ に対し

$$p\cdot e(a)>\inf\, p\cdot X_a\,,\quad \text{a. e. } a\in S,$$

が成り立つ．このとき (p,f) は弱ワルラス均衡にはなりえない事を以下に示す．

$$f(a)\in D_w(X_a, >_a, p\cdot e(a), p), \quad \text{a.e. } a\in A,$$

だから，今，$f(a)\in D_w(X_a, >_a, p\cdot e(a), p)$ かつ $p\cdot e(a) > \inf p\cdot X_a$ なる経済構成員 $a\in S$ を考えよう．ある消費ベクトル $y=(y^1, \cdots, y^l)\in X_a$ に対し，$p\cdot y<p\cdot e(a)$ が成立する．ところが，仮定により選好関係 $(X_a, >_a)$ は完全分割可能財の優先性を示すから，

$$z^l>y^l, \quad z^j\leqq y^j (j\neq l), \quad z>_a f(a)$$

を満足するある消費ベクトル $z=(z^1, \cdots, z^l)\in X_a$ が存在する．しかし，この z に対し

$$p\cdot z=p\cdot y<p\cdot e(a)$$

となるから，$f(a)$ が弱需要ベクトルであったことと矛盾する．よって，$p^l>0$ でなければならない．したがって，$f\in \mathscr{W}^d_w(\mathscr{E})$ が証明された．

つぎに $\mathscr{W}^d_w(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}(\mathscr{E})$ を示したい．$f\in\mathscr{W}^d_w(\mathscr{E})$ とし，(p,f) を弱正ワルラス均衡としよう．$f\notin\mathscr{C}(\mathscr{E})$ と仮定し，矛盾を導く．あるコアリション $S\in\mathscr{A}$，$\nu(S)>0$，$\mathscr{E}$ のある配分 g に対し，条件

（3） $g(a) >_a f(a)$, a.e. $a\in S$;

（4） $\int_S g d\nu \leqq \int_S e d\nu$;

が成立する．そこで2つの場合に分けて考えよう．

ケースI　$\int_S g^l d\nu < \int_S e^l d\nu$ の場合．

(p,f) は弱正ワルラス均衡だから（3）は

$$p\cdot \int_S g d\nu \geqq p\cdot \int_S e d\nu$$

を意味するが，$p^l>0$ および（4）より

$$p\cdot\int_S g d\nu < p\cdot\int_S e d\nu$$

となり矛盾が生じる.

ケースII $\int_S g^l d\nu = \int_S e^l d\nu$ の場合.

条件 (1) により $e^l(a)>0$, a. e. $a\in A$, だから, ある $C\subset S$, $C\in\mathscr{A}$, $\nu(C)>0$ について

$$g^l(a)>0,\ \text{a. e. } a\in C,$$

が成立する. そこで, 各 $a\in C$ に対し

$$Q(a):=\{x\in X_a|x\succ_a f(a)\}\cap\{x\in X_a|x\leqq g(a),\ x^l<g^l(a)\}$$

と定義すれば, 選好関係 $(X_a, \succ_a)$ の連続性と局所非飽和性から, 各 $a\in C$ について $Q(a)\neq\phi$ となる. また, 写像 $\mathscr{E}, f, g$ はそれぞれ可測だから, 対応 Q: $(C, \mathscr{A}_C, \nu|_C)\to\Omega$ も可測である. よって, 可測選択の定理により

$$h^*(a)\in Q(a),\ \text{a. e. } a\in C,$$

なる可測写像 $h^*: C\to\Omega$ が存在する. そこで h^* を用いて可測写像 $h: A\to\Omega$ を

$$h(a):=\begin{cases} h^*(a), & a\in C \\ e(a), & a\in A\backslash C \end{cases}$$

と定義すれば, h は経済 $\mathscr{E}$ の配分であり, さらに

(5) $h(a)\succ_a f(a)$, a. e. $a\in C$;

(6) $\int_C h d\nu \leqq \int_C e d\nu$;

の2条件を満足する. しかも写像 h の定義から, (6) の不等号一等号は第 l 座標に関し不等号で成立する. よって, ケースIIの場合も, ケースIにおいて g を h に, S を C に置き換えた場合に帰着する.

以上の議論から，いずれの場合も $f \in \mathscr{C}(\mathscr{E})$ が成立する．■

上記の弱正ワルラス配分の集合とコアの同値定理は，先の同値定理（定理 18.2，定理 19.1）と比較し，多少異なった条件を必要としている．この点に関し以下に注釈を加えることにしたい．

まず選好関係についての条件としては，局所非飽和性に加え，完全分割可能財の優先性が要求されている．これはコア配分が弱正ワルラス配分となることとを示すときに，凸集合の分離定理によって保証される価格ベクトルが，第 l 財(完全分割可能財)について正の価格を与えていることを保証しなければならないからである．

つぎに定理 1 の条件（1）と（2）について説明しよう．これらは定理 19.1 の既約性に対応する条件である．（2）は経済 $\mathscr{E}$ が既約性を持てば成立するから，既約性よりも弱い条件である．これに反し（1）は経済の既約性よりも強い条件である．なぜならば，（1）は，初期保有量が消費集合に対し，第 l 財(完全分割可能財)について“相対的”な“内点”となっていることを要求するからである．

定理 1 の結論は，純粋非分割財を含む初等的財空間において，コアと弱正ワルラス配分の集合が一致していることを示している．この帰結をコアの決定性という観点から眺めてみよう．例 18.1 を考慮すれば，ワルラス配分は存在しなくともコア配分は存在するのである．上の結論は，コアの決定性の問題が弱正ワルラス配分の決定性に帰着することを示している．各経済構成員の需要対応が上半連続性を欠いたとしても，弱需要対応の方は一般に上半連続性を保持することに注意すれば，非分割財を含むような財空間 Ω を取り扱う場合，コア概念の方がワルラス均衡の概念よりもアトラクティヴな概念であることが示唆される．この点はすでに H. Scarf（例えば Shapley and Scarf (1974) を参照）によって指摘されているこ

とでもある.

21. 初期保有量分布の拡散性と同値定理

第18節の例1は，すべての財が完全分割可能でなければ，コアとワルラス配分の集合の同値定理は必ずしも成立しないことを示していた．Edgeworth も彼の古典 *Mathematical Psychics* (1881) において，この種の命題の成立には，財の完全分割可能性が1つの不可欠な要素だと考えていたようである（下記の注1参照）．しかしながら，この点に関する限り Edgeworth の洞察は，必ずしも一般的には正しくないと我々は考える．既に述べたように，先の例 18.1 において同値定理が成立しないのは，コア配分が存在するのにワルラス配分が存在し得ない状況になっていたからである．したがって，非分割財が存在する場合においても，ワルラス均衡の存在が保証されるような経済環境にあっては，両者の一致が見られるものと期待される.

注 1　以下は Edgeworth (1881) からの抜粋である.

(1)　(p. vi) "...Then (α) a mathematical theory of *Contract unqualified by Competition* is given...(β) A mathematical theory of *Contract determined by Competition in a perfect Market* is given, or at least promised...Reference is made to other mathematical theories of Market...(γ) attention is concentrated on the question—*What is a perfect Market?* It is argued that Market is imperfect, *Contract is indeterminate* in the following cases:—

(I.)　When the number of competitors is limited...

(II.)　In a certain similar case likely to occur in contracts for *personal service*...

(I. and II.)　When the *articles* of contract are not perfectly divisible...

(III.)　In case of *Combination*, Unionism; in which case it is submitted that (in general and abstractly speaking) *unionists stand to gain* in senses contradicted or ignored by distinguished economists...

(IV.) In a certain case similar to the last, and likely to occur in *Co-operative Association*..."

(2) (pp. 18–19) "A *perfect* field of competition professes in addition certain properties peculiarly favourable to mathematical calculation; namely, a certain indefinite *multiplicity* and *dividedness*, analogous to that *infinity* and *infinitesimality* which facilitate so large a portion of Mathematical Physics (consider the theory of Atoms, and all applications of the Differential Calculus). The conditions of a *perfect* field are four; the fiirst pair referrible to the heading *multiplicity* or continuity, the second to *dividedness* or fluidity.

I. Any individual is free to *recontract* with any out of an indefinite number...

II. Any individual is free to *contract* (at the same time) with an indefinite number... This condition combined with the first appears to involve the indefinite divisiblility of each *article* of contract... which might be erected into a separate condition.

III. Any individual is free to *recontract* with another independently of, *without the consent* being required of, any third party...

IV. Any individual is free to *contract* with another independently of a third party..."

(3) (p. 46) "The *second* imperfection may be operative in many cases of contract for personal service. Suppose a market, consisting of an equal number of masters and servants, offering respectively wages and service; subject to the condition that no man can serve two masters, no master employ more than one man; or suppose equilibrium already established between such parties to be disturbed by any sudden influx of wealth into the hands of the masters. Then there is no *determinate*, and very generally *unique*, arrangement towards which the system tends under the operation of, may we say, a law of Nature, and which would be predictable if we knew beforehand the

real requirements of each, or of the average, dealer; but there are an indefinite number of arrangements *à priori* possible, towards one of which the system is urged *not* by the concurrence of innumerable (as it were) neuter atoms eliminating chance, but (abstraction being made of custom) by what has been called the Art of Bargaining—higgling dodges and designing obstinacy, and other incalculable and often disreputable accidents."

ワルラス均衡の存在を保証する要件として最も重要なのは，経済の総(超過)需要対応が上半連続性を持つということである．この性質は，非分割財を含む財空間を持つ経済において，必ずしも成立しない．しかし，第4および第5章における分析が示すように，所与の経済において富分布が拡散性を持つならば，その総需要対応は上半連続性を獲得することができる．本章で考察の対象となる経済は，消費セクターのみを有する経済であるから，富分布の拡散性は経済構成員間の初期保有量分布の拡散性によってもたらされる．したがって，本節における我々の目標(ゴール)は，初期保有量分布が拡散的な経済において，コアとワルラス配分の集合が一致することを示すことにある．

ワルラス均衡の存在が，ワルラス配分とコア配分の同値定理にとって必要条件であることは，これまでの議論から明白である．それでは，一般に，ワルラス均衡の存在それ自体，同値定理の成立を保証するであろうか．この問いに対する答えは現在のところ未知である．

注 2 Edgeworth が *Mathematical Psychics* における彼の議論にとって，財の完全分割可能性を，不可欠な前提であると考えていた点については，先程指摘した通りである．しかし，その後に書かれた論文 (Edgeworth (1891)) において，注 1 の (3) で引用した点については，これを例外的な現象と考えていたようである．なぜ例外的なのか，その説明は与えられて

いない．幸いに Hicks (1930) がその説明を与えている．Hicks の鋭い分析の目は，これらの現象をすべて市場需要の不連続性にかかわる現象としてとらえ，多種多様な個人からなる経済ではこの種の問題が生じないと考えた．以下に彼の論文からの引用を載せよう．引用文中のイタリック体は筆者によるものである．

"...in an article in the *Giornale degli Economisti* (1891) he observed that the fact that it is much easier for an employer to take on two workmen than for a workman to serve two employers "constitutes a positive advantage to the workpeople in their dealings with entrepreneurs." Fortunately he qualified this: "I do not regard these nice points as more than *curiosa*." For what does this argument mean in practice? If we are dealing with industrial production, many men being employed by each entrepreneur, the range of indeterminateness involved is only that between the marginal product of n men and $n+1$. This difference is usually regarded as the atom of economies, into whose recesses we need not pry. But even if the ratio of workmen to employers is small, and the differences do become significant, we can only regard as serious the possibility of the men getting an advantage within the limited range available if we suppose the employers to be "equal-natured" and equal-circumstanced. Otherwise, different employers will be situated differently with respect to their demand for labour; some will be on the verge of increasing their demand, others on the verge of reducing it. Once we assume a fluid market (*i. e.* that changes do not in themselves involve costs and inconveniences) we may be certain that a slight change in the situation of employers will inevitably have its reaction on the demand for labour. Even if it is insufficient to cause all employers to change their demand, it will influence some. *Edgeworth's second imperfection naturally produces "curiosa"; it is a problem of discontinuity and the effects of discontinuity are usually reduced to vanishing point when we have individuals of varying capacities on the market...*"

経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ が与えられたとき，可測写像 $X:A\to\mathscr{X}$，$w_p:A\to R$ $(p\in R^l_+)$ をそれぞれ

$$X:a\mapsto X_a,$$

$$w_p:a\mapsto p\cdot e(a)$$

によって定めれば，測度 ν の X の下での像測度 μ_X は経済 $\mathscr{E}$ の**消費集合分布** (the consumption set distribution)，ν の w_p の下での像測度 μ_{w_p} は $\mathscr{E}$ の**富分布** (the wealth distribution) であった．また，$\mu_{w_p|X}$ は消費集合 X が与えられたもとでの μ_{w_p} の条件つき分布である（数学注 13.1 参照）．

定義 1〔初期保有量分布の拡散性 (Dispersedness of the Endowment Distribution)〕 ある経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ が与えられたとき，$\mathscr{E}$ の初期保有量分布 μ_e が**拡散的** (dispersed) であるとは，任意の価格ベクトル $p\neq0\in R^l_+$ に対し，μ_Xほとんどいたるところ条件つき富分布 $\mu_{w_p|X}$ がアトムレス測度，すなわち各富水準 $w\in R$ に 0 のウェートを与えることである．

定理 1〔初期保有量分布の拡散性と同値定理〕 経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}_{ins}\times\Omega$ が与えられたとき，その初期保有量分布 μ_e が拡散的であれば，

$$\mathscr{W}(\mathscr{E})=\mathscr{C}(\mathscr{E})$$

が成立する．

証明 命題 18.1 の (1) により $\mathscr{W}(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}(\mathscr{E})$ が成立するから，$\mathscr{C}(\mathscr{E})\subset\mathscr{W}(\mathscr{E})$ を証明すればよい．そこで，$f\in\mathscr{C}(\mathscr{E})$ としよう．定理 18.2 より

$$\mathscr{C}(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}_w(\mathscr{E})\subset\mathscr{W}_w(\mathscr{E})$$

だから，ある価格ベクトル $p\neq0\in R^l_+$ に対し，(p,f) は弱ワルラス均衡となる．$f\in\mathscr{W}(\mathscr{E})$ を示すには

（1）　a. e. $a \in A$, $f(a) \in D_w(X_a, >_a, w_p(a), p)$

$$\Rightarrow f(a) \in D(X_a, >_a, w_p(a), p)$$

を証明すればよい．ここで $w_p(a) = p \cdot e(a)$ である．

ところで，定理 19.1 の証明の中で我々は，

（2）　a. e. $a \in A$, $w_p(a) \notin J_p(X_a) \Rightarrow f(a) \in D(X_a, >_a, w_p(a), p)$

の成立することを明らかにした．（定理 19.1 においては，財空間 Ω と集費集合 X_a の凸性が仮定されているが，これらの仮定は（2）の成立にとって必要ではなかったことに注意しよう．）したがって，上記定理の証明は結局

（3）　a. e. $a \in A$, $w_p(a) \notin J_p(X_a)$

の成立を示すことに帰着する．

以下（3）の成立を証明するが，それに先立ち，経済 $\mathscr{E}$ の消費集合分布 μ_X および価格ベクトル p における消費集合と富の結合分布 μ_{X,w_p} の意味を確認しておきたい．経済 $\mathscr{E}$ の分布を $\mu_{\mathscr{E}}$ $(=\nu \circ \mathscr{E}^{-1})$ と書くと，μ_X および μ_{X,w_p} はそれぞれ以下のように定義される．

$\mu_X(S) := \mu_{\mathscr{E}} \circ \mathrm{pr}_X^{-1}(S)$,　$S \in \mathscr{B}(\mathscr{X})$;　$\mu_{X,w_p}(T) := \mu_{\mathscr{E}} \circ \pi_{X,w_p}^{-1}(T)$, $T \in \mathscr{B}(\mathscr{X} \times R)$;（ここで $\mathrm{pr}_X : (X, >, e) \mapsto X$, $\pi_{X,w_p} . (X, >, e) \mapsto (X, p \cdot e)$ である．）

さらに，集合 J_p の定義を思い起そう．

$J_p = \{(X, w) \in \mathscr{X} \times R \mid (\exists x \in C_p(X)) w = p \cdot x\}$（ここで, $C_p(X) = \{x \in X \mid (\exists \delta > 0) HN_p(x, \delta) \cap X = \phi\}$, $HN_p(x, \delta) = \{z \in R^l \mid \|x - z\| < \delta, p \cdot z < p \cdot x\}$ であった．第 2 章第 5 節参照．）

さて，命題 5.3 より集合 J_p は $\mathscr{X} \times R$ の解析集合である．$\mathscr{X} \times R$ は Polish 空間だから古典的な定理（数学注 5.8 参照）により，J_p は $\mathscr{B}(X \times R)$ の普遍完備化に属する．そこで $\bar{\mu}_{X,w_p}$ を $\mathscr{B}(\mathscr{X} \times R)$ 上の確率測

度 μ_{X,w_p} の完備化としよう．

（3）を証明するには，集合 J_p が μ_{X,w_p} 零集合であることを言えばよい．ところが，

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{X_p w_p}(J_p) &= \int_{\mathscr{X}} \mu_{w_p|X}(J_p(X), X)\,d\mu_X(X)\\ &= \int_{\mathscr{X}} \sum\nolimits_{w\in J_p(X)} \mu_{w_p|X}(\{w\}, X)\,d\mu_X(X)\\ &= 0,\end{aligned}$$

である．上の等式中，最後の 2 つの等号はそれぞれ，$\mathscr{X}$ に属する任意の X に対し $J_p(X)$ は可算集合であること（定理 5.1），初期保有量分布 μ_e は拡散的であるから任意の $p\neq 0\in R^l_+$ について μ_X ほとんどいたるところ条件つき富分布 $\mu_{w_p|X}(\cdot, X)$ はアトムレス測度であること，から従う．以上で証明が完了した．■

上記定理 1 は，コアとワルラス配分の集合の同値定理としてエレガントな形になっているようにみえるが，実は重要な落し穴のあることに注意しておきたい．

第 1 章において我々が与えた分割可能財の定義は，財の分割可能性に関し非常に弱い要請を行うものであるが，その意味ですべての財が分割可能財でなければ，初期保有量分布の拡散性は一般的には成立し難い．なぜならば，すべての $j\in\mathscr{D}_\Omega$ について $p^j=0$ となるような価格ベクトル $p=(p^1, \cdots, p^l)$ においては，富分布 μ_{w_p} の台は Lebesgue 測度 0 の集合となるからである．

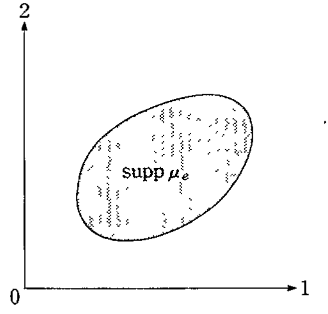
したがって，上記定義 1 の意味における初期保有量分布の拡散性の要求は，財空間 Ω が本質的に非分割財を許容するという我々の意図に反しかねない．そこで，つぎに，定理 1 の拡散性の要求を弱めた場合，上記の同値定理がいかなる条件の下で成立するかを示すことにしよう．

初期保有量分布に関する拡散性の条件を，以下のように弱めれば，財空間 Ω において幾つかの財が非分割財であっても，この要件が満足されうる．

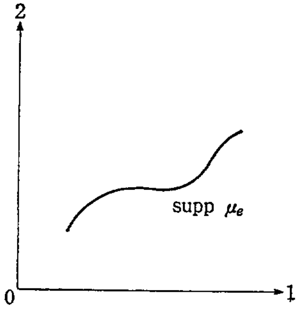
定義 2〔初期保有量分布の完全分割可能財の方向への拡散性 (Dispersedness of the Endowment Distribution in the Direction of Perfectly Divisible Commodities)〕 経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ の初期保有量分布 μ_e が**完全分割可能財の方向へ拡散的** (dispersed in the direction of perfectly divisible commodities) であるとは，価格ベクトル $p=(p^1,\cdots,p^l)\in R^l_+$ がすべての $j\in\mathscr{D}^0_\Omega$ に対して $p^j>0$ であれば，μ_X ほとんどいたるところ条件つき富分布 $\mu_{w_p|X}(\cdot,X)$ がアトムレス測度になることを意味する．

経済 $\mathscr{E}$ の初期保有量分布 μ_e が完全分割可能財の方向へ拡散的であることと，μ_e の台が第1—3図のいずれかの形状を持つこととは矛盾しない．これに対し，μ_e が拡散的であれば，μ_e の台は第1図もしくは第2図の形状を持ちうるが，第3図の形状とは相いれない．

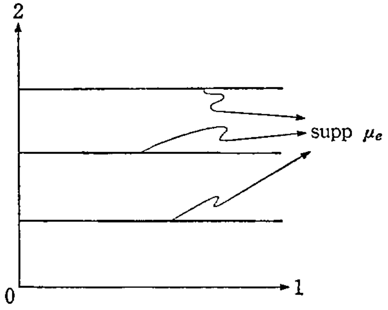
初期保有量分布に関する拡散性の要求は，なるべく財空間 Ω の形状を



第 1 図



第 2 図



第 3 図

制約しないことが望ましい．しかし，総需要対応の上半連続性を維持するには，拡散性の程度の減少に応じて，選好関係の性質に関し追加的条件を必要とする．追加的条件とは，完全分割可能財の優先性である．これが定義 2 による弱い拡散性を仮定する場合に支払うコストである．選好関係についてこの種の追加的性質が要求される理由は明らかであろう．それは，ある価格ベクトル p が均衡（もしくは弱均衡）価格ベクトルとなる場合，完全分割可能財の価格がすべて正になることを保証し，その結果 p の下で条件つき富分布の拡散性が満たされるからである．」

定理 2〔初期保有量分布の完全分割可能財の方向への拡散性と同値定理〕　経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}_{ins,odd}\times\Omega$ がつぎの2条件：

（1）　初期保有量分布 μ_e は完全分割可能財の方向へ拡散的である；

（2）〔非完全分割可能財から来る所得の充分性〕　価格ベクトル $p=(p^1,\cdots,p^l)\neq 0\in R^l_+$ がある $j\in\mathscr{D}^0_\Omega$ について $p^j=0$ ならば，集合 $\{a\in A|\, p\cdot e(a)>\inf p\cdot X_a\}$ は ν 零集合ではない；

を満足すれば，

$$\mathscr{W}(\mathscr{E})=\mathscr{C}(\mathscr{E})$$

が成立する．

証明　証明の方針は定理1の場合と同様である．(p,f) を所与の経済 $\mathscr{E}$ の弱ワルラス均衡としたとき，

$$(*)\quad \text{a. e. } a\in A,\ f(a)\in D_w(X_a,>_a,w_p(a),p)$$
$$\Rightarrow f(a)\in D(X_a,>_a,w_p(a),p)$$

の成立を示せば，定理が証明されたことになる．

すべての $j\in\mathscr{D}^0_\Omega$ について $p^j>0$ であれば，初期保有量分布 μ_e の完全分割可能財の方向への拡散性により，p の下で条件つき富分布 $\mu_{w_p|X}$ は μ_X ほとんどいたるところアトムレス測度となっている．よって，この場合（＊）の証明は定理1における証明に帰着する．

