〔12〕 Wilsdon, B. H. (1934), "Discrimination by specification statistically considered and illustrated by the standard specification for Portland cement," Journal of the Royal Statistical Society, Supplement, Vol. 1, p. 152—206.

〔13〕 Bartlett, M. S. (1934), "The problem in statistics of testing several variances," Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 30, Part 2. p. 168—169. (未見)

〔14〕 上記〔4〕 Wilks (原著 1943, 邦訳 1951), 下巻, p. 270—271, 定理 A (2) (3)。

〔15〕 上記〔2〕 小宮隆太郎 (1960), p. 277—278.

〔16〕 上記〔4〕 Wilks (原著 1943, 邦訳 1951), 下巻, p. 258—259, 定理 (A) (2)。

〔17〕 同上, 上巻, p. 100, 定理 (C)。

〔18〕 上記〔3〕 Mood (1950). Ch. 13, §13・3, p. 297—299.

森田優三 (1955), 経済変動の統計分析法,' 岩波全書 214, 東京, 岩波書店, 第12章, §12・3, p. 142—145, では, 予測区間を信頼区間と呼んでいるが, 両者を区別した方がよい。

なお, 信頼区間の一般化については, 次の論文が興味深い。

Chow, G. C (1960), "Tests of equality between sets of coefficients in two linear regressions," Econometrica, Vol. 28, p. 591—605.

〔19〕 上記〔3〕 Mood (1950). Ch. 14, §14・13, p. 356—358.

〔20〕 上記〔11〕 Snedecor (原著 1940, 邦訳 1952), 第12章, §12・3, p. 311—313, 第13章, §13・6, p. 342—345.

III 2 (イ) における H_{22}' が採択された後に, H_{24} と H_{27}' とが成立すれば, H_{28} の成立と同等であるから,

$\theta_i=\alpha+\beta z^0$ という形で, $H:\theta_i=\theta$, が成立する。

そこで, この仮説を

$$F=\frac{(Q_6[t-k-1]^*+Q_9[k]^*)/(t-1)}{(Q_1[N-(k+1)t+Q_4[k(t-1)]^*)/(N-t-k)}$$

自由度

$t-1,\ (N-t-k)$

で検定する。結局, Snedecor の場合には, 修正された平均値の比較というのは, 回帰線の完全同一性の検定と同じことになっている。

〔21〕 Wishart, J. (1936), "Tests of significance in analysis of covariance." Journal of the Royal Statistical Society, Supplement, Vol. 3, p. 79—82.

常に推論の基調となった Cochran の定理の美しさと その威力とを讃えたい。

附記　この研究は昭和 35 年度文部省科学研究費（機関研究）による研究の一部であり，将来行わるべき統計的計測に対して，統計理論的基礎を明かにしようとするものである。本稿をまとめるに当り，本学の鍋谷清治氏から いろいろ御注意をいただき，参考文献に関しては，同氏のほか，統計数理研究所の松下嘉米男氏，本学の荒憲治郎氏の御配慮を得た。特に記して感謝の意を表わしたい。

参 考 文 献

〔1〕 Cochran, W. G. (1957), "Analysis of covariance: its nature and uses," Biometrics, Vol. 13, p. 261—281.

〔2〕 小宮隆太郎 (1960),『計量経済学と共分散分析』森嶋通夫・篠原三代平・内田忠夫編，新しい経済分析——理論・計量・予測—— 大阪，大阪大学社会経済研究室，第 9 章，p. 269—296 所収。

〔3〕 Mood. A. M. (1950), Introduction to the Theory of Statistics, New York, Mc Graw, 1st ed., Ch. 14, §14•12, p. 350—356.

〔4〕 Wilks, S. S. (原著 1943，邦訳 1951)，小河原正巳訳，数理統計学，下巻，東京，春日出版社，第 8 章 §8・2 および §8・3，p. 256—273.

〔5〕 北川敏男・増山元三郎編 (1952)，新編統計数値表，東京，河出書房，解説，p. 64—65. および p. 87.

〔6〕 上記〔3〕Mood (1950), p. 296, 数式 (33)。なお，この数式 (33) の分子は，その自由度 2 で割られていなければならないが，それが記されていないのはミスプリントである。

〔7〕 磯野修 (1947),『最低生計費の算定について』大蔵省理財局編，財政経済統計月報，No. 6, (昭和 22 年 4 月 1 日号) p. 16—23.

〔8〕 上記〔5〕新編統計数値表 (1952), 解説， p. 156.

〔9〕 上記〔3〕Mood (1950)， p. 354, Fig. 67.

〔10〕 上記〔5〕新編統計数値表 (1952), 解説，p. 151—153.

〔11〕 Snedecor, G. W. (原著 1940, 邦訳 1952)，畑村又好・河村善郎・奥野忠一・田中祐輔訳，統計的方法——農学および生物学における実験のための—— 下巻，東京，岩波書店，第 12 章，§12・5 および §12・6, p. 316—322

いて Snedecor の本[20]に記されている検定は注に示すように，F の値の分母は（4. 25）であるが，分子は（4. 24）とは異る。

H_{22}' が採択されたとき，級の個数 $t=2$ で2個の修正された平均値の比較ならば，（4. 18）から

$$\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2=(\bar{x}_1-\bar{x}_2)-\hat{\beta}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^T.$$

この分散は

$$\sigma^2(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)=\sigma^2\left[\frac{1}{n_1}+\frac{1}{n_2}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)\boldsymbol{W}^{-1}(\bar{z}_1-\bar{z}_2)^T\right]$$

となるから，$(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)/\sigma(\hat{\theta}_1-\hat{\theta}_2)$ は標準正規分布に従い，t 分布を用いて θ_1 と θ_2 の有意差を検定できる。ここで $n_1=n_2$ のときの $k=1$ および $k=2$ が，J. Wishart によって指摘された場合になる[21]。