つぎに，ある $j\in\mathscr{D}^0_\Omega$ に対し $p^j=0$ となっている場合を考えよう．条件（2）より，ある $S\in\mathscr{A}$，$\nu(S)>0$，について

$$w_p(a)>\inf p\cdot X_a,\quad \text{a. e. } a\in S,$$

が成立する．このような場合，所与の (p,f) は弱ワルラス均衡にはなり得ないことを示そう．

$a\in S$，$f(a)\in D_w(X_a,>_a,w_p(a),p)$，$w_p(a)>\inf p\cdot X_a$ が成立しているとする．そうすると，$p\cdot x<w_p(a)$ なるある $x\in X_a$ が存在する．ここで，選好関係 $(X_a,>_a)$ が完全分割可能財に対する優先性を持つことを考慮す

れば，2つの消費ベクトル $x, f(a)$ に対し，

$$z^j > x^j,\quad z^i \leqq x^i (i \neq j),\quad z \succ_a f(a)$$

を満足する消費ベクトル $z=(z^1, \cdots, z^l) \in X_a$ が存在する．ところが $p^j=0$ だから，

$$p \cdot z \leqq p \cdot x < w_p(a)$$

となり，

$$f(a) \in D_w(X_a, \succ_a, w_p(a), p),$$

であったことに反する．

これで定理の証明が完了した．■

22. 情報節約的コア概念

第18節において指摘したように，コア概念に関する1つの周知の欠点は，それが要請する競争の形態——つまり，ブロッキング・コアリションの形成による競争——が，経済構成員間の自由なコミュニケーションと完全な情報交換とを想定し，1つのコアリションが形成されるために要する情報量が多過ぎるという点である．この批判に答えるために，例えば，経済構成員間の情報交換に関しある種の明示的な費用を導入し，そのもとでコア概念の想定する競争がワルラス均衡の想定する完全競争とどの程度異なるのか問いかけることもできる．（この種の問題を扱った論文としては Khan and Rashid (1977) を参照せよ.）しかしながら，明示的に情報あるいはコミュニケーションの費用を経済モデルに組み込むと，どうしてもアド・ホックな費用関数の導入に帰着してしまい，充分な説得力を有する費用関数の導入は難しいように思われる．

そこで本節の目的は，Schmeidler (1972) および Grodal (1972) が導入した情報節約的コア概念 (informationally tight core concept) を，我々の一般均衡モデルのフレームワークの中で展開させることにある．

$\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ を任意の経済とし，これを所与とする．$\rho:A\times A\to R$ を1つの可測関数としよう．任意の $\varepsilon>0$ に対し A の可算部分集合 $\{a_1,a_2,\cdots\}$ が存在し，

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a\in A|\ \rho(a,a_n)\leqq\varepsilon\}$$

となるとき，関数 ρ を**近隣関数** (a neighboring function) とよぶ．例えば，$\mathscr{P}$ 上の閉収束位相 $\mathscr{T}$ は距離化可能であるから（定理4.1参照），位相 $\mathscr{T}$ とコンパティブルな距離関数を δ とし，

$$\rho(a,b):=\delta((X_a,>_a),(X_b,>_b))+\|e(a)-e(b)\|,\quad a,b\in A$$

によって関数 ρ を定義すれば，ρ は近隣関数である．

任意の $\varepsilon>0$ に対し，経済 $\mathscr{E}$ におけるコアリションの集合 $\mathscr{A}$ の部分集合 $\mathscr{A}_\varepsilon$ を

$$\mathscr{A}_\varepsilon:=\{S\in\mathscr{A}|\ \nu(S)\leqq\varepsilon,S=\bigcup_{k=0}^{l}S_k,\ \text{かつ，すべての}\ k=0,\cdots,l\ \text{に関し}\ S_k\in\mathscr{A},\ \operatorname{diam}S_k\leqq\varepsilon\ (\text{ここで}\ \operatorname{diam}S_k:=\sup\ \{\rho(a,b)|\ a,b\in S_k\})\}$$

によって定義する．

近隣関数は経済構成員がどれ程相互に似通っているかを示す関数である．したがって，近隣関数の値が0に近ければ近いほど，情報伝達・コミュニケーションの費用は安くなると解釈される．そこで，経済 $\mathscr{E}$ のコアリションの集合を $\mathscr{A}_\varepsilon$ に制約するとすれば，その経済学的意味をつぎのように理解することが可能である．まず，ある $0<\varepsilon<1$ に対し，近似度が ε 以内の経済構成員は，相互の情報伝達やコミュニケーションが可能であると仮定する．このとき，$\mathscr{A}_\varepsilon$ に属するコアリションは，高々$(l+1)$個のグループ間のコミュニケーションによって形成可能なコアリションの集合ということになる．

命題 1　$\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ をある1つの経済とする．経済 $\mathscr{E}$ の

コアリション S が, $\mathscr{E}$ における配分 f を改善できる(もしくは, 強く改善できる)ならば, 任意の $\varepsilon>0$ に対し, $\mathscr{A}_\varepsilon$ に属するあるコアリション S_ε で配分 f を改善できる(強く改善できる)ものが存在する.

証明 $f: A\to\Omega$ を経済 $\mathscr{E}$ のある配分とし, コアリション $S\in\mathscr{A}$, $\nu(S)>0$, は f を改善(もしくは, 強く改善)できるものとする. そうすると,

$$g(a)>_a f(a),\ \text{a. e. } a\in S;$$

$$\int_S g d\nu-\int_S e d\nu \leqq 0 \quad (<0);$$

の条件を満足する配分 $g: A\to\Omega$ が存在する.

そこで, 任意の $C\subset S, C\in\mathscr{A}$ に対し,

$$\mu(C)=\left(\int_C(g-e)d\nu,\ \ \nu(C)\right)$$

とおく. $\mu(\phi)=0, \mu(S)=(y, \nu(S)), y=\displaystyle\int_S(g-e)d\nu\leqq 0$ (<0) である.

今, $\varepsilon>0$ が与えられたとしよう. 一般に $\varepsilon'<\varepsilon$ ならば $\mathscr{A}_{\varepsilon'}\subset\mathscr{A}_\varepsilon$ だから, $\varepsilon<\nu(S)$ と仮定してよい. ベクトル $(\varepsilon y, \varepsilon\nu(S))\in R^{l+1}$ は $\mu(\phi)$ と $\mu(S)$ の凸結合である. ν はアトムレス測度だから Liapounov の定理(数学注 8.2 参照)より, ある $C^*\in\mathscr{A}$, $C^*\subset S$, に対し

$$\mu(C^*)=(\varepsilon y, \varepsilon\nu(S))$$

が成り立つ. μ の定義からこれは

$$\nu(C^*)=\varepsilon\nu(S)\leqq\varepsilon,$$

$$\int_{C^*}(g-e)d\nu=\varepsilon y\leqq 0 \ \ (<0);$$

を意味する.

近隣関数 $\rho: A\times A\to R$ の定義により, $\varepsilon/2>0$ に対し A の可算部分集合 $\{a_1, a_2, \cdots\}$ が存在し,

$$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}\{a\in A|\ \rho(a, a_n)\leqq\varepsilon/2\}$$

が成立する．そこで集合列 $(S_n)_{n=1,2,\cdots}$ を帰納的につぎのように定義する：

$$S_1 := \{a \in C^* \mid \rho(a, a_1) \leqq \varepsilon/2\},$$

$$S_n := \{a \in C^* \mid \rho(a, a_n) \leqq \varepsilon/2\} \setminus \bigcup_{k=1}^{n-1} S_k, \quad n = 2, 3, \cdots$$

今，$I := \{n \in \{1, 2, \cdots\} \mid \nu(S_n) > 0\}$ と定義すれば，$(S_n)_{n \in I}$ は

$$S_n \cap S_{n'} = \phi, \quad n \neq n';$$

$$\nu(\bigcup_{n \in I} S_n) = \nu(C^*);$$

を満足する．各 $n \in I$ について

$$x_n = \int_{S_n} (g-e) d\nu - \frac{\nu(S_n)}{\nu(C^*)} \varepsilon y$$

とおけば，

$$\sum_{n \in I} x_n = 0$$

となる．$Z := \mathrm{co}\{x_n \in R^l \mid n \in I\}$ とし，Z を含む最小の線型部分空間を L としよう．

主張　原点 0 は L における Z の内点となる．

仮に主張が正しくなかったとしよう．そうすると凸集合の分離定理により，すべての $n \in I$ に対し $p \cdot x_n \geqq 0$ となるベクトル $p \in L, p \neq 0$, が存在する．ところが，任意の $n \in I$ について，

$$x_n = -\sum_{\substack{k \in I \\ k \neq n}} x_k$$

であるから，結局すべての n に対して $p \cdot x_n = 0$ が成立しなければならない．したがって，すべての $x \in Z$ について $p \cdot x = 0$ である．ここで

$$H := \{x \in L \mid p \cdot x = 0\}$$

とおけば，H は Z を含む L よりも真に小さい線型部分空間となり，L の定義と矛盾する．よって，主張の正しいことが証明された．

線型部分空間 L の次元を m とする．Carathéodory の定理（下の数学

注 1 参照) によって，原点 0 を集合 $\{x_n \in R^l \mid n \in I\}$ に属する$(m+1)$個の点の凸結合として表現できる．すなわち，各 $k=0, 1, \cdots, m$ について $0 \leqq t_k \leqq 1$, $\sum_{k=0}^{m} t_k = 1$ を満足するある t_k に対し，

$$0 = t_0 x_{n(0)} + t_1 x_{n(1)} + \cdots + t_n x_{n(m)},$$

$$n(k) \in I, \quad k = 0, 1, \cdots, m$$

と書くことができる．

各 $k=0, 1, \cdots, m$ に対し

$$\mu_k(B) := \left(\int_B (g-e) d\nu - \frac{\nu(B)}{\nu(C^*)} \varepsilon y, \quad \nu(B) \right), \quad B \subset S_{n(k)}, \quad B \in \mathscr{A}$$

を定義する．ν はアトムレス測度，ベクトル $(t_k x_{n(k)}, t_k \nu(S_{n(k)}))$ はベクトル $\mu_k(\phi) = 0$ とベクトル $\mu_k(S_{n(k)}) = (x_{n(k)}, \nu(S_{n(k)}))$ の凸結合だから Liapounov の定理を再び用いれば，ある $U_k \subset S_{n(k)}$, $U_k \in \mathscr{A}$ に対し

$$\mu_k(U_k) = (t_k x_{n(k)}, t_k \nu(S_{n(k)}))$$

が成立する．そこでコアリション $S_\varepsilon \in \mathscr{A}$ を

$$S_\varepsilon := \bigcup_{k=0}^{m} U_k$$

と定義すれば，$S_\varepsilon \subset C^* \subset S$ だから

$$g(a) >_a f(a), \quad \text{a. e. } a \in S_\varepsilon$$

であり，しかも

$$\int_{S_\varepsilon} (g-e) d\nu - \frac{\nu(S_\varepsilon)}{\nu(C^*)} \varepsilon y$$

$$= \sum_{k=0}^{m} t_k x_{n(k)} = 0$$

より

$$\int_{S_\varepsilon} g d\nu - \int_{S_\varepsilon} e d\nu \leqq 0 \ (<0)$$

が成立する．よって，コアリション $S_\varepsilon \in \mathscr{A}$, $\nu(S_\varepsilon) > 0$, は配分 f を改善(強く改善) できる．

最後に，$S_\varepsilon \in \mathscr{A}_\varepsilon$ を示そう．$S_\varepsilon = \bigcup_{k=0}^{m} U_k$，$m \leqq l$，かつ各 $k=0, 1, \cdots, m$ について

$$U_k \subset S_{n(k)} \subset \{a \in A \mid \rho(a, a_{n(k)}) \leqq \varepsilon/2\}$$

だから，$S_\varepsilon \in \mathscr{A}_\varepsilon$ となる．■

定義 1〔情報節約的コア（Informationally Tight Core)〕 $\mathscr{E}:(A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P} \times \Omega$ をある経済とする．$\mathscr{E}$ におけるフィージブルな配分のうち $\mathscr{A}_\varepsilon$ に属するコアリション S，$\nu(S)>0$，によって改善できない（強く改善できない）配分全体を，経済 $\mathscr{E}$ の**情報節約的コア**（informationally tight core)（**情報節約的弱コア**（informationally tight weak core)）とよび，これを $\mathscr{C}(\mathscr{E}|\mathscr{A}_\varepsilon)$（もしくは，$\mathscr{C}_w(\mathscr{E}|\mathscr{A}_\varepsilon)$）と書く．

命題 1 および定理 18.2，19.1，21.1，21.2 の系として，以下の結果を得る．

命題 2〔情報節約的(弱)コアと(弱)ワルラス配分の集合の同値定理〕

任意の $\varepsilon>0$ について以下の命題が成立する．

（1） 経済 $\mathscr{E}:(A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P}_{ins} \times \Omega$ において

$$\mathscr{W}_w(\mathscr{E}) = \mathscr{C}_w(\mathscr{E}|\mathscr{A}_\varepsilon).$$

（2） 経済 $\mathscr{E}$ の値域が $\mathscr{P}_{ins} \times \Omega$ で定理 19.1 もしくは 21.1 の条件を満たすか，あるいは，$\mathscr{E}$ の値域が $\mathscr{P}_{ins,odd} \times \Omega$ で定理 21.2 の条件を満足するならば，

$$\mathscr{W}(\mathscr{E}) = \mathscr{C}(\mathscr{E}|\mathscr{A}_\varepsilon)$$

が成立する．

数学注 1〔Carathéodory の定理〕 S を R^m の部分集合とする．$x \in \mathrm{co}\, S$ とすれば x は集合 S に属する高々$(m+1)$個の点の凸結合として表現できる．(Rockafellar (1970, Theorem 17.1, p. 155) 参照.)

23. 純粋に競争的な有限経済列

消費セクターとしてとらえた経済の定式化を節8節において行ったときに，アトムレス(確率)測度空間を経済構成員の空間として持つ経済に対し，統計学的視点からの解釈を与えた．

本節では，有限経済からなる点列 $(\mathscr{E}_n : A_n \to \mathscr{P} \times \Omega)_{n=1,2,\cdots}$ ——今後これを**有限経済列** (a sequence of finite economies) とよぼう——を考え，それがいかなる条件を満たせば，完全競争経済を表現していることになるのか明らかにしたい．そして，そのような有限経済列の極限として(本論における)経済を解釈できれば，我々はアトムレス(確率)測度空間を経済構成員の空間として持つ経済を，完全競争経済の1つの理想型 (ideal type) ——すなわち，1つの理想的完全競争経済 (an ideal perfectly competitive economy) ——として意味づけすることになるであろう．

完全競争経済 (a perfectly competitive economy) というとき，我々は各経済構成員の市場における影響力が無視できるような状況を指す．そこで，1つの有限経済列 $(\mathscr{E}_n : A_n \to \mathscr{P} \times \Omega)_n$ を所与したとき，それがいかなる条件を満足すれば，経済構成員各個人の影響力が無視できるくらいに小さくなって行くのか，これを以下で考えよう．

第1に明らかな条件は，経済構成員の数が無限に大きくなることである．したがって，

(1)　$\# A_n \to \infty$

を要請しなければならない．

第2の条件は，有限経済列が極限を持つという条件である．この要件の経済学的意味に関しては2点考えられる．第1点は，有限経済列によって表現されようとしている事象は，ある同一市場における競争性の程度だという点である．第2点は，任意の有限経済列を分析の対象とするとき，そ

の極限が何らかの意味で存在しなければ，一体いかなる経済の性質を明らかにしようとしているのか，理論上明確ではない点である．

第2の条件にかかわる最も弱い要請が

（2）　有限経済列 $(\mathscr{E}_n : A_n \to \mathscr{P} \times \Omega)_{n=1,2,\cdots}$ の導く選好・初期保有量分布列 $(\mu_n)_{n=1,2,\cdots}$ は弱収束する．

である．

以上の2条件だけでは，ある特定の個人が市場における影響力を維持し続けることを排除できない．

例 1〔競争的ではない有限経済列〕 $\Omega := R^2$, $X := R^2_+$, $> := \{(x, y) \in X \times X | \sqrt{x^1} + \sqrt{x^2} > \sqrt{y^1} + \sqrt{y^2}\}$ と定義し，有限経済列 $(\mathscr{E}_n : A_n \to \mathscr{P} \times \Omega)_{n=1,2,\cdots}$ を以下のように定める．

$$A_n = \{0, 1, \cdots, n\},$$
$$(\forall a \in A_n)\ \mathscr{E}_n(a) := (X, >, e_n(a)),$$
$$e_n(0) := (0, 4n),\quad e_n(a) := (4, 0)\quad (a \neq 0).$$

この有限経済列 $(\mathscr{E}_n)_n$ は，明らかに条件 (1)，(2) を満足する．しかし，経済 $\mathscr{E}_n$ が大きなればなるほど，構成員 $a=0$ の影響力は拡大する．$a=0$ の初期保有量を経済構成員一人当りの単位で測れば，

$$\frac{1}{n+1}(0, 4n) = \left(0, \frac{4n}{n+1}\right) \to (0, 4)$$

となって人口 $\# A_n \to \infty$ であっても0ベクトルに収束しない．

上の例におけるようにある特定の個人が市場において特異な力を持つことを防ぐために，つぎのような条件を付加する．

（3）′　$(\forall n = 1, 2, \cdots)\ S_n \subset A_n$, かつ $(\# S_n / \# A_n) \to 0$ ならば，

$$\frac{1}{\# A_n} \sum_{a \in S_n} e_n(a) \to 0$$

である．ここで $e_n: A_n \to \Omega$ は，$e_n(a) := \mathrm{pr}_2 \circ \mathscr{E}_n(a)$，$a \in A_n$，によって定義される．$\mathrm{pr}_2: \mathscr{P} \times \Omega \to \Omega$ は射影 $(X, \succ, e) \mapsto e$ である．

条件 (3)′ の意味は，経済構成員全体に対する相対的なコアリションの大きさが(経済人口の増大にともない) 0 に収束するようなコアリションの総初期保有量は，人口 1 人当りの単位で測定して，0 ベクトルに収束するということである．

各経済構成員の初期保有量は下から有界であるから，条件 (3)′ はつぎの条件と同値である（下記数学注 3 の (5) 参照).

（3） $\int \mathrm{pr}_2 \, d\mu_n \to \int \mathrm{pr}_2 d\mu$，ここで $\mu := \lim_n \mu_n$ である．

この条件 (3) は一般には (2) から導かれないが，もし経済構成員全員の初期保有量がある有界な集合に属しているならば，条件 (2) から導かれる．

以上の (1) から (3) までの条件を満たす有限経済列が，完全競争経済を表現する経済列である．Hildenbrand (1974) に従いこれを純粋に競争的な(有限)経済列とよぼう．

定義 1〔純粋に競争的な有限経済列 (Purely Competitive Sequence of Finite Economies)〕 T を消費特性空間 $\mathscr{P} \times \Omega$ の任意の部分集合とし，$(\mathscr{E}_n)_n$ を T の中に各構成員の消費特性を持つ有限経済列とする．$(\mathscr{E}_n)_n$ が以下の諸条件

（1） 経済 $\mathscr{E}_n$ における人口 $\# A_n$ は $n \to \infty$ にともない無限に大きくなる；

（2） 選好・初期保有量分布の列 $(\mu_n)_n$ が T 上で弱収束する；

（3） $\lim_n \int \mathrm{pr}_2 \, d\mu_n = \int \mathrm{pr}_2 \, d\mu$，$\mu := \lim_n \mu_n$；

（4） $\int \mathrm{pr}_2 \, d\mu > 0$

を満足するならば，$(\mathscr{E}_n)_n$ は **T 上で純粋に競争的である** (purely competitive on T) といわれる．

例 2〔純粋に競争的な有限経済列の例 (Hildenbrand (1974)〕

(1) 〔複製経済からなる有限経済列〕 Edgeworth (1881) や Debreu and Scarf (1963) が分析の対象とした経済列は，つぎのような有限経済列からなる．

$\mathscr{E}: A \to \mathscr{P} \times \Omega$, $0 < \# A < \infty$, $\sum_{a \in A} e(a) > 0$, を任意の有限経済とする．$n = 1, 2, \cdots$ に対し，$\mathscr{E}$ の **n 回複製経済** (n-fold replica economy) $\mathscr{E}_n$: $A_n \to \mathscr{P} \times \Omega$ を

$$A_n := A \times \{1, 2, \cdots, n\};$$
$$\mathscr{E}_n((a, j)) := \mathscr{E}(a), \quad a \in A, \quad j = 1, \cdots, n;$$

によって定義する．

$(\mathscr{E}_n)_n$ を $\mathscr{E}$ の複製経済からなる列とすれば，$\# A_n = n \# A$ かつ $(\forall n = 1, 2, \cdots)$ $\mu_n = \mu$ である．よって $(\mathscr{E}_n)_n$ は $\mathscr{P} \times \Omega$ 上で純粋に競争的である．

(2) 〔同型経済 (Type Economies) からなる有限経済列〕 T を消費特性空間 $\mathscr{P} \times \Omega$ の非空な有限部分集合とし，$\sum_{t \in T} \mathrm{pr}_2(t) > 0$ が成立するものとする．有限経済列 $(\mathscr{E}_n: A_n \to \mathscr{P} \times \Omega)_n$ の導く選好・初期保有量分布の列 $(\mu_n)_n$ が $(\forall n = 1, 2, \cdots)$ $\mathrm{supp}\ \mu_n = T$ を満たし，さらに

$$\# A_n \to \infty; \text{ 任意の } (\succ, e) \in T \text{ に対し}$$
$$\lim_n \ (1/\# A_n) \# \{a \in A_n \mid \mathscr{E}_n(a) = (\succ, e)\} > 0$$

が成り立つとき，$\mathscr{E}_n$ を**同型経済** (type economies) とよぶ．

$(\mathscr{E}_n)_n$ が同型経済からなる有限経済列であれば，$(\mathscr{E}_n)_n$ は T 上で純粋に競争的である．

(3) 〔標本経済 (Sample Economies) からなる有限経済列〕 μ を消費特性空間 $\mathscr{P} \times \Omega$ 上の任意の Borel 確率測度とする．選好・初期保有

量分布 μ から n 個の標本を独立に抽出すれば，n 人からなる有限経済 $\mathscr{E}_n$ を定める．このような経済 $\mathscr{E}_n$ を**標本経済** (sample economies) とよぶ．有限経済列 $(\mathscr{E}_n)_n$ が標本経済から構成されていれば，Glivenko-Cantelli の定理（数学注 8.3 の (3) 参照）により，(確率 1 で)純粋に競争的な有限経済列となる．

有限経済列の連続体表現

純粋に競争的な有限経済列 $(\mathscr{E}_n)_n$ は，完全競争経済をその理想型として極限に持つ経済列である．しかし，各有限経済 $\mathscr{E}_n$ の定義域 A_n は，一般に n が異なれば全く異なった集合となっている．そこで，極限経済の母集団 A の中に各有限経済 A_n の母集団を“埋め込ん”で考えた方が分析上便利な場合が多い．この方法についてここで簡単に触れておくことにする．

定義 2〔連続体表現〕 $(\mathscr{E}_n : A_n \to \mathscr{P} \times \Omega)_{n=1,2,\ldots}$ を純粋に競争的な有限経済列とする．$(\mathscr{E}_n)_n$ の**連続体表現** (continuous representation, or continuum representation) とは，経済 $\mathscr{E} : (A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P} \times \Omega$ と可測写像 $\alpha_n : A \to A_n$ からなる点列 $(\alpha_n)_n$ でつぎの 2 条件：

（1） $\nu \circ \alpha_n^{-1}(S) = \#S/\#A_n$ が任意の $S \subset A_n (n=1, 2, \cdots)$ について成立する；

（2） $\mathscr{E}_n^* := \mathscr{E}_n \circ \alpha_n \to \mathscr{E}$, a. e. $a \in A$;

を満足するものを言う．

注 1 経済 $\mathscr{E}_n^*$ と有限経済 $\mathscr{E}_n$ の選好・初期保有量分布は一致する．また，$\mathscr{E}_n^*$ の初期保有量写像を e_n^*（つまり，$e_n^* := \mathrm{pr}_2 \circ \mathscr{E}_n^*$）とし，$e := \mathrm{pr}_2 \circ \mathscr{E}$ とすれば，$e_n^* \to e$ ν-a. e. $a \in A$ であり，かつ

$$\int_A e_n{}^* d\nu \to \int_A e d\nu$$

が成立する. ⌉

命題 1〔連続体表現の可能性〕 T は消費特性空間 $\mathscr{P}\times\Omega$ の Borel 集合, $(\mathscr{E}_n : A_n \to T)_{n=1,2,\dots}$ は消費特性をすべて T 内に持つ純粋に競争的な有限経済の列とする. このとき,

(1) $(\mathscr{E}_n)_n$ の連続体表現 $(\mathscr{E} : (A, \mathscr{A}, \nu) \to T;\ \alpha_n : A \to A_n,\ n=1, 2, \cdots)$ が存在する.

(2) 各 $n=1, 2, \cdots$ について $f_n : A_n \to \Omega$ は有限経済 $\mathscr{E}_n : A_n \to T$ における配分で, Ω 上の f_n の分布は弱収束するものとすれば, $(\mathscr{E}_n)_n$ のある部分列 $(\mathscr{E}_k)_k$ とその連続体表現 $(\mathscr{E}\,;\ \alpha_k)$ において, 経済 $\mathscr{E}_k{}^*$ の配分 $f_k{}^* := f_k \circ \alpha_k$ がほとんどいたるところ経済 $\mathscr{E}$ のある配分 f に収束するものが存在する.

証明 (1) 所与の純粋に競争的な有限経済列に対応する選好・初期保有量分布の列を $\mu_n \to \mu$ とし, これに Skorokhod の定理(下記数学注 2 参照)を適用する. そうすると, あるアトムレス確率測度空間 $(A, \mathscr{A}, \nu)$ および A から T への可測写像 $\mathscr{E}, \mathscr{E}_n{}^*$ $(n=1, 2, \cdots)$ で条件

(i) $\mathscr{E}_n{}^*(a) \to \mathscr{E}(a)$, a. e. $a \in A$;

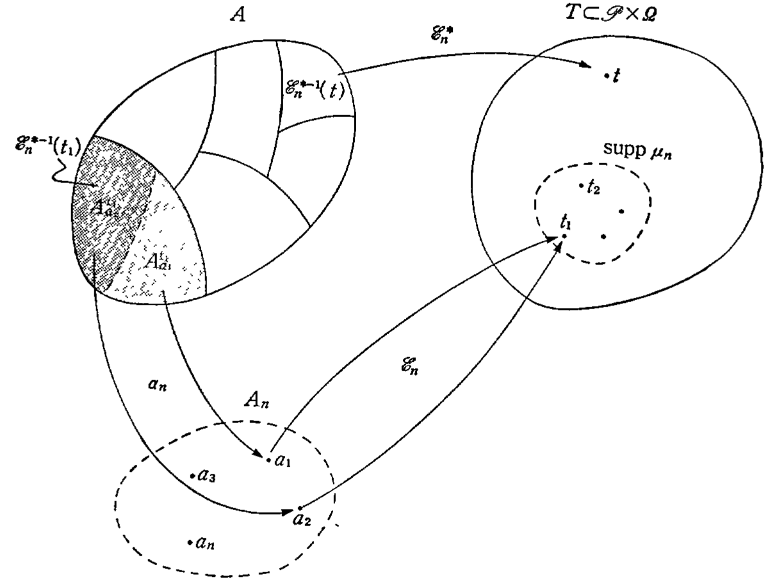
(ii) $\mu = \nu \circ \mathscr{E}$, $\mu_n = \nu \circ \mathscr{E}_n{}^*$ $(n=1, 2, \cdots)$;

を満足するものが存在する.

以下, 可測写像 $\alpha_n : A \to A_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ を構築する.

まず A を $\mathscr{E}_n{}^{*-1}(t)$, $t \in T$, によって可測分割する. つまり, 各 $t \in T$ に対し $A^t := \mathscr{E}_n{}^{*-1}(t)$ とおくと, $A^t \in \mathscr{A}$ は互いに素で, $A = \bigcup_{t \in T} A^t$ となる.

つぎに, supp μ_n に属する t については, A^t をさらに可測分割する. 測度空間 $(A, \mathscr{A}, \nu)$ がアトムレスであることから, Liapounov の定理に



$\mathscr{E}_n^{-1}(t_1)=\{a_1, a_2\}$ とすれば 集合 $\mathscr{E}_n{}^{*-1}(t_1)$ を ν 測度に関して2等分し，$A_{a_1}^{t_1}$, $A_{a_2}^{t_1}$ を得る．そして $A_a^{t_1}$の点はすべて a_1 へ，$A_{a_2}^{t_1}$ の点はすべて a_2 に写像する．

第 1 図 可測写像 $\alpha_n: A\to A_n$ の構築

より集合 A^t を ν 測度に関し $\#\mathscr{E}_n^{-1}(t)$ 等分割できる．すなわち，

$$A^t=\bigcup\{A_a^t|\ a\in\mathscr{E}_n^{-1}(t)\},$$

$$\nu(A_a^t)=\nu(A_{a'}^t),\quad a, a'\in\mathscr{E}_n^{-1}(t),$$

$$A_a^t\in\mathscr{A}\ \ (a\in\mathscr{E}_n^{-1}(t)\subset A_n)$$

とする．

最後に，$a^*\in A_n$ を任意に固定し，可測写像 $\alpha_n: A\to A_n(n=1, 2, \cdots)$ を

$$\alpha_n(b) := a,\quad b \in A_a^t$$

$$\alpha_n(b) := a^*,\quad b \in A \backslash \bigcup \{A_a^t \mid t \in \operatorname{supp} \mu_n,\ a \in A_n\}$$

によって定義すれば（第1図参照），$(\mathscr{E} : (A, \mathscr{A}, \nu) \to T;\ \alpha_n : A \to A_n,\ n = 1, 2, \cdots)$ は $(\mathscr{E}_n)_n$ の連続体表現である．

（2）　写像 $(\mathscr{E}_n, f_n) : A_n \to (\mathscr{P} \times \Omega) \times \Omega$ の結合分布を考え，これを η_n と書く．

$T \times \Omega$ は可分距離化可能空間，$(\eta_n)_n$ のそれぞれの周辺分布列は仮定により tight であるから，点列 $(\eta_n)_n$ も tight である（下記数学注1の (4) 参照）．よって $(\eta_n)_n$ のある部分列 $(\eta_k)_k$ が弱収束する（数学注1の (1)）．ここで $\eta_k \to \eta$ に Skorokhod の定理を適用すれば，アトムレス確率測度空間 $(A, \mathscr{A}, \nu)$ から $T \times \Omega$ への可測写像 $(\mathscr{E}_k^*, f_k^*), (\mathscr{E}, f)$ で条件

（i）　$(\mathscr{E}_k^*(a), f_k^*(a)) \to (\mathscr{E}(a), f(a))$, a. e. $a \in A$;

（ii）　$\eta = \nu \circ (\mathscr{E}, f)^{-1}$, $\eta_k = \nu \circ (\mathscr{E}_k^*, f_k^*)^{-1}$

を満足するものが存在する．A から A_k への可測写像 α_k は (1) の場合と全く同様に構築すればよい．■

数学注 1〔Tight な測度族（Billingsley (1968) 参照）〕 M は任意の距離空間，$\mathscr{M}$ は M の上で定義された測度からなる集合とする．任意の $\varepsilon > 0$ に対し，M のあるコンパクト部分集合 K_ε が存在し，測度族 $\mathscr{M}$ に属するすべての μ について $\mu(M \backslash K_\varepsilon) < \varepsilon$ が成立するとき，測度族 $\mathscr{M}$ は tight であるとよばれる．測度族 $\mathscr{M}$ がただ1つの測度 μ からなるとき，μ が tight である（数学注 11.2）ことと $\mathscr{M}$ が tight であることは同値である．以下の (1) と (2) の性質は Prohorov の定理ともよばれる．

（1）　測度族 $\mathscr{M}$ が tight ならば，$\mathscr{M}$ における任意の点列 $(\mu_n)_n$ は弱収束する部分列を含む．

（2） M は Polish 空間であり，$\mathscr{M}$ が弱相対コンパクト（つまり，弱収束位相による $\mathscr{M}$ の閉包がコンパクト）ならば，$\mathscr{M}$ は tight である．

（3） M は可分距離空間，$\mathscr{M}=\{\mu_0, \mu_1, \mu_2, \cdots\}$ とする．このとき，$\mathscr{M}$ に属する各測度は tight で，かつ $(\mu_n)_{n=1,2,\cdots}$ が μ_0 に弱収束するならば，$\mathscr{M}$ は tight である．

（4） $M=M_1\times M_2$，$\mathrm{pr}_1 : M\to M_1$ と $\mathrm{pr}_2 : M\to M_2$ は射影，$\mathscr{M}_1=\{\mu^1 | \mu^1=\mu\circ\mathrm{pr}_1^{-1},\ \mu\in\mathscr{M}\}$，$\mathscr{M}_2=\{\mu^2 | \mu^2=\mu\circ\mathrm{pr}_2^{-1}, \mu\in\mathscr{M}\}$ とする（すなわち，$\mathscr{M}_1$ と $\mathscr{M}_2$ は $\mathscr{M}$ に属する測度の周辺分布からなる集合）．このとき，$\mathscr{M}$ が tight であることと $\mathscr{M}_1$ および $\mathscr{M}_2$ の双方が tight であることとは同値である．

数学注 2〔Skorokhod の定理（Skorokhod (1965) および Dudley (1968) 参照)〕 M は可分距離空間，$(\mu_n)_n$ は M の上の測度からなる点列で μ に弱収束するものとする．このとき，測度空間 $(\Omega, \mathscr{A}, \nu)$ および Ω から M への可測写像 $f, f_n (n=1, 2, \cdots)$ で条件

(i) f_n は f へ概収束，つまり，$f_n(\omega)\to f(\omega)$，a. e. $\omega\in\Omega$；

(ii) $\mu=\nu\circ f^{-1}, \mu_n=\nu\circ f_n^{-1}$ $(n=1, 2, \cdots)$；

を満足するものが存在する．もし M が Polish 空間であれば，測度空間 $(\Omega, \mathscr{A}, \nu)$ は [0,1] 区間の Lebesgue 測度空間としてよい．

数学注 3〔分布収束，一様可積分性，一般化された Lebesgue の定理〕

（1） S はある距離空間，$n=1, 2, \cdots$ に対し f_n は測度空間 $(\Omega_n, \mathscr{A}_n, \nu_n)$ から T への可測写像とする．T 上の f_n の分布を μ_n（つまり，$\mu_n=\nu_n\circ f_n^{-1}$）とする．可測写像からなる点列 $(f_n)_n$ が可測写像 f に**分布収束する** (converge in distribution) とは，μ_n が f の分布 μ に弱収束することである．

（2）　各 $n=1,2,\cdots$ に対し f_n は測度空間 $(\Omega_n, \mathscr{A}_n, \nu_n)$ から R への関数とする．関数列 $(f_n)_n$ が条件

$$\lim_{t\to\infty}\left(\sup\int_{|f_n|>t}|f_n|d\nu_n\right)=0$$

を満足するとき，$(f_n)_n$ は**一様可積分** (uniformly integrable) であると言われる．

（3）　関数列 $(f_n)_n$ が一様可積分であるための必要十分条件は

（i）　$\sup_n\int|f_n|d\nu_n<\infty$；

（ii）　$\nu_n(C_n)\to 0$ なる任意の集合列 $(C_n)_n$ に対し $\lim_n\int_{C_n}|f_n|d\nu_n=0$ となる；

によって与えられる．

（4）　可測関数列 $(f_n)_n$ が一様可積分ならば f_n の分布からなる点列 $(\mu_n)_n$ は tight である．

（5）〔一般化された Lebesgue の定理〕 可測関数列 $(f_n)_n$ は可測関数 f に分布収束するものとする．このとき，$(f_n)_n$ が一様可積分であれば，f は可積分でありかつ条件

$$\lim_n\int f_n d\nu_n=\int f d\nu$$

を満足する．さらに，f_n $(n=1,2,\cdots)$ および f が可積分かつ非負値関数であれば，上の条件は逆に関数列 $(f_n)_n$ が一様可積分であることを意味する．

文献に関する歴史的ノート

一般均衡モデルの厳密な定式化を最初に行ったのは Leon Walras の *Eléments d'Economie Politique Pure* (1874) である．彼は均衡を単純に

"equilibre" とよんだ．標準的文献（例えば，Debreu (1959, 1982), McKenzie (1959, 1981), Nikaikdo (1969), Arrow and Hahn (1971)）では，競争均衡 (a competitive equilibrium) とよばれる．しかし，Hildenbrand (1974, p. 145) も指摘するように，（競争）均衡の定義自身には何にも"競争的"な側面は無い．本論においては Hildenbrand (1968, 1974) の呼称にならい，「競争均衡」よりもむしろ「ワルラス均衡」とよぶことにした．

完全競争概念の歴史的経緯については Stigler (1957) が詳しい．本論における完全競争の意味は Stigler の言う「市場競争 (market competition)」に近い．

コア概念に関し最近ではこれが Turgot の *Valeur et Monnaies* (1769) までさかのぼると指摘されている（例えば，Desai (1984) と Vind (1984)）．確かに Edgeworth 流の競争概念の萌芽を Turgot に見ることができるが，現在我々が理解している形におけるコア概念を初めて明確に与えたのは Edgeworth (1881) だと言わねばならない．ただし，「コア(core)」という言葉が最初に用いられたのはゲーム論においてであって，Gillies と Shapley が 1953 年にこの言葉を導入した (Gillies (1953))．Edgeworth の貢献は，その後 Hicks (1930) 等によっても注目されていたが，Edgeworth の導入した概念とゲーム論におけるコア概念が一致することを最初に指摘したのは Shubik (1959) である．

コアとワルラス配分の集合に関する最も基本的な同値定理を最初に証明したのは Aumann (1964) である．Aumann 以前に Scarf (1962) や Debreu (1963) は経済構成員の可算集合を考え，1 つの同値定理を得ているが，彼らのモデルにおける配分の定義は十分説得的ではない．この問題は，経済構成員の母集団としての測度空間における，測度の σ 加法性と有限加法性の問題に帰着する．Scarf と Debreu が試みた同値定理はその後 Weiss (1981) により，有限加法測度空間を経済構成員の母集団として持

つ経済におけるコアとワルラス配分の同値定理として満足な定式化を得た.

定理 19.1 は Aumann の定理に Hildenbrand (1968, 1970b) の貢献を加味したものである.

弱コアの概念は Hildenbrand (1974, Problem 1, p. 140) によるが, 定理 18.2 の弱コアと弱ワルラス配分の同値定理を初等的財空間において最初に示したのは Khan and Yamazaki (1981) である. 例 18.1 もこの文献による. 本文で指摘したように, 非分割財が存在すればコアが十分にワルラス配分の集合に“収縮”しないことは, すでに Edgeworth によって言われており, さらに Hicks (1930), Stigler (1957) らも Edgeworth のこの指摘に注意していた. しかし, Shubik (1959) 以後の文献がこの点に余り注意を払わなかったのは意外である.

既約性の概念は Gale (1955) と McKenzie (1959) によって一般均衡分析に導入された. Arrow and Hahn (1971) も既約性に近い resource relatedness の概念を用いているが, この概念は McKenzie (1981) の指摘のように McKenzie の既約性よりも強い条件となっている. 本論における既約性の定義は, McKenzie の既約性概念を Hildenbrand (1970b) が測度論モデルに適用した形を採用している.

初等的財空間を一般均衡分析に用いたのは Mas-Colell (1977) と Khan-Yamazaki (1981) である. 定理 20.1 においては, これらの文献における消費集合をさらに一般化した形になっている.

定理 21.1 の形の同値定理は Yamazaki (1978b) による.

命題 22.1 は Grodal (1972) による. 第 23 節はすべて Hildenbrand (1974, pp. 135–140) によっている.

第7章　均衡の決定性

前章においてワルラス均衡とコアという2種類の均衡概念の相互関係について分析を行った．本章ではこれらの均衡概念の決定性の問題，すなわち，ワルラス均衡やコアに属する解は存在するのかという「存在問題」を議論することにしたい．

一般均衡理論に関する文献において，存在問題にかかわる「古典的」基調はつぎの通りであった．すなわち，完全分割可能財のみからなる世界を考えれば，ワルラス均衡の存在は，個人の需要対応の(上半)連続性から導かれる総需要対応の(上半)連続性と(一般化された)ワルラス法則によって本質的に保証される．さらに第18節の分析が示すように，このような世界ではワルラス配分の集合とコアが一致するから，コア配分の存在問題も結局ワルラス均衡の決定性に帰着する．

以上のような「古典的」分析のアウトラインは，本論における分析のフレームワークにとって適切ではない．その理由を簡単に述べれば，つぎの点に集約されよう．まず，第1に，財空間Ωの非凸性は各経済構成員の個人需要対応の(上半)連続性を崩すから，個々の需要対応が持つ(上半)連続性の積み上げによって，市場における総需要の(上半)連続性を導くことはできない．第2に，例18.1が示しているように，ワルラス配分の集合とコアの同値関係が必ずしも成立しなくなるから，コアの決定性の問題をワルラス均衡の決定性の問題に完全に帰着させることはできない．

以上のような困難が存在するにもかかわらず，ワルラス均衡とコアの決定性の問題をつぎのように解決することが可能である．

まずワルラス均衡の決定性については，第4，5両章の分析が解決の糸口を与えている．そこでは，所与の経済において選好・初期保有量分布が

ある適当な意味において十分拡散的であれば，経済全体の総需要に対し集計による連続化効果・スムージング効果が期待できるということであった．本章において我々が提示する基本的結論は，経済における初期保有量分布の拡散性が生み出す集計の効果が，ワルラス均衡の決定性の問題を解決するということである．

コアの決定性の問題は，ワルラス均衡の決定性が解決されるよりもさらに一般的な範囲で解決されうる．既に第20節において示したように，弱正ワルラス配分はコア配分である．そこで本章におけるコアの決定性に関する解決は，弱正ワルラス配分の存在を示すことによって与えられる．ワルラス均衡が存在しない場合にも弱正ワルラス均衡は存在しうる点に注意を換起しておきたい．

本章は4節から成り立っているが，最初の2節（第24, 25節）において，ワルラス均衡の存在および弱弱ワルラス均衡，弱ワルラス均衡の存在を示す．この後者の存在定理は，続く第26, 27節において頻繁に利用される．第26節はコアの決定性を扱う．弱コアおよびコアの存在定理を弱ワルラス配分，弱正ワルラス配分等と関連づけて分析を行う．最後の第27節においては，有限経済における近似ワルラス均衡の存在問題を議論することにしたい．

24. ワルラス均衡の決定性 I

本節と次節の目的は，一般に財の完全分割可能性を前提としないような経済におけるワルラス均衡の存在問題を分析することである．

非分割財が取引の対象となるような経済において，ワルラス均衡が必ずしも存在しないことは例18.1が示している．その理由は，非分割財の存在が各経済構成員の需要対応を不連続——第1種の不連続性——にしているからである．ところが第2編における分析，特に第13節における定理1,

が明らかにしたように，たとえ各経済構成員の個人需要対応が上半連続性を持たないとしても，経済全体における富分布が拡散性を持つならば，総需要対応はその(上半)連続性を回復することが可能なのである．前章第21節においてコアとワルラス配分の集合の同値定理を得るときにも，このような状況を我々は要請した．そこでは初期保有量分布の拡散性をもって富分布の拡散効果を生成したのである．

したがって，本節と次節における我々の戦略も第21節のそれと本質的に同一である．基本的には初期保有量分布の拡散性による集計の連続化効果によって，経済の総需要対応を上半連続ならしめ，ワルラス均衡の存在が保証されるような経済環境を作り出すのである．本節では特にこの点が強調されるよう多少の一般性を犠牲にしたワルラス均衡の存在定理を提示することにしたい．経済学的観点から十分納得の行くような一般性を持った存在定理の証明は次節に譲ることとした．

それにもかかわらず，本節において証明される存在定理は，文献に見られる基本的な存在定理，Aumann (1966), Schmeidler (1969), Hildenbrand (1970a) (1974, Theorem 2, p. 151)，をより一般的な財空間を許容するよう拡張した形になっている．これらの文献との詳しい比較は，章末の文献に関する歴史的ノートの欄で行うことにしたい．

任意の $\mathscr{P}$ の部分集合 $\mathscr{P}', X\in\mathscr{X}$ に対し，$\mathscr{P}'|_X$ は $\mathscr{P}'$ の部分集合 $\{(X', \succ')\in\mathscr{P}'|X'=X\}$ を表すものとする．

定理 1〔ワルラス均衡の存在 I〕 $\mathscr{D}_\Omega\neq\phi$, $X\subset R^l_+, X\in\mathscr{X}$ とする．経済 $\mathscr{E}: (A, \mathscr{A}, \nu)\to\mathscr{P}_{ins}|_X\times X$ が与えられたとき，$\mathscr{E}$ の初期保有量分布 μ_e が拡散的であれば $\mathscr{E}$ のワルラス均衡 (p, f) が存在する．

証明 つぎの2条件

(i) $f(a)\in D(X_a, \succ_a, p\cdot e(a), p)$, a. e. $a\in A$;

(ii)　$\int_A f d\nu \leqq \int_A e d\nu$;

を満たす価格ベクトル $p \neq 0 \in R^l_+$ と可積分写像 $f: A \to \Omega$ の存在を示したい.