IV　結　　論

この論文の出発点は，一元回帰理論における共分散分析についての Mood の説明を不満とし，Cochran の定理の美しさに惹かれて，この定理を用いて共分散分析法の基本的関係式を明かにしようとする点にあった。Cochran の定理を用いることにより，確率模型における実測不能な確率変数 ϵ_{ij} についての互に独立な χ^2 変量が現われ，これを観測可能な確率変数 x_{ij} で表わすとき，各種の推定および検定が可能になる。それらは経済学でよく用いられる回帰分析の立場から見て興味あるものが多い。特に，数個の級をまとめてグループに分ける場合にも，その理論的原理は常に Cochran の定理に求められた。共分散分析と同じ方針を多元回帰の場合に適用することにより，重共分散分析法の基本的関係式が明かとなり，各種の推定と検定の基礎づけを行うことができる。そして重共分散分析の場合には，説明変数が2個または　それ以上のため，説明変数の全部ではなく一部だけを取りあげようとすると，共分散分析の場合には存在しなかった新しい問題が生ずる。しかし，この問題もまた Cochran の定理を用いることによって解決された。最後に，「修正された平均値」の比較に関する手法の紹介において，もう一度この定理が現われた。本論文の終りに臨んで，

$$(4.\ 23)\qquad \sum_{i=1}^{t}\epsilon_i'^2=\sum_i\frac{(\hat{\theta}_i-\theta)^2}{\sigma^2(\hat{\theta}_i)}=\sum\frac{\{(\hat{\theta}_i-\hat{\theta})+(\hat{\theta}-\theta)\}^2}{\sigma^2(\hat{\theta}_i)}$$
$$=\sum_i\frac{(\hat{\theta}_i-\hat{\theta})^2}{\sigma^2(\hat{\theta}_i)}+\sum_i\frac{(\hat{\theta}-\theta)^2}{\sigma^2(\hat{\theta}_i)},$$

と分離できる。両辺の各項を，ϵ_1', ϵ_2', …, ϵ_t' に関する二次形式とみるとき，Cochran の定理により，右辺第１項は自由度 $t-1$, 第２項は自由度１の χ^2 分布に従い，両者は互に独立である。既に述べたように，これらは（4. 19）とも独立であるから，後者を結合した

$$Q_1[N-(k+1)t]=\sum_i Q_1^i[n_i-(k+1)]\ \text{と},$$

（4. 23）右辺第１項とを対比して，

$$(4.\ 24)\qquad F=\frac{\sum_i(\hat{\theta}_i-\hat{\theta})^2/\{\sigma^2(\hat{\theta}_i)(t-1)\}}{Q_1[N-(k+1)t]/\{N-(k+1)t\}},$$

自由度　$(t-1)$, $\{N-(k+1)t\}$

で上記の帰無仮説 H の検定を行い，これが採択されたとき，

$$F=\frac{\sum_i(\hat{\theta}_i-\theta)^2/\{\sigma^2(\hat{\theta}_i)t\}}{Q_1[N-(k+1)t]/\{N-(k+1)t\}},$$

自由度　t, $\{N-(k+1)t\}$

で θ の信頼区間を作ることができる。

III 2（イ）における H_{22}' が採択されて，$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\beta}$, $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$ と認めてもよい場合には，（4. 16）以下の各式において $\boldsymbol{\beta}_i$ の添字 i を取り，それに応じて $\boldsymbol{W}_i$ の添字 i を取り去ってもよい。この場合には H_{22}' が採択されているから，誤差項に

$$Q_4[k(t-1)]^*=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{W}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}})^T$$

を込めて，（4. 24）の分母を

$$(4.\ 25)\qquad \{Q_1[N-(k+1)t]+Q_4[k(t-1)]^*\}/(N-t-k)$$

とし，自由度の後半を $(N-t-k)$ に改めることができる。

本節に述べた「修正された」平均値の比較について，一元回帰の場合 $(k=1)$ は Mood の本に説明されている[19]。$k=1$, $k=2$ の場合につ

それ故，$\hat{\theta}_i$ の分散は

$$\sigma^2(\hat{\theta}_i)=\sigma^2\left[\frac{1}{n_i}+(\bar{z}_i-\boldsymbol{z}^0)\boldsymbol{W}_i^{-1}(\bar{z}_i-\boldsymbol{z}^0)^T\right] \tag{4. 20}$$

となり，これを用いて $\hat{\theta}_i$ を標準化して，

$$(\hat{\theta}_i-\theta_i)/\sigma(\hat{\theta}_i)=\epsilon_i',\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

とおくと，ϵ_i' は標準正規分布に従い，互に独立であると同時に，(4. 19）とも独立になっている。したがって，

$$F=\frac{(\hat{\theta}_i-\theta_i)^2/\sigma^2(\hat{\theta}_i)}{Q_1{}^t[n_i-(k+1)]/(n_i-k-1)},\quad \text{自由度}\ 1,(n_i-k-1) \tag{4, 21}$$

を用いて，$\theta_i=E(x_i{}^0)$ の信頼区間を作ることができる。

なお，以上では「修正された」平均値は，母数 $\theta_i=E(x_i{}^0)$ を意味し，その推定子として（4. 18）の $\hat{\theta}_i$ を用いたが，（4. 16）（4. 17）を考え合わせると，$\boldsymbol{z}$ の値を $\boldsymbol{z}^0$ に指定しておいて，既に観測された n_i 個の標本値とは別に，新たに１つの観測を行ったときの，$x_i{}^0$ の予測値として同じ θ_i を用いてもよいことが分る。この予測値には，（4. 18）右辺２項の標本変動のほか，（4. 16）最終項の標本変動が加わるから，予測値の分散は（4. 20）へ σ^2 を加えたものになる。したがって，（4. 21）の分子として $(\hat{\theta}_i-\theta_i)^2/[\sigma^2(\hat{\theta}_i)+\sigma^2]$ を用いれば，$x_i{}^0$ の予測区間を作ることができる。これは母数に関する信頼区間とは違う点に注意する必要がある。予測区間について一元回帰の場合（$k=1$ の場合）の説明が Mood の本にある。[18]

θ_i の加重平均として，母数 θ を

$$\theta=\sum_{i=1}^{t}\frac{\theta_i}{\sigma^2(\hat{\theta}_i)}\bigg/\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{\sigma^2(\theta_i)}$$

で定義し，その推定子を

$$\hat{\theta}=\sum_{i=1}^{t}\frac{\hat{\theta}_i}{\sigma^2(\theta_i)}\bigg/\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{\sigma^2(\hat{\theta}_i)} \tag{4. 22}$$

とすると，帰無仮説

$$H:\ \theta_i=\theta,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

のもとでは，（4. 22）を用いて

(ハ)

修正された平均値の比較というのは，農学や生物学の実験で　よく使われる手法のようであるが，本論文の主題とも密接な関係があるので，ここに補論の意味で述べることにする。

第 i 級内の修正された平均値というのは，説明変数が与えられた値 $\boldsymbol{z}^0$ をとるときの，被説明変数の期待値のことである。通常は $\boldsymbol{z}^0$ を $\bar{\boldsymbol{z}}$ に等しくとるようであるが，ここでは一般に任意の一定値としておく。このときの被説明変数の値を x_i^0，その期待値を θ_i とすると，(3. 3) から

(4. 16)　$x_i^0=\alpha_i+\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{z}^{0T}+\epsilon_{ij},\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$

(4. 17)　$$\theta_i=E(x_i^0)=\alpha_i+\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{z}^{0T}$$
$$=(\alpha_i+\boldsymbol{\beta}_i\bar{\boldsymbol{z}}_i{}^T)-\boldsymbol{\beta}_i(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\boldsymbol{z}^0)^T,$$

となる。この第 1 項が「修正されない」平均値，第 2 項が修正項である。t 個の級についての $\theta_i(i=1,\ 2,\cdots,\ t)$ を比較することが，ここでの問題であるが，θ_i の推定子としては，

(4. 18)　$\hat{\theta}_i=\bar{x}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}}_i(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\boldsymbol{z}^0)^T$

を用いる。これは次に示すように，θ_i の不偏推定子で，右辺の 2 項は互に独立に分布すると同時に，(3. 27) 第 1 式の第 i 級組成分子

(4. 19)　$$Q_1{}^i[n_i-(k+1)]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_j(x_{ij}-\hat{\alpha}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{z}_{ij}{}^T)^2$$

とも独立になっている。

まず，(3. 27) の各式における第 i 級組成分子 $Q_1{}^i[n_i-(k+1)]$，$Q_2{}^i[k]$，$Q_3{}^i[1]$ が互に独立であることから，(4. 18) 右辺の 2 項および (4. 19) の 3 者の間の独立性が出る。次に，

$$Q_3{}^i[1]=\frac{n_i}{\sigma^2}(\bar{x}_i-\alpha_i-\boldsymbol{\beta}_i\bar{\boldsymbol{z}}_i{}^T)^2$$

から，$\bar{x}_i$ が母平均 $\alpha_i+\boldsymbol{\beta}_i\bar{\boldsymbol{z}}_i{}^T$，母分散 σ^2/n_i の正規分布に従うことを知る。最後に，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ は母平均 $\boldsymbol{\beta}_i$，共分散行列 $\sigma^2\boldsymbol{W}_i{}^{-1}$ の k 変量正規分布に従うから[16]，$(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\boldsymbol{\beta}_i)(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\boldsymbol{z}^0)^T$ は母平均 0，母分散 $\sigma^2(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\boldsymbol{z}^0)\boldsymbol{W}_i{}^{-1}\times(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\boldsymbol{z}^0)^T$ の正規分布に従う[17]。

(3. 58) 第3式は,

$$H_{35}:\quad E(\bar{x}_{(h)})=\kappa+\boldsymbol{\xi}\bar{z}_{(h)}{}^{T},\quad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l)$$

を検定するために用い得る。

(3. 79) 右辺第1項は,

$$\boldsymbol{\delta}_{G}-\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\tau},$$

とするとき,

$$H_{36}:\quad \tau^{(p)}=\tau^{(p)0},\quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\quad 0<r\leqq k)$$

(ただし, $h=1,\ 2,\ \cdots,\ l'$ に関する H_{33} および H_{35} の成立を前提して)

を検定するために使うことができる。

はじめの l' 個のグループについて H_{33} が成立し, 同時に $r=k$ とおいた H_{34}, H_{35} および $\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{0}$ とおいた H_{36} の合計4仮説が成立すれば,

$$H_{37}:\quad \gamma_{h}=\gamma_{G},\quad \boldsymbol{\delta}_{h}=\boldsymbol{\delta}_{G},\quad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$$

が採択される。しかし, この時の γ_G, $\boldsymbol{\delta}_G$ は H_{24} の γ, $\boldsymbol{\delta}$ と一致するとは限らない。それは, H_{37} では終りの l'' 個のグループが除外されているからである。もしグループ別において, 1個の級から成るグループが存在せず, $l=l'$, $l''=0$ であれば, γ_G, $\boldsymbol{\delta}_G$ は, H_{24} の γ, $\boldsymbol{\delta}$ と一致する。

検定の型と統計量の計算式を下に記す。

$r=k$ のときの H_{31}: $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\beta}$;

$$\sum_{i}{}_{(h)}\boldsymbol{w}_{i}(xz)\boldsymbol{W}_{i}^{-1}\boldsymbol{w}_{i}(xz)^{T}-\boldsymbol{w}_{(h)}(xz)\boldsymbol{W}^{-1}{}_{(h)}\boldsymbol{w}_{(h)}(xz)^{T},$$