まず，価格空間を

$$PS := \{p \in R^l_+ |\ p^1 + \cdots + p^l = 1\}$$

と定義する．以下の証明において我々はつぎの形の Kakutani の不動点定理（数学注 2.5）を用いる．（この形の不動点定理については Debreu (1959, 5.6 (1), p. 82) もしくは Nikaido (1969, Theorem 16.6, p. 265) を参照せよ）：

〔**不動点定理**〕 K を R^l の非空なコンパクト集合とし，P を PS の任意の閉集合とする．Z は P から K への上半連続な対応で，各 $p \in P$ に対し，集合 $Z(p)$ は凸，かつ $Z(p) \subset H_{\leqq}(p, 0)$ であるとする．このとき，$P^\circ := \{x \in R^l | (\forall p \in P) p \cdot x \leqq 0\}$ とすれば，$Z(p^*) \cap P^\circ \neq \phi$ を満足するベクトル $p^* \in P$ が存在する．

以下，記号を簡略化し $B(X_a, p \cdot e(a), p)$，$D(X_a, >_a, p \cdot e(a), p)$ の代わりに，それぞれ $B(a, p)$，$D(a, p)$ と書く．

PS に属するすべての価格ベクトル p に対し，集合 $B(a, p)$ は必ずしも有界ではない．そのような場合 $D(a, p)$ は空集合になる可能性がある．そこで消費集合 X を切断し，各正の整数 k について，切断された (truncated) 消費集合 X_k を考える．切断の方法をつぎに明示しよう．

まず，実数 b を

$$b := \int_A e^1(a) d\nu + \cdots + \int_A e^l(a) d\nu$$

によって定義する．ここで，$e(a) = (e^1(a), \cdots, e^l(a)) = \mathrm{pr}_2 \circ \mathscr{E}(a)$ である．$b > 0$ となることに注意しよう．なぜならば，すべての $a \in A$ について $e(a)$

$\in X\subset R^l_+$ だから，$b\geqq 0$ であり，もし $b=0$ だとすれば $e(a)=0$, a. e. $a\in A$, となり，初期保有量分布 μ_e の拡散性に反するからである．$k=1, 2, \cdots$ に対し A の部分集合 A_k を

$$A_k := \{a\in A|\ e(a)\leqq k(b, \cdots, b)\}$$

によって定めれば，写像 e: $A\to\Omega$ の可測性により $A_k\in\mathscr{A}$ を得る．しかも，すべての k に対し $\nu(A_k)>0$ となる．もしある k に関し $\nu(A_k)=0$ になったとすれば，ある j について

$$\int_A e^j(a)d\nu \leqq \int_A e^1(a)d\nu+\cdots+\int_A e^l(a)d\nu$$
$$= \int_A bd\nu \leqq k\int_A bd\nu < \int_A e^j(a)d\nu$$

が成立し，矛盾が生じるからである．つぎに，$\mathscr{A}$ の部分 σ 集合代数 $\mathscr{A}_k$ を，

$$\mathscr{A}_k := \{C\cap A_k|\ C\in\mathscr{A}\}\subset\mathscr{A}$$

によって定義し，$\mathscr{A}_k$ 上の確率測度 ν_k を

$$\nu_k(S) := \frac{1}{\nu(A_k)}\nu(S),\quad S\in\mathscr{A}_k,$$

によって定めれば，各 $k=1, 2, \cdots$ について，確率測度空間 $(A_k, \mathscr{A}_k, \nu_k)$ はアトムレスとなる．

そこで，各 $k=1, 2, \cdots$ について

$$X_k := \{x\in X|\ x\ \leqq k(b, \cdots, b)\};$$
$$B_k(a, p) := B(a, p)\cap X_k;$$
$$D_k(a, p) := \{x\in B_k(a, p)|\ B_k(a, p)\cap \succ_a(x)=\phi\};$$
$$Z_k(p) := \int_{A_k}\{D_k(a, p)-e_k(a)\}d\nu_k;$$

と定義する．e_k: $A_k\to\Omega$ は写像 e. $A\to\Omega$ の A_k への制約である．

各 k に対し，対応 Z_k: $PS\to R^l$ は以下の諸条件を満足することをつぎ

に示そう.

(i) $(\forall p \in PS)$ $Z_k(p) \neq \phi$.

(ii) $(\forall p \in PS)$ $Z_k(p)$ は凸集合.

(iii) $(\forall p \in PS)$ $Z_k(p) \subset H_{\leqq}(p, 0)$.

(iv) $(\forall p \in PS)$ $Z_k(p) \subset K$ を満足する R^l のコンパクト部分集合 K が存在する.

(v) $Z_k: PS \rightarrow R^l$ は上半連続である.

任意の $a \in A_k$ に関し, $e_k(a) \in B_k(a, p)$ がすべての $p \in PS$ について成り立つから, 切断された消費集合 X_k における予算集合 $B_k(a, p)$ は常に非空である. ところが集合 $B_k(a, p)$ は価格ベクトル $p \in PS$ いかんにかかわらずコンパクトであるから, 普遍選好集合 $\mathscr{P}$ の定義より $D_k(a, p) \neq \phi$ がすべての $a \in A_k$, すべての $p \in PS$ について成立する. 写像 $a \mapsto (X_a, >_a, p \cdot e(a), p)$ は経済 $\mathscr{E}$ の可測性により可測であり, 需要関係 $(X, >, w, p) \mapsto D(X, >, w, p)$ は命題 7.2 により可測であるから, 任意の $p \in PS$ について, 対応 $D_k(\cdot, p): A_k \rightarrow \Omega$ は可測である. さらに $(\forall a \in A_k)$ $D_k(a, p) \subset X_k$ だから, 対応 $D_k(\cdot, p): A_k \rightarrow \Omega$ は一様に有界である. よって, 可測選択の定理 (数学注 8.4) を用いて $(\forall p \in PS) Z_k(p) \neq \phi$ が導かれる.

測度空間 $(A_k, \mathscr{A}_k, \nu_k)$ はアトムレスであるから, 各 p に関し集合 $Z_k(p)$ が凸集合となるのは Liapounov の定理の 1 つの帰結である (数学注 8.6 の (1) 参照).

(iii) の性質は一般化されたワルラス法則である. $z \in Z_k(p)$ とすれば,

$$z = \int_{A_k} (g - e_k) d\nu_k ;$$

$$g(a) \in D_k(a, p), \quad \text{a. e. } a \in A_k ;$$

を満足する可積分写像 $g: A_k \rightarrow \Omega$ が存在する. この第 2 番目の条件は

$$g(a) \in H_{\leqq}(p, p \cdot e_k(a)), \quad \text{a. e. } a \in A_k,$$

を意味するから，これと第1の条件より $z \in H_{\leqq}(p, 0)$ が従う．

(iv) の性質は $\int_{A_k} e_k d\nu_k = \frac{1}{\nu(A_k)} \int_{A_k} e d\nu \leqq \frac{1}{\nu(A_k)} \int_A e d\nu < \infty$，および $(\forall a \in A_k)(\forall p \in PS) D_k(a, p) \subset X_k$ から導かれる．

(v) を証明するために A_k の部分集合

$$A_{p,k} := \{a \in A_k \mid e_k(a) \in C_p(X_k)\}$$

を定義する．経済 $\mathscr{E}$ の初期保有量分布 μ_e は拡散性を持つから，定理 5.1 より $\nu_k(A_{p,k}) = (1/\nu(A_k))\nu(A_{p,k}) = 0$ となる．ゆえに，定理 7.4 から，A_k のほとんどいたるところ，対応 $D_k(a, \cdot) : PS \to \Omega$ は任意の $p \in PS$ において上半連続となる．下記の数学注1および補題1からこの事は対応 Z_k: $PS \to R^l$ が上半連続となることを意味する．

対応 $Z_k : PS \to R^l$ に関する上記の諸性質が証明されたから，我々はここで各 $Z_k, k=1, 2, \cdots$ に対し，上記の不動点定理を適用する．そうすると，各 $k=1, 2, \cdots$ について条件

(1) $f_k(a) \in D_k(a, p_k)$, a. e. $a \in A_k$;

$$\int_{A_k} f_k d\nu_k \leqq \int_{A_k} e_k d\nu_k;$$

を満足する価格ベクトル $p_k \in PS$ と可積分写像 $f_k : A_k \to \Omega$ が存在する．

そこで，関数列 $f_k : A_k \to \Omega$ $(k=1, 2, \cdots)$ を用いて新しい関数列 $g_k : A \to \Omega$ $(k=1, 2, \cdots)$ を定義しよう．

$$\begin{aligned} g_k(a) &:= f_k(a), \quad a \in A_k \\ &:= e(a), \quad a \in A \backslash A_k \end{aligned}$$

と置くと，$g_k : A \to \Omega$ は可測であり，さらに条件 (1) より，各 $k=1, 2, \cdots$ に対し

(2) $g_k(a) \in D_k(a, p_k)$, a. e. $a \in A_k$;

$$\int_A g_k d\nu \leqq \int_A e d\nu;$$

が成立する．一般性を失うことなく（必要ならば収束部分列を取ればよい）$p_k \to p \in PS$ と仮定する．A のほとんどいたるところ $g_k(a) \in X$ だから，点列

$$\left(\int_A g_k d\nu\right)_{k=1,2,\cdots}$$

は下から有界である．したがって（2）より，この点列は有界である．そこで我々は多次元 Fatou の補題（下記数学注 2 参照）を適用する．そうすると以下の条件

（3）　$f(a) \in \mathrm{Ls}\,(g_k(a))$,　a.e. $a \in A$;

$$\int_A f d\nu \leqq \int_A e d\nu\,;$$

を満たすような可積分写像 $f: A \to \Omega$ が存在する．

さて，関数 $k^*: A \to \{1, 2, \cdots\}$ が条件

（4）　a.e. $a \in A$,　$k > k^*(a) \Rightarrow g_k(a) \in D_k(a, p_k)$

を満足するように k^* を定めることができる．実際，$k^*(a)$ を $\|e(a)\|/b$ よりも大きいある任意の正の整数としよう．すると，

$$0 \leqq e^j(a) \leqq \|e(a)\| \leqq k^*(a)b$$

が各 $j=1, \cdots, l$ について成立し，その結果，$k > k^*(a)$ ならば $a \in A_k$ となる．この事実と（2）は（4）を意味する．

定理の証明を完了するためには

（5）　a.e. $a \in A$,　$f(a) \in D(a, p)$

を示さなければならない．

条件（3）と（4）から

$$f(a) \in B(a, p),\ \text{a.e. } a \in A$$

が成り立つ．そこで，A の部分集合

$$A_p := \{a \in A |\ e(a) \in C_p(X)\}$$

を定義する．そうすると，

（６） a. e. $a\in A\backslash A_p$, $x\in B(a, p) \Rightarrow x \not\succ_a f(a)$

であることを示そう．

$x\in X$ かつ $p\cdot x<p\cdot e(a)$ であれば，十分大きな k に関し $p_k\cdot x<p_k\cdot e(a)$ となるから，条件（4）および選好関係（X_a, $>_a$）の連続性より，$x\not\succ_a f(a)$ が A のほとんどいたるところで成立しなければならない．

つぎに，$x\in X$ かつ $p\cdot x=p\cdot e(a)$ としよう．$a\notin A_p$ ならば，各 n に対し $x_n\in X, p\cdot x_n<p\cdot x$ となる点列 $x_n\to x$ が存在する．ところが上の議論により

$$(\forall n)x_n \not\succ_a f(a)$$

が $A\backslash A_p$ のほとんどいたるところで成立するから，再び（X_a, $>_a$）の連続性により $x\not\succ_a f(a)$ が $A\backslash A_p$ のほとんどいたるところで成り立つ．これで（6）が証明された．

経済 $\mathscr{E}$ の初期保有量分布 μ_e は拡散性を持つから，富空間における臨界集合の基本定理（定理 5.1）より，集合 A_p は ν 零集合となる．ゆえに，(6) は (5) を意味する．

これで (p, f) が経済 $\mathscr{E}$ のワルラス均衡となることが証明された．■

数学注 1〔上半連続性と閉対応〕（１） S, T を距離空間とし，φ を S から T への関係とする．$x\in S$ において，$\varphi\subset S\times T$ の中の任意の収束点列 $(x_n, y_n)\to(x, y)$ が $(x, y)\in\varphi$ を満足するならば，φ は x において閉じているという．φ が任意の $x\in \mathrm{dom}\,\varphi$ において閉じているならば，φ を**閉関係** (a closed relation) とよぶ．

（２） φ と ψ を距離空間 S から距離空間 T への２つの対応とし，$x_0\in S$ において

$$\varphi(x_0)\cap\psi(x_0)\neq\phi$$

が成立しているものとする.

このとき, 対応 φ は x_0 において閉じており, 対応 ψ は x_0 において上半連続でかつ集合 $\psi(x_0)$ がコンパクトならば,

$$x \mapsto \varphi(x) \cap \psi(x)$$

によって定まる関係 $\varphi \cap \psi$ は, x_0 において上半連続である. (Hildenbrand (1974, Proposition 2. (b), pp. 23-24) 参照.)

(3) 上記 (2) における状況を経済構成員個人の消費行動との関連で考えれば, ψ は予算集合関係, φ は需要対応と見ることもできる. このとき (2) の結論のインプリケーションは, 予算集合がコンパクトである場合, 需要対応が上半連続であることと閉対応であることとが同値になるということである.

数学注 2〔Fatou の補題, Lebesgue の収束定理〕 与えられた関数列の値域が実数の場合の Fatou の補題は, 測度論の標準的教科書に採り上げられている. 通常の Lebesgue の収束定理 (数学注 23.3 (5) と対比せよ) は, この Fatou の補題から容易に導かれる. しかし,「一次元」Fatou の補題を多次元空間に拡張することは単純ではなく, 数学的に highly non-trivial であり深い議論を必要とする. (1)〔Fatou の補題〕 $(f_n)_n$ を測度空間 (Ω, Σ, μ) の上で定義された可積分な実数値関数列とする. ある可積分関数 g に対し $g \leqq f_n$ $(n=1, 2, \cdots)$ であれば,

$$\int_\Omega \lim_n \inf f_n d\mu \leqq \lim_n \inf \int_\Omega f_n d\mu$$

が成立する.

(2)〔Lebesgue の収束定理〕 $(f_n)_n$ を測度空間 (Ω, Σ, μ) の上で定義された可積分な実数値関数列とする. すべての $\omega \in \Omega$ に対して $\lim_n f_n(\omega)$ が存在し, かつ, ある可積分関数 g に対し $|f_n| \leqq g$ $(n=1, 2, \cdots)$ が成り立つならば, $\lim_n f_n$ は可積分であり,

$$\int_{\Omega} \lim_n f_n d\mu = \lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu$$

が成立する.

（3）〔多次元 Fatou の補題〕(Schmeidler (1970) および Hildenbrand and Mertens (1971), あるいは Hildenbrand (1974, Lemma 3, pp. 69-73) 参照.) $(f_n)_n$ を測度空間 (Ω, Σ, μ) から $T \subset R^m_+$ への可積分関数の列, T は閉集合とする. このとき, $\lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu$ が存在すれば, つぎの条件

(i) $f(\omega) \in \mathrm{Ls}(f_n(\omega))$, a. e. $\omega \in \Omega$;

(ii) $\int_{\Omega} f d\mu \leqq \lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu$;

を満足する可積分関数 $f: \Omega \to T$ が存在する.

上記の可積分関数列が一様可積分であり, 加えて, Ω のほとんどいたるところ集合 $\{f_n(\omega) \mid n=1, 2, \cdots\}$ が有界であるならば,

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu$$

を満たすような, 対応 $\mathrm{Ls}(f_n): \Omega \to T$ からの可積分選択 $f: \Omega \to T$ が存在する.

もし, 上記 (i), (ii) の条件を満足する任意の可測関数 $f: \Omega \to T$ に対し常に

$$\int_{\Omega} f d\mu = \lim_n \int_{\Omega} f_n d\mu$$

が成立するならば, 関数列 $(f_n)_n$ は一様可積分である.

上記定理1の証明において使用された補題を以下で証明しよう.

補題 1 S は距離空間, T は R^m の閉集合, (Ω, Σ, μ) はある測度空間とし, 各 $p \in S$ について $\varphi_p: \Omega \to T$ は可積分有界な可測対応とする. も

し各点 $p \in S$ において対応 $p \mapsto \varphi_p(\omega)$ が Ω のほとんどいたるところで閉じているならば，対応

$$p \mapsto \int_\Omega \varphi_p d\mu$$

は閉対応となる．

証明　$(p_n, z_n)_n$ を $S \times R^m$ における収束点列 $(p_n, z_n) \to (p, z)$ とし，各 n について

$$z_n \in \int_\Omega \varphi_{p_n} d\mu$$

であるとする．このとき

$$z \in \int_\Omega \varphi_p d\mu$$

が成立することを示したい．

各 n について可積分関数 $f_n : \Omega \to T$ で条件

$$f_n(\omega) \in \varphi_{p_n}(\omega), \text{ a. e. } \omega \in \Omega;$$

$$z_n = \int_\Omega f_n d\mu;$$

を満足するものが存在する．仮定により

$$(1) \quad \int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega)) d\mu \subset \int_\Omega \varphi_p d\mu$$

が成立しているから，もし

$$(2) \quad \mathrm{Ls}\left(\int_\Omega f_n d\mu\right) \subset \int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega)) d\mu$$

であるならば，(1) と (2) から

$$z \in \int_\Omega \varphi_p d\mu$$

となる．ゆえに．補題 1 はつぎの補題から従う．■

補題 2　(Ω, Σ, μ) は測度空間，T は R^m の閉集合とする．$(f_n)_n$ を Ω

から T への可積分関数の列で可積分有界（つまり，$(\forall\omega\in\Omega)(\forall n)|f_n^j(\omega)|\leqq g^j(\omega)$, $(j=1,\cdots,m)$，となる可積分関数 g が存在する）とする．このとき，

$$\mathrm{Ls}\left(\int_\Omega f_n d\mu\right)\subset\int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega))d\mu$$

が成立する．

注 1　上の補題において関数列 $(f_n)_n$ は一様可積分となるから，多次元 Fatou の補題（数学注 2）により条件

(i)　$f(\omega)\in\mathrm{Ls}(f_n(\omega))$, a. e. $\omega\in\Omega$;

(ii)　$\int_\Omega fd\mu=\lim_n\int_\Omega f_n d\mu$;

を満足する可積分関数 $f:\Omega\to T$ が存在する．

今，$x\in\mathrm{Ls}\left(\int_\Omega f_n d\mu\right)$とすると，一般性を失うことなく $x=\lim_n\int_\Omega f_n d\mu$ としてよい（必要ならば部分列を取る）．したがって，(i) と (ii) より

$$x=\int_\Omega fd\mu\in\int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega))d\mu$$

が成立する．

換言すれば，補題 2 は多次元 Fatou の補題の直接的帰結である．しかし，ここでのポイントは，多次元 Fatou の補題は数学的に相当深い議論を必要とするのに対し，補題 2 は初等的な議論によって証明されうるという点である．（特に，ヘブライ大学における Aumann 一派の数理経済学者はこの点について敏感である．）

補題 2 の証明　測度空間 (Ω,Σ,μ) が一般にアトムからなる部分とアトムレスな部分とに分割できる場合，アトムのみを含む部分は高々可算個のアトムから成立している．個々のアトムの上で補題 2 の主張は trivial に成り立つから，アトムのみを含む部分に関する限り，主張は自明である．

そこで，測度空間 (Ω, Σ, μ) がアトムレスであると仮定して補題2の主張を証明することにしたい．

証明は関数の値域の次元 m に関する帰納法によって行う．$m=0$ の場合は何も証明を要さない．そこで$(m-1)$次元まで上記の主張が正しいと仮定し，これが m の場合にも成立することを証明したい．

$x \in \mathrm{Ls}\left(\int_\Omega f_n d\mu\right)$とし，一般性を失うことなく

$$x = \lim_n \int_\Omega f_n d\mu$$

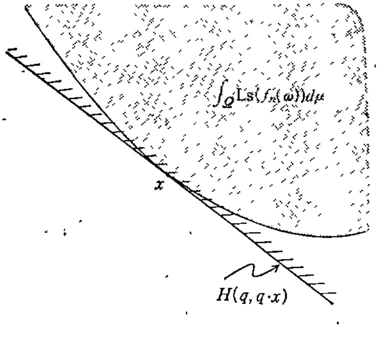
であると仮定する．仮に主張が成立しなかったとしよう．つまり，

$$x \notin \int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega))d\mu$$

と仮定しよう．(Ω, Σ, μ) はアトムレスだから集合$\int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega))d\mu$ は凸集合である（数学注 8.6 の (1)）．したがって凸集合の分離定理により，あるベクトル $q=(q^1, \cdots, q^{m-1}, q^m)$ に対し

$$(1)\quad \int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega))d\mu \subset H_{\leqq}(q, q\cdot x)$$

が成立する（第1図）．可測関数 $m:\Omega\to R$ を



第 1 図

$$\omega \mapsto \lim_n \inf q \cdot f_n(\omega)$$

によって定義する．集合 $\mathrm{Ls}(f_n(\omega)) \subset T$ は閉集合であり，$(f_n)_n$ の可積分有界性により Ω のほとんどにいたるところで有界である．よって，$m(\omega) = q \cdot g(\omega)$ となる $g(\omega) \in \mathrm{Ls}(f_n(\omega))$ が Ω のほとんどいたるところ存在する．このような $g: \Omega \to T$ は可測になる保証がないから，各 $\omega \in \Omega$ について

$$K(\omega) := \mathrm{Ls}(f_n(\omega)) \cap H(q, m(\omega))$$

を定義する．$K(\omega)$ は a.e. $\omega \in \Omega$ に対し非空かつコンパクトであり，Ω から T への関係として可測である．したがって，可測選択の定理により

$$g(\omega) \in \mathrm{Ls}(f_n(\omega)), \quad q \cdot g(\omega) = m(\omega), \quad \text{a.e. } \omega \in \Omega$$

を満たす可測関数 $g: \Omega \to T$ が存在する．ここでもちろん

$$\int_\Omega g d\mu \in \int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega)) d\mu$$

である．(1) および g の選び方から

$$q \cdot x \leqq q \cdot \int_\Omega g d\mu = \int_\Omega m d\mu$$

である．ところが，通常の(1 次元) Fatou の補題を用いてつぎのような式の展開ができる．

$$\begin{aligned}
0 &\leqq \lim_n \sup \int_\Omega |q \cdot f_n - m| d\mu \\
&= \lim_n \sup \left[\int_\Omega (q \cdot f_n - m) d\mu + 2 \int_\Omega \max\{0, m - q \cdot f_n\} d\mu \right] \\
&\leqq \lim_n \sup \int_\Omega (q \cdot f_n - m) d\mu + 2 \lim_n \sup \int_\Omega \max\{0, m - q \cdot f_n\} d\mu \\
&\leqq \lim_n \int_\Omega q \cdot f_n d\mu - \int_\Omega m d\mu + 2 \int_\Omega \max\{0, m - \lim_n \inf\ q \cdot f_n\} d\mu
\end{aligned}$$

$$= q\cdot x - \int_{\Omega} m d\mu \leqq 0$$

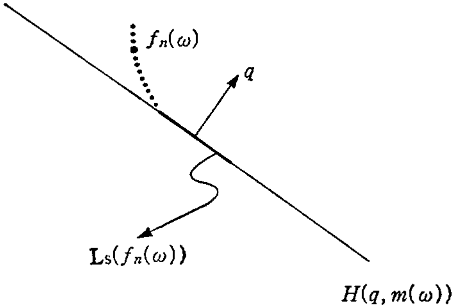
よって，$n\to\infty$ にともない $\int_{\Omega}|q\cdot f_n - m|d\mu \to 0$ となる．このことは m に概収束する $(q\cdot f_n)_n$ の部分列が存在することを意味する．そこで

（2）　$q\cdot f_n(\omega)\to m(\omega)$，a. e. $\omega\in\Omega$,

と仮定してよい．したがって，

$$\mathrm{Ls}(f_n(\omega))\subset H(q, m(\omega)),\ \text{a. e. } \omega\in\Omega,$$