$r=k$ のときの H_{32}: $\boldsymbol{\beta}_{(h)}=\boldsymbol{\beta}$;

$$\sum_{h=1}^{l}\boldsymbol{w}_{(h)}(xz)\boldsymbol{W}^{-1}{}_{(h)}\boldsymbol{w}_{(h)}(xz)^{T}-\boldsymbol{w}(xz)\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}(xz)^{T}$$

H_{33}; $B_{h}(x^{2})-\boldsymbol{b}_{h}(xz)\boldsymbol{B}_{h}{}^{-1}\boldsymbol{b}_{h}(xz)^{T}$,

$r=k$ のときの H_{34}: $\boldsymbol{\delta}_h=\boldsymbol{\delta}_G$;

$$\sum_{h=1}^{l'}\boldsymbol{b}_{h}(xz)\boldsymbol{B}_{h}{}^{-1}\boldsymbol{b}_{h}(xz)^{T}-\boldsymbol{u}(xz)\boldsymbol{U}^{-1}\boldsymbol{u}(xz),^{T},$$

H_{35}; $G(x^{2})-\boldsymbol{g}(xz)\boldsymbol{G}^{-1}\boldsymbol{g}(xz)^{T}$.

（ロ）

数個の級をグループにまとめるとき，第6表に示された変量のうちグループ分割に関するものを用いて，どのような検定を行い得るかは，一元回帰の場合の **II 2**（ハ）の叙述と多元回帰の場合の前節の説明を結合すれば，容易に推察できると思われる。それ故，ここでは多元回帰の場合には k 次元ベクトルの成分の一部分を取り出して検定するという新しい問題が起ることを注意するに止め，各種の帰無仮説とその検定に用いるべき変量との関係を列挙しておく。

(3. 76) 右辺第1項を用いれば，1つのグループ M_h だけについて $(h=1, 2, \cdots, l')$,

$$H_{31}:\quad \beta_i^{(p)}=\beta^{(p)},\quad i\epsilon M_h,\quad (p=1, 2, \cdots, r\,;\ 0<r\leqq k)$$

を検定することができる。これを2つ以上のグループについて，同時に行い得ることも見易い。(3. 77) 右辺第1項により，

$$H_{32}:\quad \beta_{(h)}^{(p)}=\beta^{(p)},\ (h=1, 2, \cdots, l', \cdots, l\,;\ \ p=1, 2, \cdots, r\,;\ 0<r\leqq k)$$

を検定することができる。もし，グループの全部ではなくて，その一部について H_{32} と同じ性質の仮説を検定したいならば，**II 1**（ハ）の最後に述べたように，問題とすべきグループを新たに集団としてまとめ，集団内でのグループ回帰の同一性を問う形にすればよい。

(3. 58) 第1式により，1つのグループ M_h について $(h=1, 2, \cdots, l')$,

$$H_{33}:\quad E(\bar{x}_i)=\gamma_h+\boldsymbol{\delta}_h\bar{z}_i{}^T,\quad i\epsilon M_h,$$

を検定することができる。

(3. 78) 右辺第1項により，$\delta_G\boldsymbol{U}=\sum_{h=1}^{l'}\delta_h\boldsymbol{B}_h$ とするとき，

$$H_{34}:\quad \delta_h{}^{(p)}=\delta_G{}^{(p)},\quad (h=1, 2,\cdots, l'\,;\ \ p=1, 2,\cdots, r\,;\ \ 0<r\leqq k)$$

（ただし，$h=1, 2,\cdots, l'$ に関して H_{33} の成立を前提して）

を検定することができる。この場合にも，l' 個のグループではなくて，その一部について H_{34} と同じ性質の仮説を検定する場合には，問題とすべきグループを新しく集団として考えればよい。

$$H_{30}:\quad \bar{\alpha}=\bar{\alpha}^0,\quad \beta^{(p)}=\beta^{(p)0},\quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\quad 0<r\leqq k)$$

（ただし，H_{22}'，H_{24}，$r=k$ とおいた H_{27} を前提して）

を検定したければ，$Q_{10}{}^r[r]^*$ と $Q_8[1]^*$ とを結合して使うことになる。

最後の2つの仮説 H_{29}, H_{30} について成立を予定した3仮説のうち，$r=k$ とした H_{27} として H_{27}' をとると，$H_{22}'\cdot H_{24}\cdot H_{27}'$ の3者の同時成立と H_{28} とが同等であったから，H_{29} および H_{30} は，t 個の全級を通じて一致した回帰平面の係数が指定された特定値をとるか否かの検定になる。

以上の各種の仮説検定では，一元回帰の場合と違って信頼区間または信頼領域の作り方については説明を省略した。それは一元回帰のときの説明から十分類推できるという事のほかに，F の分子の自由度が 3 または　それ以上になるときには信頼領域の計算が実用的でないからである。しかし多元回帰における重共分散分析でも，F の分子の自由度が1または2であれば，目的に応じて信頼区間または信頼領域を作れば，問題としている母数が零であるか否かの検定よりも多くの知識を得ることができる。

本節に示した仮説検定の実際計算に当っては，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ などを $\boldsymbol{w}_i(xz)$, $\boldsymbol{w}(xz)$, $\boldsymbol{b}(xz)$ で表わしておくのが便利である。この方法は，k 次元ベクトルで示されている母数の成分の一部分を検定しようとするときには使えないが，次に示す諸検定では使うことができる。セミコロンの前に記されているのが検定の型であり，その後に必要な統計量の計算式が記されている。

$r_i=k$ のときの H_{21} の特殊な場合：$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{0}$；

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{W}_i\hat{\boldsymbol{\beta}}_i{}^T=\boldsymbol{w}_i(xz)\boldsymbol{W}_i{}^{-1}\boldsymbol{w}_i(xz)^T,$$

$$H_{22}':\ \boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\beta};\ \sum_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{W}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}})^T=\sum_i\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{W}_i\hat{\boldsymbol{\beta}}_i{}^T-\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{\beta}}^T$$
$$=\sum_i\boldsymbol{w}_i(xz)\boldsymbol{W}_i{}^{-1}\boldsymbol{w}_i(xz)^T-\boldsymbol{w}(xz)\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}(xz)^T,$$

$r=k$ のときの H_{23} の特殊な場合：$\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{0}$；

$$\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{W}\hat{\boldsymbol{\beta}}^T=\boldsymbol{w}(xz)\boldsymbol{W}^{-1}\boldsymbol{w}(xz)^T,$$

$$H_{24};\ B(x^2)-\hat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{\delta}}^T=B(x^2)-\boldsymbol{b}(xz)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}(xz)^T.$$

$$\bar{\alpha}-\alpha_i=(\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\delta})(\bar{\mathbf{z}}_i-\bar{\mathbf{z}})^T=\boldsymbol{\Delta}^0(\bar{\mathbf{z}}_i-\bar{\mathbf{z}})^T$$

が出る。これを (4. 14) に代入して

$$\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}=(x_{ij}-\bar{x})+\boldsymbol{\Delta}^0(\bar{\mathbf{z}}_i-\bar{\mathbf{z}})^T-\boldsymbol{\beta}(\mathbf{z}_{ij}-\bar{\mathbf{z}})^T$$

となり，これに $(\mathbf{z}_{ij}-\bar{\mathbf{z}})$ を右から乗じて，i, j について総和し，(3. 4) (3. 5) を用いれば，

$$\boldsymbol{s}(\epsilon z)=\boldsymbol{s}(xz)+\boldsymbol{\Delta}^0\boldsymbol{B}-\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{S}.$$

したがって，(3. 46) 第1式により

$$\boldsymbol{\eta}=\boldsymbol{s}(xz)\boldsymbol{S}^{-1}+\boldsymbol{\Delta}^0\boldsymbol{B}\boldsymbol{S}^{-1}-\boldsymbol{\beta}$$

を得る。これを (3. 75) に代入し，その右辺第1項を $Q_{10}{}^r[r]^*$ とするとき，

$$H_{29}:\ \ \beta^{(p)}=\beta^{(p)0},\quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\quad 0<r\leqq k)$$

(ただし，H_{22}'，H_{24}，$r=k$ とした H_{27} を前提して)

を次のものによって検定し得る。

$$(4.\ 15)\qquad F=\frac{[Q_{10}{}^r[r]^* \text{へ} H_{29} \text{の指定する値を代入したもの}]/r}{\{Q_1[N-(k+1)t]+Q_4[k(t-1)]^*+Q_6[t-k-1]^*+Q_9[k]^{**}\}/(N-k-1)},\quad \text{自由度}\ \ r,\ (N-k-1)$$

ただし，$Q_9[k]^{**}$は，$r=k$ とおいた H_{27} で指示された値を，同じく $r=k$ とおいた $Q_9{}^r[r]^*$ へ代入したものである。

さきに $Q_8[k]$ を見たときには，H_{24} の成立だけを前提したが，今度は それに加えて H_{22}' および $r=k$ とした H_{27} も成立すると前提する。このとき(4. 13) 第3式から得られる $\bar{\epsilon}$ の値を (3. 29) 第3 式に代入して，

$$Q_8[1]^*=\frac{N}{\sigma^2}(\bar{x}-\bar{\alpha}-\boldsymbol{\beta}\bar{\mathbf{z}}^T)^2$$

となる。＊をつけたのは，上記の3仮説のもとでの値を意味する。これと (4. 15) の分母を用いて，$\bar{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\bar{\mathbf{z}}^T$ の信頼区間を求めることができる。

H_{29} では (4. 13) 第3式の常数項 $\bar{\alpha}$ が除外されているが，これを加えて，

であるが，まず，H_{22}' が成立しているから，（4. 5）において $\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\beta}$，（$i=1, 2, \cdots, t$）と書くことができる。両者のほか，さらに H_{27}' が成立すると仮定すれば，（3. 15）の $\boldsymbol{\Delta}$ の定義から $\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\delta}$ となり，（4. 5）を用いて　$\alpha_i=\gamma$，（$i=1, 2, \cdots, t$）が出る。このとき，常数項をも含めて（$k+1$）個の　すべての偏回帰係数が　t 個の全級を通じて同じ値になるから，全部の級にわたって回帰平面が完全に一致する。したがって，H_{22}'・H_{24}・H_{27}' の3者の同時成立と，1つの帰無仮説

$$H_{28}:\quad \alpha_i=\alpha,\quad \boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\beta},\quad (i=1, 2, \cdots, t)$$

とは同等であり，これを検定するために次のものを用いることができる。

$$F=\frac{\{Q_4[k(t-1)]^*+Q_6[t-k-1]^*+Q_9[k]^*\}/(k+1)(t-1)}{Q_1[N-(k+1)t]/\{N-(k+1)t\}},$$

自由度　$(k+1)(t-1)$，$\{N-(k+1)t\}$

ただし，

$$Q_9[k]^*=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\hat{\boldsymbol{\delta}})\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}\ \hat{\boldsymbol{\beta}}-\hat{\boldsymbol{\delta}})^T,$$

である。

$Q_{10}[k]$ については，H_{22}', H_{24}, $r=k$ とした H_{27} が成立するとき，

(4. 12)　$$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\beta}=\boldsymbol{\delta}+\boldsymbol{\Delta}^0$$

となり，（2. 37）で定義された $\bar{\alpha}$ を用いて（3. 3）から

(4. 13)　$$\begin{cases} x_{ij}=\alpha_i+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{z}_{ij}{}^T+\epsilon_{ij}, \\ \bar{x}_i=\alpha_i+\boldsymbol{\beta}\bar{\boldsymbol{z}}_i{}^T+\bar{\epsilon}_i, \\ \bar{x}=\bar{\alpha}+\boldsymbol{\beta}\bar{\boldsymbol{z}}^T+\bar{\epsilon}, \end{cases}$$

を得る。この第1式・第3式から

(4. 14)　$$\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}=(x_{ij}-\bar{x})-(\alpha_i-\bar{\alpha})-\boldsymbol{\beta}(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}})^T$$