である（第2図）．



第 2 図

そこでつぎに，各 $\omega\in\Omega$ に対し

$$\mathrm{Ls}^*(\omega) := \{(z^1, \cdots, z^{m-1}, 0)\in R^m \mid z=(z^1, \cdots, z^m)\in \mathrm{Ls}(f_n(\omega))\};$$

$$f_n^*(\omega) := f_n(\omega) - (0, \cdots, 0, f_n^m(\omega));$$

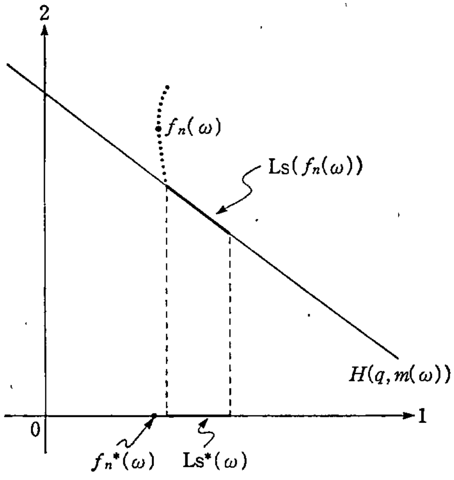
を定義する（第3図）．そうすると，

（3）　$\mathrm{Ls}(f_n^*(\omega))\subset \mathrm{Ls}^*(\omega)$，a. e. $\omega\in\Omega$,

が成立する．これを以下に示そう．

$z_\omega^* = (z_\omega^1, \cdots, z_\omega^{m-1}, 0)\in \mathrm{Ls}(f_n^*(\omega))$ とし，一般性を失うことなく $f_n^*(\omega)\to z_\omega^*$ を仮定しよう．$f_n^m(\omega) = q\cdot f_n(\omega) - q\cdot f_n^*(\omega)$ だから，（2）より

$$f_n^m(\omega)\to m(\omega) - q\cdot z_\omega^*,\ \text{a. e. } \omega\in\Omega,$$



第 3 図

となる．よって

$$f_n(\omega) \to z_\omega{}^* + (0, \cdots, 0, m(\omega) - q \cdot z_\omega{}^*),\ \text{a. e. } \omega \in \Omega,$$

である．ここで，$z_\omega := z_\omega{}^* + (0, \cdots, 0, m(\omega) - q \cdot z_\omega{}^*)$ と置けば，$z_\omega \in \mathrm{Ls}(f_n(\omega))$，a. e. $\omega \in \Omega$，だから，$z_\omega{}^* \in \mathrm{Ls}^*(\omega)$，a. e. $\omega \in \Omega$，が成り立つ．これで (3) が証明された．

各 $\omega \in \Omega$ について，

$$\{f_1{}^*(\omega), f_2{}^*(\omega), \cdots\},\ \ \mathrm{Ls}^*(\omega)\ \subset\ R^{m-1} \times \{0\}$$

となっているから，帰納法の仮定と (3) により

$$\mathrm{Ls}\left(\int_\Omega f_n{}^* d\mu\right) \subset \int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n{}^*(\omega)) d\mu \subset \int_\Omega \mathrm{Ls}^*(\omega) d\mu$$

を得る．したがって，(2) と Lebesgue の収束定理（数学注 2.(2) 参照）を用いて

$$x = \lim_n \int_\Omega f_n d\mu$$

$$=\lim_n\left[\int_\Omega f_n{}^*d\mu+\int_\Omega(0,\cdots,0,f_n^m)d\mu\right]$$

$$=\lim_n\int_\Omega f_n{}^*d\mu+\lim_n\int_\Omega(0,\cdots,0,q\cdot f_n-q\cdot f_n{}^*)d\mu$$

$$=\lim_n\int_\Omega f_n{}^*d\mu+\lim_n\int_\Omega(0,\cdots,0,q\cdot f_n)d\mu-\lim_n\int_\Omega(0,\cdots,0,q\cdot f_n{}^*)d\mu$$

$$=\lim_n\int_\Omega f_n{}^*d\mu+\int_\Omega(0,\cdots,0,\lim_n q\cdot f_n)d\mu-(0,\cdots,0,\lim_n\int_\Omega q\cdot f_n{}^*d\mu)$$

$$=\lim_n\int_\Omega f_n{}^*d\mu+(0,\cdots,0,\int_\Omega md\mu)-(0,\cdots,0,\lim_n\int_\Omega q\cdot f_n{}^*d\mu)$$

を得る．$\lim_n\int_\Omega f_n{}^*d\mu\in\int_\Omega \mathrm{Ls}^*d\mu$ だから，$\mathrm{Ls}^*:\Omega\to T$ からの可測選択 $g^*:\Omega\to T$ で

$$\int_\Omega g^*d\mu=\lim_n\int_\Omega f_n{}^*d\mu$$

となるものが存在する．そこで可測関数 $g:\Omega\to T$ を

$$\omega\mapsto g^*(\omega)+(0,\cdots,0,m(\omega)-q\cdot g^*(\omega))$$

によって定義すれば，

$$(4)\quad \int_\Omega gd\mu\in\int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega))d\mu$$

となることをつぎに示そう．

関数 g^* は対応 Ls^* からの可測選択だから，Ω のほとんどいたるところ

$$z_\omega=(z_\omega^1,\cdots,z_\omega^m)\in \mathrm{Ls}(f_n(\omega)),$$
$$g^*(\omega)=(z_\omega^1,\cdots,z_\omega^{m-1},0)$$

なるベクトル z_ω が存在する．$z_\omega\in\mathrm{Ls}(f_n(\omega))$ であれば z_ω へ収束する $(f_n(\omega))_n$ の部分列が存在するから，そのような部分列の極限を $\lim f_n(\omega)$

と書けば，(2) および $f_n(\omega)=(f_n(\omega), \cdots, f_n^{m-1}(\omega), q\cdot f_n(\omega)-q\cdot f_n^*(\omega))$ であることより

$$\lim f_n(\omega) = g^*(\omega)+(0, \cdots, 0, m(\omega)-q\cdot g^*(\omega)), \quad \text{a. e. } \omega\in\Omega,$$

を得る．ゆえに，

$$g(\omega) \in \mathrm{Ls}\,(f_n(\omega)), \quad \text{a. e. } \omega\in\Omega,$$

である．これで (4) が証明された．

これまでの議論をまとめると

$$\begin{aligned} x &= \lim_n \int_\Omega f_n{}^* d\mu + (0, \cdots, 0, \int_\Omega m d\mu - \lim_n q\cdot \int_\Omega f_n{}^* d\mu) \\ &= \int_\Omega g^* d\mu + (0, \cdots, 0, \int_\Omega m d\mu - q\cdot \int_\Omega g^* d\mu) \\ &= \int_\Omega g d\mu \in \int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega)) d\mu \end{aligned}$$

となり $x \notin \int_\Omega \mathrm{Ls}(f_n(\omega))d\mu$ であったことに反する．■

25. ワルラス均衡の決定性 II

前節の定理 1 の証明は，これまでの文献に見られる基本的定理——Aumann (1966), Schmeidler (1969), Hildenbrand (1970a) ——の証明にいかなる修正を施せば，凸性を仮定しない財空間 Ω を分析の対象とすることができるのか明示している．しかし，既に指摘しておいた通り，この定理の枠組は，経済学的観点からすれば，一般性を犠牲にしている点が幾つかある．まず，この点を以下に説明し，本節における存在定理の動機づけを与えることにしたい．

定理 24.1 において一般性が欠如している点はつぎの 3 点である．第 1 は，最も明白な点で，経済構成員の消費集合が同一であること．第 5 章における総需要のスムージング・連続化効果の議論では，消費集合の多様性

(diversification) が許容されていた．つまり，総需要の上半連続性に関しては，消費集合の多様性は問題を生じさせなかった．では，前節の分析において，消費集合の多様性はいかなる問題を生むのだろうか．この点の理解を助けるために，幾つかの記号を導入しよう．まず，価格ベクトル $p \neq 0 \in R^l_+$ を所与とする．任意の $\delta > 0$ に対し集合

$$QN_p(x, \delta) := HN_p(x, \delta) \cap \{z = (z^1, \cdots, z^l) \in R^l \mid (\forall j)\ z^j \leqq x^j\}$$

を定義し，これを**中心 x 半径 δ の(価格ベクトル p に対する) 4 半開球** (the open quarter ball (with respect to the price vector p) centered at x with radius δ) とよぶ．つぎに，消費集合 $X \in \mathscr{X}$ に対し，集合

$$CQ_p(X) := \{x \in X \mid (\exists \delta > 0)\ QN_p(x, \delta) \cap X = \phi\}$$

$$JQ_p(X) := \{w \in R \mid (\exists x \in CQ_p(X))\ w = p \cdot x\}$$

を定義する．明らかに，

$$C_p(X) \subset CQ_p(X), \quad J_p(X) \subset JQ_p(X)$$

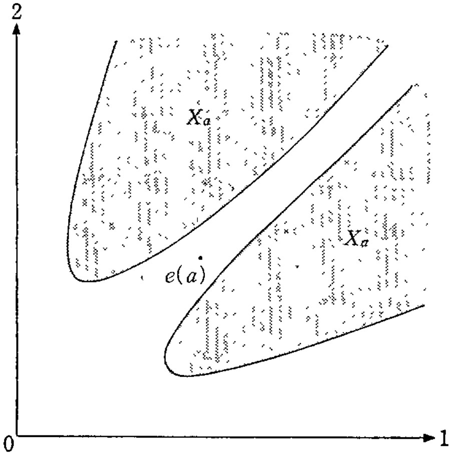
が成立する．$C_p(X)$ や $J_p(X)$ が非常に“小さい”集合であることは，第5節の分析から既知である．ところが，この性質は $CQ_p(X)$ や $JQ_p(X)$ には不幸にも伝わらない．例えば，

$$X = \{x = (x^1, \cdots, x^l) \in R^l_+ \mid x^1 + \cdots + x^l \geqq 1\}$$

とすれば，$p^1 = \cdots = p^l \neq 0$ となる価格ベクトル $p = (p^1, \cdots, p^l)$ を除くすべての $p \in R^l_+$ に対し，$JQ_p(X)$ の Lebesgue 測度は正となる．これは局所チーパー・ポイントを持っている消費ベクトル $x \in X$ が，X の切断によってその局所チーパー・ポイントを失うことと関連しており，前節のような特殊な場合を除いては，切断された消費集合の上で個人の需要対応を考えて行くという前掲の Aumann, Schmeidler, Hildenbrand の論文に見られる方法が，本論のような一般的なフレームワークには適さないことを示している．

第2は，経済 $\mathscr{E}$ の定義が $e(a) \in X_a$ を前提としている点である．この

仮定は文献の上では，**生存条件**（the survival condition）（例えば McKenzie (1981) 参照）とよばれるもので，節 19 節において指摘したように，経済学的視点からは好ましい条件ではない．第 1 図は，生存条件は満足しないが，ワルラス均衡の存在には支障をきたさないような場合を示している．



第 1 図

第 3 は，初期保有量分布の拡散性についてである．この点に関しては既に第 21 節で指摘したように，初期保有量分布の完全分割可能財の方向への拡散性に弱める必要がある．

以上の 3 点に注意した定式化をこれから行うが，第 2 と第 3 の点については第 19, 20 節で示した方法を取る．すなわち，生存条件は経済の既約性の仮定で置き換え，初期保有量分布が拡散性を持つ方向の制約については，これを選好関係の性質の強化——完全分割可能財の優先性——によって補いたい．そして，第 1 の点に対処するために，Hildenbrand (1974, p. 150)

のアイデアに基づき，消費集合の切断の代わりに価格空間の切断を伴う議論展開を行うことにしよう．

本節では前節とは多少異なった角度から，初期保有量の拡散効果に光を当て，続く第26節，27節における分析に役立てたい．そのため，まず，経済構成員の生存条件を要請しない「弱弱ワルラス均衡」の概念を導入し，ワルラス均衡の存在問題を弱弱ワルラス均衡の存在問題と，ワルラス均衡と弱弱ワルラス均衡との関係についての問題に二分して議論することにしよう．

まず任意の $(X, \succ, x, p) \in \mathscr{P} \times \Omega \times R^l_+$ に対し集合

$$D_w^*(X, \succ, x, p) := \begin{cases} D_w(X, \succ, p\cdot x, p), & p\cdot x > \inf\ p\cdot X \text{ の場合} \\ B(X, p\cdot x, p) \cup \{x\}, & p\cdot x = \inf\ p\cdot X \text{ の場合} \\ \{x\} & , p\cdot x < \inf\ p\cdot X \text{ の場合} \end{cases}$$

を定義し，**弱弱需要集合** (weak weak demand set) とよぶ．

定義 1〔弱弱ワルラス均衡〕　経済 $\mathscr{E}: (A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P} \times \Omega$ を所与とする．価格ベクトル $p \neq 0 \in R^l_+$ と可積分写像 $f: A \to \Omega$ が

（1）　$f(a) \in D_w^*(X_a, \succ_a, e(a), p)$,　a. e. $a \in A$;

（2）　$\int_A f d\nu \leqq \int_A e d\nu$;

の2条件を満足するとき，(p, f) を**弱弱ワルラス均衡** (weak weak Walras equilibrium) とよび，f を**弱弱ワルラス配分** (weak weak Walras allocation), p を**弱弱均衡価格ベクトル** (weak weak equilibrium price vector) とよぶ．

経済 $\mathscr{E}$ において各経済構成員の生存条件が満たされるならば，弱弱ワルラス均衡は弱ワルラス均衡に一致する．

定理 1〔弱弱ワルラス均衡の存在〕　任意の経済 $\mathscr{E}: (A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P}$

$\times\Omega$ に対し，その弱弱ワルラス均衡 (p, f) が存在する．

証明　まず記号を簡略化し

$$B(a, p) := B(X_a, p \cdot e(a), p),$$
$$D(a, p) := D(X_a, >_a, p \cdot e(a), p)$$
$$D_w(a, p) := D_w(X_a, >_a, p \cdot e(a), p)$$

と書き，さらに

$$X_a^* := X_a \cup \{e(a)\},$$
$$B^*(a, p) := B(X_a^*, p \cdot e(a), p),$$
$$D_w^*(a, p) := D_w^*(X_a, >_a, e(a), p)$$

を定義する．

任意の $a \in A$, $p \in R^l_{++}$ に対し，$B(a, p)$ はコンパクト集合だから，$B(a, p) \neq \phi$ の場合は普遍選好集合 $\mathscr{P}$ の定義により $D(a, p) \neq \phi$．したがって，$D(a, p) \subset D_w(a, p)$ から常に $D_w^*(a, p) \neq \phi$ となる．

$\bar{p} \in R^l_{++}$ を任意の価格ベクトルとし，U を $\bar{p}$ のコンパクト近傍で R^l_{++} に包含されているものとする．2つの実数を

$$\underline{m} := \min\{p^j |\ p \in U\},$$
$$\bar{m} := \max\{p^j |\ p \in U\},$$

によって定め，各 $a \in A$ に対し

$$m(a) := \max\{\min\ p \cdot X_a |\ p \in U\},$$
$$M(a) := \max\{\bar{m} \textstyle\sum_{j=1}^{l} |e^j(a)|,\ m(a)\}$$

と置く．$X: A \to \mathscr{X}$ および $e: A \to \Omega$ は可測だから，$M: A \to R$ も可測である．そこで可測関数 $h: A \to R$ を

$$a \mapsto (\sqrt{l}/\underline{m}) M(a)$$

によって定義すれば，$\mathscr{X}$ の定義および e の可積分性から，h は可積分となる．そして，

(1)　$(\forall p\in U)(\forall x\in D_w{}^*(a, p))\quad \|x\|\leqq h(a)$

が各 $a\in A$ について成立する.

さて，下記の補題1から，弱弱需要集合関係 $D_w{}^*\subset\mathscr{P}\times\Omega\times R^l\times\Omega$ は $\mathscr{P}\times\Omega\times R^l\times\Omega$ の Borel 集合である．そこで，写像 $g: A\times\Omega\to\mathscr{P}\times\Omega\times R^l\times\Omega$ を

$$(a, x)\mapsto((X_a, >_a), e(a), \bar{p}, x)$$

によって定めれば，g は可測であり，

$$\{(a, x)\in A\times\Omega|\ x\in D_w{}^*(a, \bar{p})\}$$
$$= g^{-1}(D_w{}^*)$$

が成立する．よって，A から Ω への対応 $D_w{}^*(\cdot, \bar{p})$ は可測である．したがって，可測選択の定理および (1) から

$$\int_A D_w{}^*(\cdot, \bar{p})d\nu \neq \phi$$

を得る.

ここで，切断された価格単体を導入する．まず，$PS:=\{p\in R^l_+|\ \sum_{j=1}^l p^j=1\}$ とし，$k\geqq l$ なる各々の正の整数 k について

$$PS_k:=\{p\in PS|\ (\forall j)p^j\geqq 1/k\}$$

を定義する．そして，PS_k から R^l への対応 F_k

$$p\mapsto\int_A \{D_w{}^*(\cdot, p)-e\}d\nu$$

をよって定義する.

各 $a\in A$ について，$D_w{}^*(a, \cdot): R^l_{++}\to\Omega$ は閉対応となることを示そう．$(p_n, x_n)\to(p, x)$, $x_n\in D_w{}^*(a, p_n)$, $(n=1, 2, \cdots)$, とする．$B(a, p)\neq\phi$ の場合は標準的な議論によって $x\in D_w{}^*(a, p)$ が成立する．$B(a, p)=\phi$ の場合，$p\cdot e(a)<\min p\cdot X_a$ だから十分大きなすべての n に対し $D_w{}^*(a, p_n)=\{e(a)\}$ である．ゆえに，このときも $x\in D_w{}^*(a, p)$ となる.

したがって，(1) および数学注 24.1.(2) により，PS_k の上で定義された対応 F_k に関し，定理 24.1 の証明中の (i) から (v) までのすべての性質が成立する．そこで定理 24.1 の証明に用いた形の不動点定理をそれぞれの $F_k(k \geqq l)$ について適用すれば，条件

(2)　$f_k(a) \in D_w{}^*(a, p_k)$，a. e. $a \in A$;

(3)　$(\forall p \in PS_k) \int_A (f_k - e) d\nu \subset H_{\leqq}(p, 0)$

を満足するような価格ベクトル $p_k \in PS_k$ と A から Ω への可積分写像 f_k の組 (p_k, f_k) が各 $k \geqq l$ について存在する．(3) において特に $p=(1/l, \cdots, 1/l)$ と取れば

(4)　$\int_A (f_k^1 + \cdots + f_k^l) d\nu \leqq \int_A (e^1 + \cdots + e^l) d\nu$

を得る．よって，すべての $k \geqq l$ に対し，$\int_A f_k d\nu$ はコンパクト集合

$$\left\{x \in R^l \mid \sum_j x^j \leqq \int_A \sum_j e^j d\nu,\ (\forall j) x^j \geqq \underline{\beta}\right\}$$

(ここで $\underline{\beta}$ は消費集合の普遍集合 $\mathscr{X}$ の定義 1.4 に現れる $\underline{\beta}$ である)

に属する．したがって，一般性を失うことなく $\int_A f_k d\nu \to \bar{z}$ と仮定する．多次元 Fatou の補題 (数学注 24.2) により，ある可積分写像 $f: A \to \Omega$ に対し

(5)　(i)　$f(a) \in \mathrm{Ls}(f_k(a))$，a. e. $a \in A$;

　　(ii)　$\int_A f d\nu \leqq \bar{z}$;

が成立する．ここで (3) は，すべての $p \in \bigcup_k PS_k = R_{++}^l \cap PS$ に関して，$p \cdot \bar{z} \leqq p \cdot \int_A e d\nu$ となることを意味しているから，$\bar{z} \leqq \int_A e d\nu$ でなければならない．よって，(5) (ii) より

(6)　$\int_A f d\nu \leqq \int_A e d\nu$

を得る.

すべての $k \geqq l$ について, p_k は価格単体 PS に属するから (p_k) の収束部分列が存在する. 一般性を失うことなく $p_k \to p \in PS$ とし, 今後この p を固定して考える.

(5) (i) から, まず,

(7)　$f(a) \in B^*(a, p)$,　a. e. $a \in A$,

が成立している.

$B(a, p) = \phi$ ならば十分大きな k に対し $B(a, p_k) = \phi$ となるから $D_w{}^*(a, p_k) = \{e(a)\}$ であり, したがって $f(a) = e(a)$ となる. $B(a, p) \neq \phi$ とする. $p \cdot e(a) = \inf p \cdot X_a$ ならば $D_w{}^*(a, p) = B^*(a, p)$ だから $f(a) \in B^*(a, p)$ は $f(a) \in D_w{}^*(a, p)$ を意味する. $p \cdot e(a) > \inf\ p \cdot X_a$ ならば, 十分大きなすべての k について $p_k \cdot e(a) > \inf p_k \cdot X_a$ となるから, $f_k(a) \in D_w{}^*(a, p_k)$ は $f_k(a) \in D_w(a, p_k)$ を意味する. $z \in X_a, p \cdot z < p \cdot e(a)$ とすると, 十分大きな k に対し, $p_k \cdot z < p_k \cdot e(a)$ となり, したがって, $z \not\succ_a f_k(a)$ が成立する. 選好関係 $(X_a, \succ_a)$ の連続性から $z \not\succ_a f(a)$ を得る. ゆえに,

(8)　$f(a) \in D_w{}^*(a, p)$,　a. e. $a \in A$,

が証明された.

(6) と (8) から (p, f) は弱弱ワルラス均衡である. ■

つぎに, 定理 1 の証明中に必要となった補題を証明する.

補題 1　弱弱需要関係　$D_w{}^* \subset \mathscr{P} \times \Omega \times R^l_+ \times \Omega$ は Borel 集合である.