が出る。さらに（4. 13）第2式・第3式の期待値の差をとれば，

$$E(\bar{x}_i)-E(\bar{x})=\alpha_i-\bar{\alpha}+\boldsymbol{\beta}(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\bar{\boldsymbol{z}})^T$$

同じ計算を H_{24}' として示された式で行えば，

$$E(\bar{x}_i)-E(\bar{x})=\boldsymbol{\delta}(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\bar{\boldsymbol{z}})^T$$

となり，ここに得た2式と（4. 12）から

$$Q_8[1]^* = \frac{N}{\sigma^2}(\bar{x} - \gamma - \boldsymbol{\delta}\bar{\boldsymbol{z}}^T)^2$$

が出るが，これと $Q_7{}^r[k]^*$ とを結合して

$$H_{26}:\ \gamma = \gamma^0,\quad \delta^{(p)} = \delta^{(p)0}\quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ r)$$

（ただし，H_{24} の成立を前提して）

を検定しようとするときには，$r=k$ で $\boldsymbol{\delta}$ の k 個の全成分の特定値が指定されていないと困る点が注目される。

$Q_9[k]$ については，上記のように，まず H_{22}' を前提して $\boldsymbol{\beta}$ なるものの存在を予定する。次に H_{24} の成立を前提して，(4. 1) (4. 10) を (3. 74) に代入すると，その右辺第1項は，

$$Q_9{}^r[r]^* = \frac{1}{\sigma^2}\{(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) - (\hat{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\delta})\}^{(r)}[(\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B})^{(r)}]\{(\hat{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{\beta}) - (\hat{\boldsymbol{\delta}} - \boldsymbol{\delta})\}^{(r)T}$$

となるから，(3. 15) で定義した $\boldsymbol{\beta}$ と $\boldsymbol{\delta}$ との喰い違いの程度を示す k 次元ベクトル $\boldsymbol{\varDelta}$ について，その初めの r 個の成分の特定値を指定した帰無仮説

$$H_{27}:\ \varDelta^{(p)} = \varDelta^{(p)0},\quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\ \ 0<r\leqq k)$$

（ただし，H_{22}' と H_{24} の成立を前提して）

を，

$$F = \frac{[Q_9{}^r[r]^* \text{ へ} H_{27} \text{ の指定する値を代入したもの}]/r}{\{Q_1[N-(k+1)t] + Q_4[k(t-1)]^* + Q_6[t-k-1]^*\}/\{N-2k-1\}},$$

自由度　$r,\ \{N-2k-1\}$

によって検定できる。たゞし，

$$Q_4[k(t-1)]^* = \frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i - \hat{\boldsymbol{\beta}})\boldsymbol{W}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i - \hat{\boldsymbol{\beta}})^T,\qquad \text{である。}$$

特に，H_{27} で指定された特定値が 0 で，しかも $r=k$ の場合を H_{27}' とする。

$$H_{27}':\ \boldsymbol{\varDelta} = \boldsymbol{0},\ \text{すなわち}\ \ \varDelta^{(q)} = 0,\quad (q=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

（ただし，H_{22}' と H_{24} の成立を前提して）

これを検定する場合には H_{22}' と H_{24} が成立していなければ無意味

たのであった。同じように　そこで（3. 45）を導き出したときには，$E(x_{ij})=\alpha_i+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{z}_{ij}{}^T$，換言すれば，$H_{22}'$ が前提されている。したがって，そこで得られた $Q_9[k]$ および $Q_{10}[k]$ を以下で利用する場合には，H_{22}' と H_{24} とが前提されていることに注意しなければならない。

このように，H_{24} のもとでは（4. 11）が成立しているから，H_{24} を前提したときの $Q_6[t-k-1]$ の値には＊をつけて区別すると，（3. 30）第1式から

$$Q_6[t-k-1]^*=\frac{1}{\sigma^2}[B(x^2)-\hat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{B}\hat{\delta}^T]$$

を得る。したがって，H_{24} を

$$F=\frac{Q_6[t-k-1]^*/(t-k-1)}{Q_1[N-(k+1)t]/\{N-(k+1)t\}},$$

$$\text{自由度}\quad t-k-1,\ \{N-(k+1)t\}$$

によって検定することができる。

$Q_7[k]$ についても，H_{24} が成立するときの値には＊をつけることにすると，（4. 10）を（3. 73）に代入すれば，右辺第1項は

$$Q_7{}^r[r]^*=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\delta}-\boldsymbol{\delta})^{(r)}[\boldsymbol{B}^{(r)}](\hat{\delta}-\boldsymbol{\delta})^{(r)T}$$

となる。したがって，H_{24} が成立するとき，$\boldsymbol{\delta}$ の　はじめの r 個の成分 $\delta^{(1)}$, $\delta^{(2)}$, …, $\delta^{(r)}$ が特定値 $\delta^{(1)0}$, $\delta^{(2)0}$, …, $\delta^{(r)0}$ に等しいという帰無仮説

$$H_{25}:\quad \delta^{(p)}=\delta^{(p)0},\quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\quad 0<r\leqq k)$$

（ただし，H_{24} の成立を前提して）

は，

$$F=\frac{[Q_7{}^r[r]^*\text{へ } H_{25}\text{ の指定する値を代入したもの}]/r}{\{Q_1[N-(k+1)t]+Q_6[t-k-1]^*\}/\{N-k(t+1)-1\}},$$

$$\text{自由度}\quad r,\ \{N-k(t+1)-1\}$$

によって検定できる。

$Q_8[1]$ については，H_{24} のもとでの値に＊をつけると，（3. 29）第3式と（4. 6）第2式から

である。(3. 3) から

$$\bar{x}_i=\alpha_i+\boldsymbol{\beta}_i\bar{\mathbf{z}}_i{}^T+\bar{\epsilon}_i$$

を得て，H_{24} のもとでは

(4. 5)　$E(\bar{x}_i)=\alpha_i+\boldsymbol{\beta}_i\bar{\mathbf{z}}_i{}^T=\gamma+\boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{z}}_i{}^T \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$

となるから，H_{24} は

$$H_{24}'\colon\ \bar{x}_i=\gamma+\boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{z}}_i{}^T+\bar{\epsilon}_i,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

と同等である。

このとき，

(4. 6)　$\begin{cases}\bar{\epsilon}_i=\bar{x}_i-\gamma-\boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{z}}_i{}^T,\\ \bar{\epsilon}=\bar{x}-\gamma-\boldsymbol{\delta}\bar{\mathbf{z}}^T,\end{cases}$

が出て，辺々相減ずると

(4. 7)　$\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon}=(\bar{x}_i-\bar{x})-\boldsymbol{\delta}(\bar{\mathbf{z}}_i-\bar{\mathbf{z}})^T$

を得る。これを二乗して n_i を掛け，i について総和して (3. 4) (3. 5) (3. 14) 第2式を用いると，

(4. 8)　$B(\epsilon^2)=\sum_i[(\bar{x}_i-\bar{x})-\boldsymbol{\delta}(\bar{\mathbf{z}}_i-\bar{\mathbf{z}})^T][(\bar{x}_i-\bar{x})-(\bar{\mathbf{z}}_i-\bar{\mathbf{z}})\boldsymbol{\delta}^T]$

$$=B(x^2)-\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{b}(xz)^T-\boldsymbol{b}(xz)\boldsymbol{\delta}^T+\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^T$$
$$=B(x^2)-\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{\delta}}^T-\hat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^T+\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^T.$$

次に (4. 7) の右から $n_i(\bar{\mathbf{z}}_i-\bar{\mathbf{z}})$ を乗じて，i について加え，同じような計算をすると，(3. 8) 第2式により，

(4. 9)　$\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}(\epsilon z)=\boldsymbol{b}(xz)-\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{B}=\hat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{B}-\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{B}$

から

(4. 10)　$\boldsymbol{\mu}=\hat{\boldsymbol{\delta}}-\boldsymbol{\delta}$

を得る。これを転置して (4. 9) の右から乗ずれば，

$$\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu}^T=\hat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{\delta}}^T-\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{\delta}}^T-\hat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^T+\boldsymbol{\delta}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\delta}^T$$

が出る。(4. 8) と辺々相減じて

(4. 11)　$B(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu}^T=B(x^2)-\hat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{B}\hat{\boldsymbol{\delta}}^T$

となる。この式は (3. 43) 第2項を計算したものに外ならないが，$\hat{\boldsymbol{\delta}}$ は母数 $\boldsymbol{\delta}$ が存在するときに　はじめて意味をもつから，**III 1** (イ) の最後の所で (3. 43) を用いたときには，実は H_{24} が前提されてい

$t=2$ のとき，ダッシュのつかない H_{22} を　さきの生産函数の例について言えば，基準・比較の両時点において，労働に関する偏回帰係数は不問にしておいて，流動資本および固定資本についての 2 つの偏回帰係数の同一性を問うことになる。一般的には，$t=2$ のとき，一元回帰の場合の H_6' に相当するものは，

$$H_{22}'':\quad \beta_1{}^{(p)}-\beta_2{}^{(p)}=d^{(p)0},\quad (p=1,\ 2,\ \cdots,\ r;\quad 0<r\leqq k),$$

であり，$k=3, r=2, d^{(p)0}=0$ とすれば，いまの具体例になる。ここで $d^{(p)0}$ と特定値を指定せずに，$d^{(p)}$ を未知数として扱えば，(4. 4) を用いて，一部の偏回帰係数の 2 時点間の差の信頼領域を求め得る。

$Q_5[k]$ については，(4. 1) を (3. 72) に代入するとき，

$$Q_5[k]=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})^{(r)}[\boldsymbol{W}^{(r)}](\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})^{(r)T}$$

$$+\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})[\boldsymbol{W}]_{(k-r)}(\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta})^T$$

となる。この式の右辺第 1 項を $Q_5{}^r[r]$ とおき，帰無仮説 H_{22} の母数に特定値 $\beta^{(p)0}$ を指定した

$$H_{23}:\quad \beta_i{}^{(p)}=\beta^{(p)0},\quad (i=1,2,\cdots,t;\quad p=1,2,\cdots,r;\quad 0<r\leqq k)$$

のもとでの値を＊をつけて示すと，H_{22} の採択された後では，

$$F=\frac{Q_5{}^r[r]^*/r}{\{Q_1[N-(k+1)t]+Q_4{}^r[r(t-1)]^*\}/\{N-(k+1)t+r(t-1)\}},\quad \text{自由度}\quad r,\ \{N-(k+1)t+r(t-1)\}$$

によって，H_{23} を検定できる。また，H_{22} の検定を経ずに直ちに H_{23} を問うならば，H_{23} は H_{21}' で $r_i=r$, $\beta_i{}^{(pi)0}=\beta^{(pi)0}$, $(i=1,\ 2,\cdots,\ t)$ とおいた場合であるから，(3. 70) と (3. 33) 第 3 式により，これを

$$F=\frac{\{Q_4{}^r[r(t-1)]^*+Q_5{}^r[r]^*\}/rt}{Q_1[N-(k+1)t]/\{N-(k+1)t\}},$$

$$\text{自由度}\quad rt,\ \{N-(k+1)t\}$$

で検定できることは当然である。

$Q_6[t-k-1]$ で検定できる帰無仮説は，(3. 13) で示される

$$H_{24}:\quad E(\bar{x}_i)=\gamma+\boldsymbol{\delta}\bar{\boldsymbol{z}}_i{}^T,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