証明　$\mathscr{P} \times \Omega \times R^l_+ \times \Omega$ の部分集合 $G_i, i = 1, \cdots, 6$, を

$G_1 := \{(X, \succ, x, p, y) \mid\ y \in B(X, p \cdot x, p)$ で, $z \succ y \Rightarrow p \cdot z \geqq p \cdot x\}$,

$G_2 := \{(X, \succ, x, p, y) \mid\ p \cdot x > \inf p \cdot X\}$,

$$G_3 := \{(X, \succ, x, p, y) \mid y \in B(X, p \cdot x, p) \cup \{x\}\},$$

$$G_4 := \{(X, \succ, x, p, y) \mid p \cdot x = \inf p \cdot X\},$$

$$G_5 := \{(X, \succ, x, p, y) \mid x = y\},$$

$$G_6 := \{(X, \succ, x, p, y) \mid p \cdot x < \inf p \cdot X\},$$

によって定義する．G_2, G_6 は開集合，G_3, G_4, G_5 はいずれも閉集合であることを容易に確認できる．G_1 の可測性を示すためには

$$D_w := \{(X, \succ, w, p, x) \in \mathscr{P} \times R \times R_+^l \times \Omega \mid x \in B(X, w(p) \text{ で}, \\ z \succ x \Rightarrow p \cdot z \geqq w\}$$

が可測であることを示せばよい．なぜならば G_1 は可測写像 $(X, \succ, x, p, y) \mapsto (X, \succ, p \cdot x, p, y)$ による D_w の逆像となるからである．D_w は弱需要関係に他ならない．したがって，$D_w \subset \mathscr{P} \times R \times R_+^l \times \Omega$ が Borel 集合であることは，命題 7.2 における需要関係 $D \subset \mathscr{P} \times R \times R_+^l \times \Omega$ が Borel 集合であることの証明を多少変更することで示される．実際，命題 7.2 の証明をつぎのように修正すればよい．$t = (X, \succ, w, p)$ とし，$D_n(t)$ の定義を

$$D_n(t) := \begin{cases} \{x \in B(t) \mid f_n(t) \not\succ x\}, & p \cdot f_n(t) < w \text{ の場合} \\ B(t) & , \ p \cdot f_n(t) \geqq w \text{ の場合} \end{cases}$$

と変更する，そして，主張の証明における集合 F を

$$F := \{(t, x, y) \in T^* \times \Omega \times \Omega \mid x, y \in B(t), x \not\succ y\} \\ \cap \{(t, x, y) \in T^* \times \Omega \times \Omega \mid p \cdot x < w\}$$

と定義し直す．集合 F は閉集合と開集合との交わりであるから Borel 集合である．この F を用い，さらに $D(t)$ をすべて $D_w(t)$ に置き換えれば，命題 7.2 の証明は弱需要関係 D_w が Borel 集合であることを示している．

以上で各 $G_i, i = 1, \cdots, 6$, が Borel 集合であることが分かった．ところが弱弱需要関係 D_w^* は

$$D_w^* = (G_1 \cap G_2) \cup (G_3 \cap G_4) \cup (G_5 \cap G_6)$$

と書けるから，$D_w{}^*$ は $\mathscr{P}\times\Omega\times R_+^l\times\Omega$ の Borel 集合である．■

定理1の系としてつぎの弱ワルラス均衡に関する存在定理を得る．

命題 2〔弱ワルラス均衡の存在〕　所与の経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ において生存条件が満足されるなら，つまり $e(a)\in X_a$, a. e. $a\in A$, であるなら，$\mathscr{E}$ の弱ワルラス均衡 (p,f) が存在する．

さて，定理1によって，本論のフレームワークの中では，弱弱ワルラス均衡の存在が制約条件無しで成立することが明らかとなった．そこでつぎに，いかなる制約条件の下で弱弱ワルラス均衡はワルラス均衡となるのか，これを考えたい．

基本的な条件は2つある．第1は，需要対応の上半連続性が保証されること．第2は，各構成員の生存 (survival) が保証されること．この後者のために我々は経済の既約性と $\int_A ed\nu\in\text{int}\int_A Xd\nu$ を要請する．前者に対しては，初期保有量分布の完全分割可能財の方向への拡散性と選好関係が持つ完全分割可能財の優先性によって対処する．

なお，下記の存在定理には，財の自由可処分性を仮定しない形の命題(III) も含まれているが，この点に関しては本質的な解決を与えていない(下の注2を参照せよ)．

命題 3〔弱弱ワルラス均衡とワルラス均衡〕　$\mathscr{D}_0^0\neq\phi$ とする．また，経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}_{odd}\times\Omega$ は既約性を持ち，かつ $\int_A ed\nu\in\text{int}\int_A Xd\nu$ とする．このとき，$\mathscr{E}$ の初期保有量分布 μ_e が完全分割可能財の方向へ拡散的であれば，$\mathscr{E}$ の任意の弱弱ワルラス均衡 (p,f) はワルラス均衡であり，かつ価格ベクトル $p\in R_+^l$ はすべての $j\in\mathscr{D}_0^0$ に対し $p^j>0$ を満足する．

命題 3 の証明は，つぎの定理 4 の証明の中で与えることにする．

定理 4〔ワルラス均衡の存在II〕 $\mathscr{D}_{\Omega}^{\circ}\neq\phi$ とする．

（I） 経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}_{odd}\times\Omega$ は既約性を持ち，かつ $\int_A ed\nu\in\mathrm{int}\int_A Xd\nu$ とする．このとき，$\mathscr{E}$ の初期保有量分布 μ_e が完全分割可能財の方向へ拡散的であれば，$\mathscr{E}$ のワルラス均衡 (p,f) が存在し，その価格ベクトル $p\in R_+^l$ はすべての $j\in\mathscr{D}_{\Omega}^{\circ}$ に対し $p^j>0$ となる．

（II） 上記（I）において $\mathscr{E}(A)\subset\mathscr{P}_{odd,\,wd}\times\Omega$ ならば，（I）における (p,f) は $p\in R_{++}^l$ を満足する．

（III） 上記（I）において $\mathscr{E}(A)\subset\mathscr{P}_{odd,\,wd,\,lns}\times\Omega$ ならば，$p\in R_{++}^l$ および $\int_A fd\nu=\int_A ed\nu$ を満足するワルラス均衡 (p,f) が存在する．

証明 （I）の条件を満たす経済 $\mathscr{E}$ を所与とする．定理 1 より経済 $\mathscr{E}$ の弱弱ワルラス均衡が存在する．したがって，命題 3 を証明すれば（I）も同時に証明されたことになる．

そこで今 (p,f) を経済 $\mathscr{E}$ の弱弱ワルラス均衡としよう．以下，記号は定理 1 の証明中に導入したものを用いる．集合 $W^*\subset A$ を

$$W^*:=\{a\in A|\ \inf p\cdot X_a<p\cdot e(a)\}$$

によって定義すれば，数学命題 7.3 より $W^*\in\mathscr{A}_\nu$ である．したがって，$\mathscr{A}$- 可測な集合 W で $W\Delta W^*$ が ν 零集合となるものが存在する．条件 $\int_A ed\nu\in\mathrm{int}\int_A Xd\nu$ より $\nu(W)>0$ である．各 $a\in W^*$ について $D_w{}^*(a,p)=D_w(a,p)$ であることに注意すれば，定理 21.2 の証明における議論と全く同様に（定理 21.2 において仮定される選好関係の局所非飽和性は，ここでの議論にかかわりある箇所では使用されないことに注意しよう），

（1） $f(a)\in D(a,p)$, a. e. $a\in W$;

（2） $(\forall j\in\mathscr{D}_{\Omega}^{\circ})p^j>0$;

の成立することが，初期保有量分布 μ_e の完全分割可能財の方向への拡散

性および各選好関係の完全分割可能財の優先性から導かれる.

つぎに, $T:=A\setminus W$ と置くと,

(3)　$\nu(T)=0$

であることを示そう. 仮に $\nu(T)>0$ であったとする. T のほとんどいたるところ $p\cdot e(a)\leqq\inf p\cdot X_a$ だから

$$p\cdot\int_T ed\nu\leqq\int_T\inf\ p\cdot X_a d\nu=\inf\ p\cdot\int_T Xd\nu$$

となる. したがって,

(4)　$p\cdot\int_T(e-X)d\nu\leqq 0$

を得る. 経済 $\mathscr{E}$ は既約性を持つから,

$$z+\int_W fd\nu\in\int_W\{x\in X_a|\ x>_a f(a)\}d\nu$$

を満足するベクトル $z\in\int_T(e-X)d\nu$ が存在する. よって, ある可測関数 $g: W\rightarrow\Omega$ に対し

$$g(a)>_a f(a),\ \text{a. e.}\ a\in W;$$
$$\int_W gd\nu=z+\int_W fd\nu;$$

が成立する. ところが (1) から

$$p\cdot g(a)>p\cdot f(a),\ \text{a. e.}\ a\in W,$$

である. (4) を用いれば

$$p\cdot\int_W fd\nu<p\cdot\int_W gd\nu=p\cdot z+p\cdot\int_W fd\nu\leqq p\cdot\int_W fd\nu$$

を得るが, これは矛盾である.

(1), (2), (3) によって命題3および定理4の (I) が証明された.

(II) を証明するには, 追加的に選好関係の弱デザィアラビリティーを仮定すれば,

（5） $(\forall j)\ p^j > 0$

が成立することを言えばよい．(2) より $j \in \mathscr{D}_{\Omega}^{0}$ ならば $p^j>0$ である．そこで，仮にある $j \notin \mathscr{D}_{\Omega}^{0}$ に対し，$p^j=0$ であったと想定してみよう．選好関係が弱デザイアラビリティーを示すから，各々の $a \in A$ について

$$z^j > f^j(a),\ z^i \leqq f^i(a)\ (i \neq j),\ z >_a f(a)$$

を満たす消費ベクトル $z \in X_a$ が存在する．しかし，$p \cdot z \leqq p \cdot f(a) \leqq p \cdot e(a)$ だから，これは $f(a) \in D(a, p)$, a. e. $a \in A$, に反する．

選好関係はさらに局所非飽和性をも満たすと仮定した上で，最後の (III) の証明に入ろう．

まず，定理 1 の証明における (2), (3), (5) を満足する $(p_k, f_k)_k$ および上記（I）のワルラス均衡 (p, f) を考える．$p_k \to p$, $f(a) \in \mathrm{Ls}(f_k(a))$ a. e. $a \in A$, が成立している．上記 (5) より $(\forall j) p^j > 0$ である．ここで $p \in PS$ の δ 近傍を

$$PR(p, \delta) := \{x = (x^1, \cdots, x^l) \in PS \mid (\forall j)|x^j - p^j| < \delta\}$$

によって定義する．各 $j=1, \cdots, l$ に対し $p^j > 3\delta$ となるような正数 $\delta > 0$ を固定しよう．つぎに，整数 $k_1 > l$ を，$k > k_1 \Rightarrow p_k \in PR(p, \delta)$, となるように定め，さらに整数 $k_2 > k_1$ を，$\delta > 1/k_2$ となるように定める．そうすれば，

$$k > k_2 \Rightarrow PR(p, 2\delta) \subset PS_k$$

が成立する．そこで，

（6） $\displaystyle\int_A f_k d\nu = \int_A e d\nu,\ k > k_2,$

の成立することを示そう．$k > k_2$ とし，

$$z_k = (z_k^1, \cdots, z_k^l) = \int_A (f_k - e) d\nu$$

と置く．$z_k \neq 0$ であったと仮定してみよう．2 種類のケースが考えられる．

ケース 1　ある i, j に対し $z_k^i < z_k^j$, 例えば $z_k^1 < z_k^2$, となる場合．

$p_0 := (p_k^1 - \delta,\ p_k^2 + \delta,\ p_k^3,\ \cdots,\ p_k^l)$ と置く．$p_k \in PR(p, \delta)$ だから $p_0 \in PR(p, 2\delta)$ である．よって，$p_0 \in PS_k$ となる．したがって，(p_k, f_k) の決め方から

（７）　$p_0 \cdot z_k \leqq 0$

となる．しかし，$-\delta z_k^1 + \delta z_k^2 > 0$ だから

（８）　$p_0 \cdot z_k = (p_k^1 - \delta) z_k^1 + (p_k^2 + \delta) z_k^2 + p_k^3 z_k^3 + \cdots + p_k^l z_k^l > p_k \cdot z_k$

が成立する．

ケース 2　$z_k^1 = z_k^2 = \cdots = z_k^l$.

$(\forall j) p_k^j > 0$ だから $z_k \neq 0$ は $(\forall j) z_k^j < 0$ を意味する．したがって，

（９）　$p_k \cdot z_k < 0$

となる．

さて，$f_k(a) \in D_w{}^*(a, p_k)$, a. e. $a \in A$, だから，各選好関係 $(X_a, >_a)$ の局所非飽性の結果

$$p_k \cdot f_k(a) = p_k \cdot e(a), \quad \text{a. e. } a \in A,$$

を得る．これは

(10)　$p_k \cdot z_k = p_k \cdot \int_A (f_k - e) d\nu = 0$

を意味するが，ケース 2 の場合の (9) と矛盾する．ケース 1 の場合は，(8) と (10) から $p_0 \cdot z_k > 0$ となるが，これは (7) に反する．ゆえに，(6) が証明された．

以上の議論から（Ｉ）における配分 f が

$$\int_A f d\nu = \int_A e d\nu$$

を満足するワルラス配分であるとは断定できない．しかしながら実は，すべての $k > k_2$ について (p_k, f_k) は，$p_k \in R_{++}^l$, $\int_A f_k d\nu = \int_A e d\nu$, を満足するワルラス均衡となる．これを以下に示そう．

各 $k>k_2$ に対し

$$W_k{}^* := \{a \in A \mid \inf p_k \cdot X_a < p_k \cdot e(a)\}$$

とし，上の証明において W^* から W と T を定義したのと全く同様に，可測集合 W_k と T_k とを定義する．すべての $k>k_2$ に対し，$p_k \in R^l_{++}$ となるから，初期保有量分布 μ_e の完全分割可能財の方向への拡散性と定理5.1より，

$$p_k \cdot e(a) \notin J_p(X_a),\ \text{a. e. } a \in A,$$

がすべての $k>k_2$ に関して成立する．よって，$k>k_2$ について

(11)　$f_k(a) \in D(a, p_k)$, a. e. $a \in W_k$,

が成り立つ．さらに，上の (3) の証明と同様に

(12)　$\nu(T_k) = 0$, $k>k_2$,

を証明することができる．

(6), (11), (12) は，すべての $k>k_2$ に関し，(p_k, f_k) が $p_k \in R^l_{++}$, $\int_A f_k d\nu = \int_A e d\nu$ を満足するワルラス均衡であることを示している．

以上で定理 4 の証明が完了した．∎

注 1　定理 4 の (III) は，$p \in R^l_{++}$ および $\int_A f d\nu = \int_A e d\nu$ を満たすワルラス均衡 (p, f) の存在を主張している．したがって，我々がワルラス均衡の定義 16.1 に関して注意を与えた財の自由可処分性の問題を，一見解決しているように見える．しかし，これは見せ掛けの解決にしか過ぎないことに注意しておこう．

自由可処分性の問題を解決するには，財が“好まれない財 (bads)”になることを許容し，価格が負の値を取ることによって，財の需要と供給とが一致する事を保証しなければならない．しかし，上の (III) においては事実上すべての財は好まれ，すべての価格が正の値を取る．したがって，経

済学的観点からすれば，すべての財が好まれるがゆえに財を処分することの必要が生じなくなっただけである．

自由可処分性の問題は有限経済のフレームワークにおいては完全な解決が見られている（例えば，McKenzie (1959, 1981) 参照）．しかし，本論におけるような経済構成員の測度空間を有する経済においては，この問題の本質的解決は現在のところ与えられていない．

このような有限経済と“無限”経済の相異はつぎの点に依拠する．有限経済において，各経済構成員に対する配分は，経済全体で利用可能な資源の量によって制約されるため，一様に有界である．ところが，無限経済においては，ある個人への配分は必ずしも経済全体の平均資源量によっては制約を受けない．したがって，各経済構成員への配分を一様に制約するような内在的な制約は存在しない．このため，無限経済における均衡の存在証明では，人為的な切断が消費集合あるいは価格単体に対して施される．切断を受けた経済列における均衡配分の列を考え，それに多次元の Fatou の補題を適用して配分の“収束部分列”を求め，その極限が元の経済の均衡配分となることを証明する．これが既知の一般的手法である．自由可処分性の問題が発生するのは最終段階において Fatou の補題を適用することにある．極限となる配分は一般に需要と供給を等号では結ばないからである．等号が成立するには，切断された経済列における均衡配分列が一様可積分でなければならないが，これは一般には成立しない．以上のように“無限”経済の均衡解存在にかかわる自由可処分性の問題は未解決である．

26. コアの決定性

完全分割可能財のみからなる財空間 Ω を考えた場合，経済 $\mathscr{E}$ のコアとワルラス配分の集合は一般的に一致する（第 19 節参照）．この Aumann の“古典的”定理によって，コアの決定性の問題は純粋にワルラス均衡の

決定性の問題に帰着するものと多くの経済学者に考えられてきた．しかし第6章の分析に見るように，財空間 Ω の凸性が保証されないような世界では，コアとワルラス配分の集合の関係は，Aumann の想定していた関係よりも相当微妙なものにならざるを得ない．したがって，本節における我々の目的は，コアの決定性に関する諸命題を一括して採り上げることにある．本節における諸命題はすべて第18—21節および第25節において得られた命題を結合することによって導かれる．

まず，弱コアに関する存在問題から始めよう．本論のフレームワークにおいて，弱コアの非空性は生存条件の仮定の下に成立する．

定理 1〔弱コアの存在〕 経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ が各経済構成員の生存条件を満足すれば，すなわち $e(a)\in X_a$, a. e. $a\in A$, であれば，

$$\mathscr{C}_w(\mathscr{E})\neq\phi$$

が成立する．

証明 経済 $\mathscr{E}$ を所与とし，生存条件を満足するものとしよう．命題18.1より

$$\mathscr{W}_w(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}_w(\mathscr{E})$$

である．ところが，命題25.2から $\mathscr{W}_w(\mathscr{E})\neq\phi$ が成立するから，$\mathscr{C}_w(\mathscr{E})\neq\phi$ を得る．■

つぎに，コアの存在問題に移ろう．コアの存在問題に関しては，2つの角度からこれにアプローチすることが可能である．第1は，例18.1に見られるようなワルラス均衡の存在が保証されないセッティングで，コアの存在問題を論ずることである．第2は，Aumann の定理のように，コアとワルラス配分の集合の同値定理が成立するようなフレームワークに限定することである．

第1の視点から入ろう．第20節において同様の視点から同値定理を論

じたときは，本質的議論展開を浮き彫りにするために，初等的財空間に限定した分析を行った．ここでは一般的な財空間を扱うことにしたい．したがって，より一般的な弱正ワルラス均衡の定義を以下に与えることにする．本節では $\mathscr{D}^{0}_{\Omega}\neq\phi$ を仮定する．

定義 1〔弱正ワルラス均衡，弱正ワルラス配分〕 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\dot{\mathscr{P}}\times\Omega$ を任意の経済とし，(p,f) を $\mathscr{E}$ の弱ワルラス均衡とする．価格ベクトル $p\in R^{l}_{+}$ が任意の $j\in\mathscr{D}^{0}_{\Omega}$ に対し $p^{j}>0$ を満足するならば，(p,f) を**弱正ワルラス均衡** (weakly positive Walras equilibrium) とよぶ．このとき配分 f を**弱正ワルラス配分** (weakly positive Walras allocation) といい，それ全体の集合を $\mathscr{W}^{d}_{w}(\mathscr{E})$ と書く．

命題 2　経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}\times\Omega$ がつぎの条件

$$(\exists j\in\mathscr{D}^{0}_{\Omega})(\exists\varepsilon^{j}:A\to]0,\ \infty[)\ [e(a)-\varepsilon(a),e(a)]\subset X_{a},$$

$$\text{a. e. } a\in A,\quad \varepsilon(a):=(0,\cdots,\varepsilon^{j}(a),\cdots,0),$$

を満足すれば，

$$\mathscr{W}^{d}_{w}(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}(\mathscr{E})$$

が成立する．

この命題の証明は本質的に定理 20.1 の後半の証明と同一なので省略する．

注 1　定理 20.1 の同値定理の拡張としてつぎの命題を得られることも明らかであろう．**命題**　経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}_{ins,\,odd}\times\Omega$ は，上記命題 2 の条件を満たし，かつ非完全分割可能財から来る所得の充分性（定理 21.2 参照）を満たすものとする．このとき，$\mathscr{W}^{d}_{w}(\mathscr{E})=\mathscr{C}(\mathscr{E})$ が成立する．

定理 3〔コアの存在 I〕 経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}_{odd}\times\Omega$ は各経済構成員の生存条件，$\int_A ed\nu\in\operatorname{int}\int_A Xd\nu$（もしくは，非完全分割可能財から来る所得の充分性），および命題 2 の条件を満足するものとする．このとき，

$$\mathscr{C}(\mathscr{E})\neq\phi$$

が成立する．

証明 命題 2 より $\mathscr{W}^d_w(\mathscr{E})\neq\phi$ を示せばよい．ところが，命題 25.2 より $\mathscr{W}_w(\mathscr{E})\neq\phi$ であるから，(p,f) を弱ワルラス均衡としたとき，価格ベクトル p が条件

$$(\forall j\in\mathscr{D}^{\circ}_{\Omega})\,p^j>0$$

を満足することを示せばよい．この条件の成立することは，選好関係が完全分割可能財の優先性を持つことおよび非完全分割可能財から来る所得の充分性から導かれる．（定理 21.2 の証明を参照せよ．）■

最後に，第 2 の視点に立ったコアの存在定理を与えよう．これはワルラス均衡が存在するような経済環境の下でコアが非空になることを主張するに過ぎない．

定理 4〔コアの存在 II〕 経済 $\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}_{odd}\times\Omega$ は既約性を持ち，かつ $\int_A ed\nu\in\operatorname{int}\int_A Xd\nu$ とする．このとき，経済 $\mathscr{E}$ の初期保有量分布 μ_e が完全分割可能財の方向へ拡散的であれば，

$$\mathscr{C}(\mathscr{E})\neq\phi$$

となる．

証明 経済 $\mathscr{E}$ に対する以上の条件の下で，定理 25.4.（I）より $\mathscr{W}(\mathscr{E})\neq\phi$ である．ところが一般に $\mathscr{W}(\mathscr{E})\subset\mathscr{C}(\mathscr{E})$ が成立するから（命題 18.1 参照），$\mathscr{C}(\mathscr{E})\neq\phi$ を得る．■

27. 近似均衡

第24と25節とにおいてワルラス均衡の存在問題を分析した．本節の目的は有限経済における均衡解の存在問題を考えることにある．

本論のセッティングにおけるように財空間 Ω が凸集合ではない場合，所与のある有限経済における均衡解の存在の困難は2重に生じる．第1は，財空間 Ω の連結性（connectedness）の欠如を，単純な集計の効果（第9節参照）によって補い得ないことである．第2は，例え有限経済をその連続体表現で置き換えたとしても，第5章の分析におけるような集計による連続化効果・スムージング効果は発生しないことである．

以上の問題に対処するため，ワルラス均衡が要求する諸条件の制約を緩和し，近似的に制約条件を満足するような均衡を考えることにする．近似均衡（approximate equilibrium）において緩和される制約はつぎの2点である．第1点は，すべての経成構済員が需要ベクトルを配分されるということ．第2点は，配分が経済全体において正確（exactly）にフィージブルであることである．

配分のフィージビリティーを要請しない均衡に対し，我々は一見違和感を禁じえないかもしれない．しかし，正確なフィージビリティーを近似的フィージビリティーに置き換えることにより，我々は微少の在庫調整によって達成可能な，しかも在庫調整のコストが微少な近似解を考えるのである．財の非分割性を明示的に認めれば，この種の調整の必要性は，我々の直観と懸け離れているとは言い切れないであろう．

まず以下で新たに使用する記号を幾つか定義しておこう．任意の $x=(x^1, \cdots, x^l)\in R^l$ に対し

$$|x|:=(|x^1|, \cdots, |x^l|),$$

$$\|x\|_\infty:=\max\{|x^j| \mid j=1, \cdots, l\},$$

と定める．PS は第24節で定義した価格単体である．$PS^\circ := PS \cap R^l_{++}$ とする．任意の $p=(p^1, \cdots, p^l) \in PS^\circ$ に対し

$$b_p := 1/\min\{p^j \mid j=1, \cdots, l\}$$

と置く．$\mathscr{E}: A \to \mathscr{P} \times \Omega$ をある有限経済とする．このとき，$\mathscr{E}$ に対し

$$b_{\mathscr{E}} := \max\{\|e(a_1)+\cdots+e(a_l)\|_\infty \mid \text{各 } a_j \text{ は互いに素で } a_j \in A(j=1, \cdots, l)\}$$

を定義する．また，有限経済 $\mathscr{E}$ の総弱需要（平均弱需要）は

$$\Phi_{w\mathscr{E}}(p) := \frac{1}{\# A}\sum\nolimits_{a \in A} D_w(X_a, >_a, p \cdot e(a), p)$$

である．需要集合，弱需要集合については前々節および前節と同様な簡略化した記号を用い，$D(a, p)$，$D_w(a, p)$ 等と書くことにする．

最初の定理は，所与の有限経済における近似均衡の存在を主張するものである．この均衡が近似であるゆえんは，[1] 各構成員の受け取る消費ベクトル $f(a)$ が需要集合ではなく，弱需要集合に属すること，[2]（平均）超過需要の市場価値はほとんど 0 になっていること，[3] 配分 $f: A \to \Omega$ は必ずしもフィージブルではなく，一般的には，わずかながら超過需要が非正になる可能性があること，である．

定理 1〔有限経済における近似均衡の存在〕 Ω を初等的財空間とする．有限経済 $\mathscr{E}: A \to \mathscr{P}_{odd, wd, lns} \times \Omega$ がつぎの条件

(i) $(\forall a \in A)$ $X_a = \Omega \cap R^l_+$;

(ii) $(\forall a \in A)$ $e(a) \in X_a$;

(iii) $\sum_{a \in A} e(a) \in \operatorname{int} \sum_{a \in A} X_a$;

を満たすならば，

(iv) $\dfrac{1}{\# A}\sum_{a \in A} e(a) \in \operatorname{co} \Phi_{w\mathscr{E}}(p)$

を満たす価格ベクトル $p \in PS^\circ$ が存在する．この条件を満たす任意の価格ベクトル p に対し，$(\forall a \in A)$ $p \cdot f(a) = p \cdot e(a)$ となる経済 $\mathscr{E}$ の配分 f:

$A \to \Omega$ と $\sum_{a\in A} g(a) = \sum_{a\in A} e(a)$ を満足する写像 $g: A \to R^l$ が存在し，以下の条件を満たす．

［1］ $(\forall a\in A)\ f(a) \in D_w(a, p)$;

［2］ $p\cdot|\sum_{a\in A}(f(a)-e(a))| \leqq p\cdot\sum_{a\in A}|f(a)-g(a)| \leqq 2b_{\mathscr{E}}$;

［3］ $\|\sum_{a\in A}(f(a)-e(a))\|_\infty \leqq \sum_{a\in A}\|f(a)-g(a)\|_\infty \leqq 2b_p b_{\mathscr{E}}$.

定理を証明するためにつぎの補題を証明しておきたい．

補題 1　Ω を初等的財空間とし，経済 $\mathscr{E}: (A, \mathscr{A}, \nu) \to \mathscr{P}_{odd,wd,lns} \times \Omega$ はつぎの条件

（i） $X_a = \Omega \cap R^l_+$, a. e. $a\in A$;

（ii） $e(a) \in X_a$, a. e. $a\in A$;

（iii） $\int_A e d\nu \in \operatorname{int} \int_A X d\nu$;

を満足するものとする．このとき，経済 $\mathscr{E}$ の弱ワルラス均衡 (p, f) で $p\in PS^\circ$ および $\int_A f d\nu = \int_A e d\nu$ を満たすものが存在する．

証明　命題 25.2 より，経済 $\mathscr{E}$ の弱ワルラス均衡 (p, f) が存在する．ここで，条件（iii）および選好関係 $(X_a, >_a)$ が完全分割可能財の優先性を示すことから，

（1） $p^l > 0$

となることが，定理 21.2 の証明と全く同様な議論によって導かれる．一方，選好関係 $(X_a, >_a)$ の局所非飽和性から

（2） $p\cdot f(a) = p\cdot e(a)$, a. e. $a\in A$,

が成立していなければならない．配分 f はもちろんフィージブルだから

（3） $\int_A f d\nu \leqq \int_A e d\nu$

である．(1)，(2)，(3) の条件は特に第 l 財に関し

（4） $\int_A f^l d\nu = \int_A e^l d\nu$

であることを意味する．補題の条件 (i)—(iii) により，(4) は，ある $S\in$

$\mathscr{A}$, $\nu(S)>0$, およびある $\varepsilon>0$ に対し

（5） $f^l(a) > \varepsilon$, a. e. $a \in S$,

が成立することを意味する.

さて，補題の主張を証明するために

（6） $(\forall j=1, \cdots, l)\ p^j > 0$

を示したい. 今，ある $i \neq l$ について，$p^i=0$ であったと仮定してみよう. 選好関係 $(X_a, >_a)$ の弱デザイアラビリティーにより，A のほとんどいたるところ

$$z^i>f^i(a),\quad z^j \leqq f^j(a)\ (j \neq i),\quad z>_a f(a)$$

を満足する消費ベクトル $z \in X_a$ が存在する. ここで2つのケースを考える.

ケースⅠ $z^l < f^l(a)$.

この場合は (1) より

$$p \cdot z < p \cdot f(a) \leqq p \cdot e(a).$$

となり，$f(a) \in D_w(a, p)$, a. e. $a \in A$, に反する.

ケースⅡ $z^l = f^l(a)$.

この場合は (5) より S のほとんどいたるところ

$$y^l<f^l(a),\quad y^j=z^j (j \neq l),\quad y>_a f(a)$$

を満足する消費ベクトル $y \in X_a$ が存在する. したがって，ケースⅠの議論をこの y に適用し矛盾が導かれる.

よって (6) が証明された. (2), (3), (6) から

（7） $\int_A f d\nu = \int_A e d\nu$

の成立を得る. ■

定理1の証明 定理1の諸条件を満足する有限経済を $\mathscr{E}: A \to \mathscr{P}_{odd, wd, ins} \times \Omega$ とし，つぎのような $\mathscr{E}$ の連続体表現を考える. $\# A=n$ と置き，A

$=\{a_1, \cdots, a_n\}$ としよう．$A^*:=(0, 1]$, $\mathscr{A}:=\mathscr{B}((0, 1])$ と定義し，ν を $(0, 1]$ 上の Borel-Lebesgue 測度とする．

$$A_j^*:=\left(\frac{j-1}{n}, \frac{j}{n}\right], \quad j=1, \cdots, n,$$

とすれば，$\{A_j^*\}_j$ は互いに素な A^* の可測分割である．しかも，各 j について $\nu(A_j^*)=1/n$ となる．つぎに，可測写像 $\alpha: A^*\to A$ を，$\alpha(a)=a_j$, $a\in A_j^*$, によって定義し，写像 $\mathscr{E}^*:(A^*, \mathscr{A}, \nu)\to\mathscr{P}_{odd,wd,ins}\times\Omega$ を

$$\mathscr{E}^*:=\mathscr{E}\circ\alpha$$

と定めれば，$\mathscr{E}^*$ は1つの経済であり，かつ

（1）　$\mu_{\mathscr{E}^*}=\mu_{\mathscr{E}}$

となる．

経済 $\mathscr{E}^*$ の定義から，$\mathscr{E}^*$ は補題1の諸条件を満足する．よって，経済 $\mathscr{E}^*$ の弱ワルラス均衡 (p, f^*) で $p\in PS^\circ$ および $\int_{A^*}f^*d\nu=\int_{A^*}e^*d\nu$ を満足するものが存在する．（ここで $e^*: A^*\to\Omega$ は $\mathrm{pr}_2\circ\mathscr{E}^*: A^*\to\Omega$ である．）

$$\begin{aligned}\frac{1}{\# A}\sum_{a\in A}e(a) &= \int_{A^*}e^*d\nu \\ &= \int_{A^*}f^*d\nu \in \int_{A^*}D_w(\mathscr{E}^*(a), p)d\nu = \mathrm{co}\ \Phi_{w\mathscr{E}}(p)\end{aligned}$$

が成立する．ここで最後の等号は，$(A^*, \mathscr{A}, \nu)$ がアトムレス測度空間であること，および数学注8.6の (1) と (4)，上記の条件 (1) から従う．これで定理の前半が証明された．

条件 (iv) を満足する任意の $p\in PS^\circ$ について，Shapley-Folkman の定理（補題9.1）により，ある $S\subset A$, $\# S\leqq l$, に対し

$$(\forall a\in A\backslash S)\qquad g(a)\in D_w(a, p);$$
$$(\forall a\in A)\qquad g(a)\in \mathrm{co}\, D_w(a, p);$$
$$\sum_{a\in A}g(a)\in\sum_{a\in A}e(a);$$

を満たす $g: A \to R^l$ が存在する．そこで，経済 $\mathscr{E}$ の配分 $f: A \to \Omega$ をつぎのように定義する．$a \in A \backslash S$ に対しては $f(a)=g(a)$，$a \in S$ に対しては $f(a) \in D(a, p) \subset D_w(a, p)$ を任意に選ぶ．選好関係 $(X_a, >_a)$ の局所非飽和性により

$$(\forall a \in A) \ p \cdot f(a) = p \cdot e(a)$$

が成立する．また，$g(a) \in \mathrm{co}\, D_w(a, p)$ だから，$(\forall a \in A)$ $p \cdot g(a) = p \cdot e(a)$ となる．

以下，条件［2］と［3］が成立することを示そう．

$$\begin{aligned}
p \cdot |\textstyle\sum_{a \in A}(f(a)-e(a))| &= p \cdot \textstyle\sum|_{a \in A}(f(a)-g(a))| \\
&\leqq p \cdot \textstyle\sum_{a \in A}|f(a)-g(a)| \\
&= p \cdot \textstyle\sum_{a \in S}|f(a)-g(a)| \\
&\leqq \textstyle\sum_{a \in S}(p \cdot f(a) + p \cdot g(a)) \\
&= 2p \cdot \textstyle\sum_{a \in S} e(a) \\
&\leqq 2\|\textstyle\sum_{a \in S} e(a)\|_\infty \\
&\leqq 2b_{\mathscr{E}}. \\
\|\textstyle\sum_{a \in A}(f(a)-e(a))\|_\infty &= \|\textstyle\sum_{a \in A}(f(a)-g(a))\|_\infty \\
&\leqq \textstyle\sum_{a \in A}\|f(a)-g(a)\|_\infty \\
&\leqq \frac{p \cdot \sum_{a \in A}|f(a)-g(a)|}{\min\ \{p^j | j=1, \cdots, l\}} \\
&\leqq 2b_p b_{\mathscr{E}}.
\end{aligned}$$

これで定理 1 の証明が完了した．■

注 1　上記定理 1 において財空間 Ω を初等的な財空間に制約することは好ましくないが，これまでの文献と比較すればこれ以上一般的な財空間の範囲で近似均衡を論じたものはない．Broome (1972) や Khan and Rashid (1982) も同様な財空間を用いて議論を行っている．定理 1 の証明において Ω を初等的なものに限定した理由は，$p \in PS^{\circ}$ を示すことにあ

った．そこで，より一般的な財空間 Ω を許容し，さらに消費集合に関しても $X_a=\Omega\cap R^l_+$ というような制約を課さないとすれば，つぎのような仮定が必要となる．

$$(\forall z\in X)(\exists j\in\mathscr{D}^{\circ}_{\Omega})(\exists\varepsilon>0)\ z^j>e^j(a)\Rightarrow[z-\varepsilon_j, z]\subset X_a.$$

ここで ε_j は第 j 成分が ε，他の成分はすべて 0 のベクトルである．

手っ取り早く財空間と消費集合に関する制約を弱めるには，つぎのような「すべての財の優先制(the overriding desirability of every commodity)」——つまり，任意の $j(=1, \cdots, l)$，任意の $x, y\in X$ に対し，$z^j>y^j, z^i\leqq y^i$ $(i\neq j)$，$z>x$ を満足する $z\in X$ が存在する——を選好関係の性質として仮定すればよいが，この種の仮定は選好関係の性質としては余りにも特殊であり，許容されるべきではないであろう．

定理 1 が与える有限経済における近似均衡においては，ほとんどの経済構成員の消費ベクトルが必ずしも需要集合には属さない．この点を改善し，ほとんどの構成員が需要集合に属する消費ベクトルを受け取るような近似均衡を考えたい．この目的を達成するためのコストは，ある任意の有限経済における近似均衡ではなく，1 つの有限経済列における近似均衡を考えねばならないことにある．すなわち，ある有限経済列の極限定理の形で近似均衡の存在を論じるのである．第 24，25 節における均衡の存在定理にかんがみ，有限経済列における初期保有量分布は漸近的にその拡散の度合いを増さねばならない．そこで，つぎのような漸近拡散性の概念を導入しよう．（もちろん，所与の有限経済においてその初期保有量分布は拡散的では有り得ない．）

定義 1〔純粋に競争的な有限経済列における初期保有量分布の漸近拡散性 (Asymptotic Dispersedness of Endowment Distributions along a Purely Competitive Sequence of Finite Economies)〕 T を消費特性空

間 $\mathscr{P}\times\Omega$ のある部分集合とし，$(\mathscr{E}_n)_n$ を T 上で純粋に競争的な有限経済列とする．$(\mathscr{E}_n)_n$ の初期保有量分布が **漸近拡散的** (asymptotically dispersed) であるとは，$\mathscr{E}_n$ の選好・初期保有量分布 μ_n の極限分布 μ が弱拡散的初期保有量分布を持つこと，すなわち，μ の誘導する（消費集合 X が与えられた下での）条件付き富分布 $\mu_{w_p|X}$ が，任意の $p\in R^l_{++}$ について μ_X ほとんどいたるところアトムレス測度となることを意味する．

定理 2〔有限経済列における近似均衡の存在〕 Ω を初等的財空間とする．定理 1 の諸条件を満足する有限経済からなる $(\mathscr{E}_n)_n$ が $\mathscr{P}_{odd,wd,lns}\times\Omega$ 上で純粋に競争的であり，しかもその初期保有量分布が漸近拡散的であれば，各 n について，価格ベクトル $p_n\in PS^\circ$ と有限経済 $\mathscr{E}_n$ における配分 $f_n:A_n\to\Omega$ からなる組 (p_n, f_n) でつぎの条件

［1］ $(\forall a\in A_n)\ f_n(a)\in D_w(a,p)$；

［2］ $\lim_n\left(\dfrac{1}{\# A_n}\right)\#\{a\in A_n|\ f_n(a)\in D(a,p)\}=1$；

［3］ $\lim_n\left(\dfrac{1}{\# A_n}\right)\sum_{a\in A_n}(f_n(a)-e_n(a))=0$,

（ここで $e_n:=\mathrm{pr}_2\circ\mathscr{E}_n:A_n\to\Omega$ である）；

を満足するものが存在する．

証明 $\mathscr{P}_{odd,wd,lns}\times\Omega$ 上で純粋に競争的な有限経済列 $(\mathscr{E}_n)_n$ が定理の諸条件を満足するものとしよう．そして，その連続体表現を $(\mathscr{E}:(A,\mathscr{A},\nu)\to\mathscr{P}_{odd,wd,lns}\times\Omega,\ \alpha_n:A\to A_n,\ n=1,2,\cdots)$ とし（命題 23.1 参照），

$$\mathscr{E}_n{}^*:=\mathscr{E}_n\circ\alpha_n,\quad e_n{}^*:=\mathrm{pr}_2\circ\mathscr{E}_n{}^*$$

と置く．

補題 1 より各 n に対し経済 $\mathscr{E}_n{}^*$ の弱ワルラス均衡 $(p_n, g_n{}^*)$ で，

（1） $p_n\in PS^\circ,\ \displaystyle\int_A g_n{}^*d\nu=\int_A e_n{}^*d\nu$

を満足するものが存在する．

一般性を失うことなく $p_n \to p \in PS$ と仮定してよい．まず $p \in PS^\circ$ であることを示したい．各 n について

$$\int_A g_n{}^* d\nu \subset R^l_+;$$

$$\int_A g_n{}^* d\nu \leqq \int_A e_n{}^* d\nu \to \int_A e d\nu < \infty$$

$$(\text{ここで } e := \mathrm{pr}_2 \circ \mathscr{E} : A \to \Omega);$$

だから，$\left(\int_A g_n{}^* d\nu\right)_n$ は有界である．したがって，定理 25.1 の証明における議論と同様に，多次元 Fatou の補題を適用し

（2）　$f(a) \in \mathrm{Ls}(g_n{}^*(a))$，a. e. $a \in A$;

$$\int_A f d\nu \leqq \int_A e d\nu;$$

を満たす可積分写像 $f : A \to \Omega$ の存在が導かれる．さらに，弱需要集合関係 $D_w : \mathscr{P} \times R \times R^l_+ \to \Omega$ の上半連続性を用いて，(p, f) が実は経済 $\mathscr{E}$ の弱ワルラス均衡となることが容易に示される．この (p, f) に対して補題 1 の証明における議論を適用し

（3）　$p \in PS^\circ$;

（4）　$\int_A f d\nu = \int_A e d\nu$:

の成立が確認される．

定理 1 の証明と全く同様に，(1) を用い各 p_n に対し有限経済 $\mathscr{E}_n$ の配分 $f_n : A_n \to \Omega$ と写像 $g_n : A_n \to R^l_+$ を定める．そうすると各 f_n について定理の [1] が成立する．また，(3) より $\sup_n b_{p_n} < \infty$ だから，$b^* := 2\sup_n b_{p_n}$ と置けば，定理 1 の議論より

（5）　$\|\sum_{a \in A_n} f_n(a) - e_n(a)\|_\infty \leqq \sum_{a \in A_n} \|f_n(a) - e_n(a)\|_\infty$

$$\leqq b^* b_{\mathscr{E}_n}.$$

が成立する．よって，定理の [3] が成り立つ．

最後に [2] の成立を示そう．$(\mathscr{E}_n)_n$ の初期保有量分布は漸近拡散的だから，有限経済 $\mathscr{E}_n$ における選好・初期保有量分布 μ_n の極限分布 μ は弱拡散的初期保有量分布を持つ．そこで，各 μ_n および μ の $\mathscr{X}\times\Omega$ 上の周辺分布（消費集合・初期保有量分布）を $\mu_{n,X,e}$ および $\mu_{X,e}$ と書き，それぞれ完備化を $\bar{\mu}_{n,X,e}$ および $\bar{\mu}_{X,e}$ と表現することにしよう．また，任意の $q\in PS^\circ$ について，$\mathscr{X}\times\Omega$ の部分集合

$$S_q:=\{(X,x)\in\mathscr{X}\times\Omega|\ q\cdot x\in J_q(X)\}$$

を定義すれば，S_q は普遍可測集合である（命題 5.3 を参照せよ）．ところで，μ_n は μ に弱収束するから，周辺分布 $\mu_{n,X,e}$ も $\mu_{X,e}$ に弱収束する．μ の誘導する条件付き富分布は，各 $q\in R^l_{++}$ において μ_X ほとんどいたるところアトムレスだから，可測写像 $v_q:\mathscr{X}\times\Omega\to\mathscr{X}\times R$ を $(X,x)\mapsto(X,q\cdot x)$ とすれば，

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{X,e}(S_q)&=\bar{\mu}_{X,e}\circ v_q^{-1}(J_q)\\&=\bar{\mu}_{X,w_q}(J_q)\\&=0\end{aligned}$$

が定理 21.1 の証明中の議論同様に導かれる．よって，任意の $q\in PS^\circ$ について

$$\bar{\mu}_{n,X,e}(S_q)\to\bar{\mu}_{X,e}(S_q)=0$$

である．特に，各 $m=1,2,\cdots$ に対し

$$\bar{\mu}_{n,X,e}(S_{p_m})\to 0$$

となる．したがって，対角線論法により

（6） $\bar{\mu}_{n,X,e}(S_{p_n})\to 0$

を得る．ところが $(X,x)\notin S_q$ ならば

$$D(X,\succ,q\cdot x,q)=D_w(X,\succ,q\cdot x,q)$$

だから（定理 19.1 の証明中の (4) を参照），上記の (6) は定理の [2] を

意味する．これで証明が完了した．■

注 2　上記定理 2 において，所与の有限経済列における初期保有量ベクトルが一様に有界ならば，[3] が示す配分 f_n の漸近的フィージビリティーの収束スピードは $O(1/\#A_n)$ となる．(5) において b_{g_n} が一様に有界となるからである．

文献に関する歴史的ノート

現在，一般均衡モデルとよばれている(有限)競争経済の最初の数学的定式化は Leon Walras (1874) によって与えられた．この理論モデルの意図は，個々の構成員の市場における影響力は無視できるくらいに微小であるが，市場を通して相互に影響を及ぼしあう多数の構成員からなる経済において，いかなる均衡状態が達成されるのかを理論的に説明することにあった．Walras (1874, Lesson 7) 自身，彼の提示した理論が意味を持つためには，彼の理論モデルにおいて均衡解が存在しなければならないことを認識していた．しかし，彼の議論は，一般均衡体系において決定されるべき経済変数と体系を構成する方程式の数が等しいという事実の指摘にとどまり，厳密な意味における均衡の決定性の問題は，その後，半世紀以上もの間研究の対象として明示的に採り上げられる事はなかった．

1930 年代に入って均衡解の存在問題に関する研究が現れ始め，Neisser (1932), Stackelberg (1933), Zeuthen (1933), Schlesinger (1935) 等によって存在問題にかかわる幾つかの基本的問題点が認識されるに至った．

この均衡解の存在問題に関し最初の厳密な定式化と存在証明を与えたのは，1930 年代ウィーンにおいて Karl Menger のセミナーに参加していた A. Wald (1935, 1936 a, 1936 b) である．同じセミナーに参加していた von Neumann (1937) は，均衡解の存在問題ではないが最適均衡成長径

路の存在問題を研究し，不動点定理を初めて経済学に持ち込んだ．その後20年近くが経過し，1950年代に入って本格的な研究が米国における経済学者を中心に展開した．

Wald による定式化の欠点を補い，一般的な Walras モデルにおいて最初の存在定理を証明したのは米国においては Arrow-Debreu (1954) と McKenzie (1954, 1955) である．これらの論文は1952年12月シカゴにおける計量経済学会の年次大会 (Econometric Society Meeting) において同時に発表された．これらの研究とは独立にほとんど同時期に日本においても Nikaido (1956) によって均衡解の存在証明がなされていたようであるが，専門誌上の発表は先の論文に比較し2年ほど遅れている．

以上の論文の他に，Gale (1955), Debreu (1956), Kuhn (1956) 等の存在問題にかかわる諸論文も発表された．1950年代の一連の論文における存在証明を一般化したのが，McKenzie (1959) と Debreu (1962) である．

1950年代の「古典的」な存在定理は，有限個の完全分割可能財のみからなる財空間を基礎とし，消費集合の凸性および選好関係の凸性，推移性，完備性等を前提としている．この後者の選好関係の性質については，1970年代に入って Mas-Colell (1974) が推移性と完備性は均衡解の存在にとって本質的では無いことを示した．Gale and Mas-Colell (1975) および Shafer and Sonnenschein (1975 a, 1975 b) は Mas-Colell (1974) の証明よりも簡素化された理解し易い存在証明を与えている．

存在証明を含め，有限経済における一般均衡モデルの標準的教科書は Debreu (1959), Nikaido (1968) および Arrow and Hahn (1971) である．しかし，有限経済における均衡解存在証明の展望やその経緯に関しては，McKenzie (1981) と Debreu (1983) の論文が詳しい．

本論においては有限次元の財空間を分析の対象としているが，無限次元の財空間 (Mackey 位相 $\tau(L_\infty, L_1)$ を付与された L_∞ 空間) を前提とした

有限経済の存在証明は Bewley (1972) によって与えられている．その後，Mas-Colell (1975) は，K を財の特性を表現するコンパクトな距離空間とし，K の上で定義される測度全体の集合，$ca(K)$，に弱*位相を付与した財空間を考えて，(無限)経済におけるワルラス均衡の存在を証明した．以上 2 種類の相異なる財空間をより一層一般的な無限次元の財空間にしようという試みが最近の Aliprantis and Brown (1983), Florenzano (1983), Jones (1984), Mas-Colell (1983) 等の論文に見られる．

R^l を財空間とし，アトムレス測度空間を経済構成員の空間として持つ経済における均衡解の存在証明は，Aumann (1966) によって最初に与えられた．このようなフレームワークにおいては，Liapounov の定理によって，選好関係の凸性の仮定が不要となることも指摘された．Schmeidler (1969) は Aumann の証明を改良することによって選好関係の完備性を仮定しない存在証明を示した．これら両論文における選好関係の単調性 (monotonicity) の要請を局所非飽和性に弱め得ることを示したのは Hildenbrand (1970 a, 1970 b) である．

Mas-Colell (1977) はアトムレス測度空間を経済構成員の空間として持つ経済における均衡解の存在証明を，財空間 Ω が初等的財空間である場合に拡張した．財空間 Ω が初等的であるということは，基本的には純粋非分割財と完全分割可能財のみからなる財空間に限定することである．本質的に，財の非分割性や消費集合の非凸性の形状に制約を加えないような一般均衡モデルは Yamazaki (1978, 1981) によって導入され，均衡解の存在証明が与えられた．第 24 節の定理 1 は Yamazaki (1978) によるものである．第 25 節の定理 1，命題 2—3，定理 4 はいずれも Yamazaki (1981) の定理 2 に依拠しているが，証明のステップには改善が加えられている．

有限経済におけるコアの決定性に関し，その直接的証明を与えたのは Scarf (1967, 1971) である．コアに関する Scarf の存在証明を無限人のフ

レームワークに拡張したのは Ichiishi and Weber (1978) である．彼らはコアが非空になるための必要・充分条件を示したが，条件の経済学的解釈は困難である．第26節の命題2および定理3は Khan and Yamazaki (1981) によるものである．

R^l を財空間とし，凸集合を各構成員の消費集合として持つ経済において，近似均衡の存在を初めて証明したのは Starr (1969) である．近似均衡の存在証明において重要な役割を果たしている Shapley-Folkman の定理（補題9.1参照）も，Starr によって初めて経済学に導入された．Arrow and Hahn (1971) は Starr による近似均衡の存在に関する定理を洗練した結果を導いている．これら両者の論文において，均衡の近似度は選好関係の非凸性の程度に依存している．この欠点を改善した近似均衡の存在証明を与えたのは Hildenbrand-Schmeidler-Zamir (1973) である．彼らは有限経済を Aumann の連続体表現に置き換えて議論展開するという手法を用いた．Hildenbrand (1974) は彼らの定理をさらに洗練したものにしている．Khan (1975) は有限経済列における数種類の近似均衡概念を提示し，それらを体系的に比較している．Khan の諸定理は Hildenbrand-Schmeidler-Zamir の定理と類似しているが，後者が Schmeidler (1969) の存在定理に依拠した証明を与えているのに対し，彼は Brown (1976) の超解析を用いた存在証明に依拠した手法を用いている．財空間を R^l とした場合の最も一般的な近似均衡の存在証明は Anderson (1982) によって与えられている．

財空間 Ω が非分割財を含む場合，有限経済における均衡の存在には困難があることを Henry (1970) が論じている．E. Dierker (1971) は，Ω が純粋非分割財のみからなる場合を考え，近似均衡の存在を示した．Ω が初等的財空間である場合の近似均衡の存在証明を行ったのは Broome (1976) である．Khan and Rashid (1982) も Broome と同様に初等的財空間を

取り上げているが，有限経済列に対する近似均衡の存在を論じている．

第27節の定理1は，Anderson (1982) の定理1を修正し，初等的財空間における近似均衡の存在を示したものである．この形の近似均衡の存在は Khan and Rashid (1982) には含まれていない．定理2は Khan and Rashid の定理3を超解析を用いずに標準的解析の手法によって証明したものである．漸近拡散性の定義は，彼らの漸近拡散性の定義とは少々異なっている．

文　献

Aliprantis, C. D., and D. J. Brown, 1983, "Equilibria in Markets with a Riez Space of Commodities," *Journal of Mathematical Economics* 11, 189–207.

Anderson, R., 1982, "A Market Value Approach to Approximate Equilibria," *Econometrica* 50, 127–136.

Araujo, A., and A. Mas-Colell, 1978, "Notes on the Smoothing of Aggregate Demand," *Journal of Matematical Economics 5,* 113–127.

Arrow, K. J., and G. Debreu, 1954, "Existence of Equilibrium for a Competitive Economy," *Econometrica* 22, 265–290.

Arrow, K. J., and F. H. Hahn, 1971, *General Competitive Analysis,* San Francisco: Holden-Day.

Aumann, R. J., 1964, "Markets with a Continuum of Traders," *Econometrica* 32, 39–50.

Aumann, R. J., 1965, "Integrals of Set-Valued Functions," *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 12, 1–12.

Aumann, R. J., 1966, "Existence of Competitive Equilibria in Market with a Continuum of Traders," *Econometrica* 34, 1–17.

Bauer, H., 1981, *Probability Theory and Elements of Measure Theory,* Second English Edition, New York: Academic Press.

Bewley, T., 1972, "Existence of Equilibria in Economies with Infinitely Many Commodities," *Journal of Economic Theory* 4, 514–540.

Billingsley, P., 1968, *Convergence of Probability Measures*, New York: John Wiley & Sons.

Broome, J., 1972, "Existence of Equilibrium in Economies with Indivisible Commodities," *Journal of Economic Theory* 5, 224–250.

Brown, D. J., 1976, "Existence of a Competitive Equilibrium in a Nonstandard Exchange Economy," *Econometrica* 44, 537–546.

Cassels, J. W. S., 1975, "Measures of the Non-Convexity of Sets and the Shapley-Folkman-Starr Theorem," *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* 78, 433–436.

Cournot, A., 1838, *Recherches sur les Principes Mathématiques de la Théorie des Richesse*, Paris: Hachette. Translated as: *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, New York: The MacMillan Company (1927).

Debreu, G., 1952, "A Social Equilibrium Existence Theorem," *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.* 38, 886–893.

Debreu, G., 1956, "Market Equilibrium." *Proceedings of the National Academy of Sciences of the U. S. A.* 42, 876–878.

Debreu, G., 1959, *Theory of Value*, New York: John Wiley and Sons.

Debreu, G., 1962, "New Concepts and Techniques for Equilibrium Analysis," *International Economic Review* 3, 257–273.

Debreu, G., 1963, "On a Theorem of Scarf," *Review of Economic Studies* 30, 177–180.

Debreu, G., 1967, "Integration of Correspondences," in L. LeCam, J. Neyman, E. L. Scott, eds., *Proceedings of Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, II, Part 1, Berkeley: University of California, Press, 351–372.

Debreu, G., 1969, "Neighboring Economic Agents," *La Décision*, Paris: C. N. R. S., 85–90.

Debreu, G., 1982, "Existence of Competitive Equilibrium," Chapter 15 in Arrow et al. eds.: *Handbook of Mathematical Economics*, Vol. II, Amsterdam: North-Holland Publishing Co., 697–743.

Debreu, G., and H. Scarf, 1963, "A Limit Theorem on the Core of an Economy," *International Economic Review* 4, 235-246.

Dellacherie, C., and P. A. Meyer, 1978, *Probabilities and Potential*, Amsterdam: North-Holland.

Desai, M., 1984, "A Pioneering Analysis of the Core: Turgot's Essay on Value," Preliminary Draft, London: London School of Economics.

Dierker, E., 1971, "Equilibrium Analysis of Exchange Economies with Indivisible Commodities," *Econometrica* 39, 997-1008.

Dierker, E., 1974, *Topological Methods in Walrasian Economics*, Berlin: Springer.

Dierker, E., H. Dierker, and W. Trockel, 1980a. "Continuous Mean Demand Function Derived from Nonconvex Preferences," *Journal of Mathematical Economics* 7, 27-34.

Dierker, E., H. Dierker, and W. Trockel, 1980b, "Smoothing Demand by Aggregation with respect to Wealth," *Journal of Mathematical Economics* 7, 227-247.

Dudley, R. M., 1968, "Distances of Probability Measures and Random Variables," *Annals of Mathematical Statistics* 39, 1563-1572.

Dugundji, J., 1966, *Topology*, Boston: Allyn and Bacon.

Edgeworth, F. Y., 1881, *Mathematical Psychics*, London: C. Kegan Paul.

Edgeworth, F. Y., 1891, "On the Determinateness of Economic Equilibrium," *Giornale degli Economisti*, translated in: *Papers Relating to Political Economy* II, London: MacMillan and Co., Ltd. (1925), 313-319.

Florenzano, M., 1983, "On the Existence of Equilibria in Economies with an Infinite Dimensional Commodity Space," *Journal of Mathematical Economics* 12, 207-219.

Gale, D., 1955, "The Law of Supply and Demand," *Mathematica Scandinavica* 3, 155-169.

Gale, D., and A. Mas-Colell, 1975, "An Equilibrium Existence Theorem for a General Model without Ordered Preferences," *Journal of Mathematical Economics* 2, 9-15.

Gilles, D. B., 1953, "Some Theorems on N-Person Games," Ph.D. Thesis, Princeton: Princeton University.

Grandmont, J.-M., 1978, "Intermediate Preferences and the Majority Rule," *Econometrica* 46, 317–330.

Grodal, B., 1972, "A Second Remark on the Core of an Atomless Economy," *Econometrica* 40, 581–583.

Grodal, B., 1974, "A Note on the Space of Preference Relations," *Journal of Mathematical Economics* 1, 279–294.

Henry, C., 1970, "Indivisibilité dans une Economie d'Echange," *Econometrica* 38, 542–558.

Hicks, J. R., 1930, "Edgeworth, Marshall, and the Indeterminateness of Wages," *Economic Journal*, 215–231.

Hicks, J. R., 1939, *Value and Capital*, London: Oxford University Press.

Hildenbrand, W., 1968, "The Core of an Economy with a Measure Space of Economic Agents," *Review of Economic Studies* 35, 443–452.

Hildenbrand, W., 1970a, "Existence of Equilibria for Economies with Production and a Measure Space of Consumers," *Econometrica* 38, 608–623.

Hildenbrand, W., 1970b, "Metric Measure Spaces of Economic Agents," in L. Le Cam et al. eds., *Proceedings of the Sixth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley: University of California Press, 81–95.

Hildenbrand, W., 1970c, "On Economies with Many Agents," *Journal of Economic Theory* 2, 161–188.

Hildenbrand, W., 1974, *Core and Equilibria of a Large Economy*, Princeton: Princeton Univertisy Press.

Hildenbrand, W., 1980, "On the Uniqueness of Mean Demand for Dispersed Families of Preferences," *Econometrica* 48, 1703–1710.

Hildenbrand, W., and J. F. Mertens, 1971, "On Fatou's Lemma in Several Dimensions," *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 17, 151–155.

Hildenbrand, W., D. Schmeilder, and S. Zamir, 1973, "Existence of Approximate Equilibria and Cores," *Econometrica* 41, 1159–1166.

Ichiishi, T., 1974, "Economies with a Mean Demand Function," Working Paper IP 199, Berkeley, C. A.: University of California. (A shortened version is in *Journal of Mathematical Economics* 3 (1976), 167–171.)

Ichiishi, T., and S. Weber, 1978, "Some Theorems on the Core of a Non-Sidepayment Game with a Measure Space of Players," *International Journal of Game Theory* 7, 95–112.

Jacobs, K., 1978, *Measure and Integral*, New York: Academic Press.

Jones, L. E., 1984, "A Competitive Model of Commodity Differentiation," *Econometrica* 52, 507–530.

Kakutani, S., 1941, "A Generalization of Brower's Fixed Point Theorem," *Duke Mathematical Journal* 8, 457–459.

Kannai, Y., 1970, "Continuity Properties of the Core of a Market," *Econometrica* 38, 791–815.

Khan, M. A., 1975, "Some Approximate Equilibria," *Journal of Mathematical Economics* 2, 63–86.

Khan, M. A., and S. Rashid, 1977, "Limit Theorems on Cores with Costs of Coalition Formation," Working Paper 28, Baltimore: The Johns Hopkins University.

Khan, M. A., and S. Rashid, 1982, "Approximate Equilibria in Markets with Indivisible Commodities," *Journal of Economic Theory* 28, 82–101.

Khan, M. A., and A. Yamazaki, 1981, "On the Cores of Economies with Indivisible Commodities and a Continuum of Traders," *Journal of Economic Theory* 24, 218–225.

Kuhn, H. W., 1956, "On a Theorem of Wald," in: H. W. Kuhn and A. W. Tucker, eds., *Linear Inequalities and Related Systems, Annals of Mathematical Studies* 38, Princeton: Princeton University Press, 265–273.

Malinvaud, E., 1972, *Lectures on Microeconomic Theory*, Amsterdam: North-Holland.

Marshall, A., 1920, *Principles of Economics*, Eighth Edition, London: The Macmillan Press Ltd.

Mas-Colell, A., 1973, "On Aggregate Demand in a Measure Space of Agents," Working Paper IP 183, Berkeley, C. A.: University of California.

Mas-Colell, A., 1974, "An Equilibrium Existence Theorem without Complete or Transitive Preferences," *Journal of Mathematical Economics* 1, 237-246.

Mas-Colell, A., 1975, "A Model of Equilibrium with Differentiated Commodities," *Journal of Mathematical Economics* 2, 236-296.

Mas-Colell, A., 1977, "Indivisible Commodities and General Equilibrium Theory," *Journal of Economic Theory* 16, 443-456.

Mas-Colell, A., 1982, "Perfect Competition and the Core," *Review of Economic Studies* 49, 15-30.

Mas-Colell, A., 1983, "The Pice Equilibrium Existence Problem in Banach Lattices", Working Paper, Cambridge: Harvard University.

McKenzie, L., 1954, "On Equilibrium in Graham's Model of World Trade and Other Competitive Systems," *Econometrica* 22, 147-161.

McKenzie, L., 1955, "Competitive Equilibrium with Dependent Consumer Preferences," in National Bureau of Standards and Department of the Air Force, *The Second Symposium on Linear Programming,* Washington D. C.

McKenzie, L., 1956-7, "Demand Theory without a Utility Index," *Review of Economic Studies* 23-24, 185-189.

McKenzie, L., 1959, "On the Existence of General Equilibrium for a Competitive Market," *Econometrica* 27, 54-71.

McKenzie, L., 1981, "The Classical Theorem on Existence of Competitive Equilibrium," *Econometrica* 49, 819-841.

Michael, E., 1956, "Continuous Selections I," *Annals of Mathematics* 63, 361-382.

Mukherji, A., 1977, "The Existence of Choice Functions," *Econometrica* 45, 889-894.

Neisser, H., 1932, "Lohnhöhe und Beschäftigungsgrad im Marktgleichgewicht," *Weltwirtschaftliches Archiv* 36, 415-455.

Neumann, J. von, 1937, "Über ein Ökonomisches Gleichungssystem und eine

Verallgemeinerung des Brouwerschen Fixpunktsatzes," *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 8, 73–83. Translated in: *Review of Economic Studies* 13 (1945), 1–9.

Nikaido, H., 1956, "On the Classical Multilateral Exchange Problem," *Metroeconomica* 8, 135–145.

Nikaido, H., 1968, *Convex Structures and Economic Theory*, New York: Academic Press.

Parthasarathy, K. R., 1967, *Probability Measures on Metric Spaces*, New York: Academic Press.

Richter, M. K., 1966, "Revealed Preference Theory," *Econometrica* 34, 635–645.

Richter, M. K., 1979, "Duality and Rationality," *Journal of Economic Theory* 20, 131–181.

Rockafeller, R. T., 1970, *Convex Analysis*, Princeton: Princeton University Press.

Sakai, Y., 1977, "Revealed Favorability, Indirect Utility, and Direct Utility," *Journal of Economic Theory* 14, 113–129.

Saks, S., 1937, *Theory of the Integral*, Second Edition, New York: G. E. Stechert.

Samuelson, P. A., 1938, "A Note on the Pure Theory of Consumer's Behavior," *Economica* 5, 61–71.

Samuelson, P. A., 1947, *Foundations of Economic Analysis*, Cambridge: Harvard University Press.

Scarf, H., 1962, "An Analysis of Markets with a Large Number of Participants," *Recent Advances in Game Theory*, Princeton: Princeton University Press, 127–155.

Scarf, H., 1967, "The Core of an N-Person Game," *Econometrica* 35, 50–69.

Scarf, H., 1971, "On the Existence of a Cooperative Solution for a General Class of N-Person Games," *Journal of Economic Theory* 3, 169–181.

Schlesinger, K., 1935, "Über die Productionsgleichungen der Ökonomischen Wertlehre," *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 6, 10–11.

Schmeidler, D., 1969, "Competitive Equilibria in Markets with a Continuum of Traders and Incomplete Preferences," *Econometrica* 37, 578–585.

Schmeidler, D., 1970, "Fatou's Lemma in Several Dimensions," *Proceedings of the American Mathematical Society* 24, 300–306.

Schmeidler, D., 1972, "A Remark on the Core of an Atomless Economy," *Econometrica* 40, 579–580.

Shafer, W. J., 1974, "The Nontransitive Consumer," *Econometrica* 42, 913–919.

Shafer, W. J., and H. F. Sonnenschein, 1975 a, "Equilibrium in Abstract Economies without Ordered Preferences," *Journal of Mathematical Economics* 2, 345–348.

Shafer, W. J., and H. F. Sonnenschein, 1975 b, "Some Theorems on the Existence of Competitive Equilibrium," *Journal of Economic Theory* 11, 83–93.

Shapley, L., and H. Scarf, 1974, "On Cores and Indivisibility," *Journal of Mathematical Economics* 1, 23–38.

Shubik, M., 1959, "Edgeworth Market Games," in R. D. Luce *et al.* eds., *Contributions to the Theory of Games* IV, *Annals of Mathematical Studies* 40, Princeton: Princeton University Press, 267–278.

Sion, M., and D. W. Bressler, 1964, "The Current Theory of Analytic Sets," *Canadian Journal of Mathematics* 16, 207–230.

Skorokhod, A. V., 1965, *Studies in the Theory of Random Processes,* Reading: Addison-Wesley Publishing Co.

Solvay, R., 1970, "A Model of Set Theory in which Every Set of Reals is Lebesgue-Measurable," *Annals of Mathematics* 92, 1–56.

Sondermann, D., 1975, "Smoothing by Aggregation," *Journal of Mathematical Economics* 2, 201–223.

Sondermann, D., 1977, "Some Results and Remarks on the 'Smoothing by Aggregation' Problem," in Colloque Internationaux du Centre National de la Recherche Scientifique no. 259, *Système Dynamique et Modèles Economiques,* Paris: Centre National de la Recherche Scientifique, 89–93.

Sonnenschein, H., 1971, "Demand Theory without Transitive Preferences, with Applications to the Theory of Competitive Equilibrium," in J. Chipman *et al* eds., *Preferences, Utility and Demand,* New York: Harcourt Brace, Javonovich, 214–223.

Stackelberg, H. von, 1933, "Zwei Kritische Bemerkungen zur Preistheorie Gustav Cassels," *Zeitschrift für Nationalökonomie* 4, 456–472.

Starr, R., 1969, "Quasi-Equilibria in Markets with Non-Convex Preferences," *Econometrica* 17, 25–38.

Stigler, G. J., 1957, "Perfect Competition, Historically Contemplated," *Journal of Political Economy* 65, 1–17.

Turgot, A. R. J., 1769, *Valeur et Monnaies.* Translated in: P. D. Groenewegen, *The Economics of A. R. J. Turgot,* Hague: Martinus Nijhoff (1977).

Vind, K., 1964, "Edgeworth-Allocations in an Exchange Economy with Many Traders," *International Economic Review* 5, 165–177.

Vind, K., 1973, "A Third Remark on the Core of an Atomless Economy," *Econometrica* 40, 585–586.

Vind, K., 1984, "Notes on Edgeworth," unpublished notes, Copenhagen: Institute of Economics, University of Copenhagen.

Wald, A., 1935, "Über die Eindeutige Positive Lösbarkeit der Neuen Produktionsgleichungen," *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 6, 12–20.

Wald, A., 1936a, "Über die Produktionsgleichungen der Ökonomischen Wertlehre," *Ergebnisse eines Mathematischen Kolloquiums* 7, 1–6.

Wald, A., 1936b, "Über einige Gleichungssysteme der Mathematischen Ökonomie," *Zeitschrift für Nationalökonomie* 7, 637–670. Translated as: "On Some Systems of Equations of Mathematical Economics," *Econometrica* 19 (1951), 368–403.

Walras, L., 1874, *Elêments d'Economie Politique Pure,* Lausanne: Corbaz. Translated as: *Elements of Pure Economics,* Chicago: Irwin (1954).

Watson, P. D., 1953, "On the Limits of Sequences of Sets," *Quarterly Journal of Mathematics* 4, 1–3.

Weiss, Jr., E.-A., 1981, "Finitely Additive Exchange Economies," *Journal of Mathematical Economics* 8, 221–240.

Yamazaki, A., 1978a, "An Equilibrium Existence Theorem without Convexity Assumptions," *Econometrica* 46, 541–555.

Yamazaki, A., 1978b, "On the Pseudo-Competitive Allocations and the Core of a Large Economy," *Journal of Mathematical Economics* 5, 217–228.

Yamazaki, A., 1979. "Continuously Dispersed Preferences, Regular Preference-Endowment Distribution, and Mean Demand Funcion," in J. Green and J. Scheinkman, eds., *General Equilibrium, Growth, and Trade,* New York: Academic Press, 13–24.

Yamazaki, A., 1980, "A Note on the Almost Everywhere Uniqueness of Maximal Elements without Ordered Preferences,"*Journal of Mathematical Economics* 7, 209–211.

Yamazaki, A., 1981, "Diversified Consumption Characteristics and Conditionally Dispersed Endowment Distribution: Regularizing Effect and Existence of Equilibria," *Econometrica* 49, 639–654.

Yamazaki, A., 1982, "The Critical Set of a Demand Correspondence in the Price Space and the Weak Axiom of Revealed Preference," RUEE Working Paper No. 82-7. Tokyo: Hitotsubashi University.

Yamazaki, A., 1983, "Continuous Preference Relations which are Observable in Markets," *Hitotsubashi Journal of Economics* 23, 40–47.

Zeuthen, F., 1933, "Das Prinzip der Knappheit, Technische Kombination, und Ökonomische Qualität," *Zeitschrift für Nationalökonomie* 4, 1–24.