最後の節で述べることにする。

第 i 級だけについて，常数項をも含めて すべての偏回帰係数を検定したいとき，および常数項と $\boldsymbol{\beta}_i$ の初めの r_i 個の成分を検定したいときには，$Q_3{}^i[1]+Q_2{}^i[k]$ の全部または一部（$Q_2{}^i[k]$ を（3. 69）で分離する）を用いればよい。

$Q_4[k(t-1)]$ については，（3. 9）（3. 10）（3. 11）（3. 24）から，

$$\boldsymbol{\lambda W}=\boldsymbol{w}(\epsilon z)=\sum_i \boldsymbol{w}_i(\epsilon z)=\sum_i \boldsymbol{w}_i(xz)-\sum_i \boldsymbol{\beta}_i \boldsymbol{W}_i=\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{W}-\sum_i \boldsymbol{\beta}_i \boldsymbol{W}_i$$

したがって，（3. 12）に定義された $\boldsymbol{\beta}$ を用いて，

（4. 1）　$\boldsymbol{\lambda}=\hat{\boldsymbol{\beta}}-\boldsymbol{\beta}$

が出る。これと（3. 25）から

（4. 2）　$\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}=(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}})-(\boldsymbol{\beta}_i-\boldsymbol{\beta})$

を得る。これを（3. 71）に代入したとき各項を

（4. 3）　$Q_4[k(t-1)]=Q_4{}^r[r(t-1)]+Q_4{}^{k-r}[(k-r)(t-1)]$

と書く。帰無仮説

H_{22}:　$\beta_i{}^{(p)}=\beta^{(p)}$,　$(i=1, 2, \cdots, t;\ \ p=1, 2, \cdots, r;\ \ 0<r\leqq k)$

が成立するときの（4. 3）右辺第1項を＊をつけて示すと，（4. 2）から

$$Q_4{}^r[r(t-1)]^*=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}})^{(r)}[\boldsymbol{W}_i{}^{(r)}](\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}})^{(r)T}$$

となって，σ^2 以外の母数を含まない。それ故，H_{22} を

（4. 4）　$$F=\frac{Q_4{}^r[r(t-1)]^*/r(t-1)}{Q_1[N-(k+1)t]/\{N-(k+1)t\}},$$

自由度　$r(t-1)$, $\{N-(k+1)t\}$

で検定できる。この検定の特色は，後述の H_{23} と異り，$\beta_i{}^{(p)}$ に共通の特定値を指定せずに，t 個の全級について それらが同一であるという関係だけを問う点にある。H_{22} で特に $r=k$ とおいた場合を H_{22}' とすると，$\boldsymbol{\beta}_i=\boldsymbol{\beta}$ $(i=1, 2, \cdots, t)$ となるから，（3. 3）を用いて，

H_{22}':　$E(x_{ij})=\alpha_i+\boldsymbol{\beta z}_{ij}{}^T$,　$(i=1, 2, \cdots, t;\ \ =1, 2, \cdots, n_i)$

と書ける。

まで　すべて観測された t 個の級全部を問題として取りあげる場合について考える。

$Q_2[kt]$ の第 i 級組成分子の一部，(3. 69) 右辺第1項を用いれば，次の帰無仮説を検定できる。このことは既に　よく知られている。

$$H_{21}:\ \beta_i^{(p)}=\beta_i^{(p)0},\ (p=1,\ 2,\ \cdots,\ r_i;\quad 0<r_i\leqq k)$$

$$F=\frac{[(3.\ 69)\ \text{第1項の}\ \beta_i^{(p)}\ \text{へ}\ H_{21}\ \text{の指定する値を代入したもの}]/r_i}{Q_1[N-(k+1)t]/[N-(k+1)t]},\ \text{自由度}\quad r_i,\ [N-(k+1)t]$$

ここに，$\beta_i^{(p)0}$ は $\beta_i^{(p)}$ の特定値を示す。各級毎に検定するときは，F の分母として $Q_1^i[n_i-k-1]/(n_i-k-1)$ を用い，自由度を r_i, (n_i-k-1) にする。

k 次元ベクトル $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\boldsymbol{\beta}_i$ の　はじめの r_i 個の成分から成る r_i 次元ベクトル $(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\boldsymbol{\beta}_i)^{(r_i)}$ だけを取り出したのは，$\boldsymbol{\beta}_i$ の k 個の全成分 $\beta_i^{(1)}$, $\beta_i^{(2)}$, $\cdots$, $\beta_i^{(k)}$ についての検定ではなく，その一部分だけを問題にしたいからである。経済学の例で言えば，流動資本・固定資本・労働の3個の説明変数 ($k=3$) を用いて，生産函数を計測するとき，これら3者の偏回帰係数を同時に検定するだけでなく，労働だけを不問にして，流動資本・固定資本2者の偏回帰係数を検定しようとするならば，偏回帰係数ベクトルの成分の一部を分離しなければならない。

(3. 70) 第1項を使えば，H_{21} を全級に拡大した，

$$H_{21}':\quad \beta_i^{(p_i)}=\beta_i^{(p_i)0},\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t;\quad p_i=1,\ 2,\ \cdots,\ r_i;\quad 0\leqq r_i\leqq k)$$

を検定できることは見易い。

(3. 27) 第3式の第 i 級組成分子，

$$Q_3^i[1]=\frac{n_i}{\sigma^2}(\bar{x}_i-\alpha_i-\boldsymbol{\beta}_i\bar{\boldsymbol{z}}_i^T)^2,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

を用いて，$\alpha_i+\boldsymbol{\beta}_i\bar{\boldsymbol{z}}_i$ に関する検定と区間推定を行うことができる。この $\alpha_i+\boldsymbol{\beta}_i\bar{\boldsymbol{z}}_i^T$ が第 i 級内の「修正されない」平均値であるのに対して説明変数 $\boldsymbol{z}$ の影響を除去した「修正された」平均値の比較については，

$(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$

次の式では，第1項は自由度 $r(l-1)$，第2項は自由度$(k-r)(l-1)$になる。

$$(3.\ 77)\qquad Q_4{}^M[k(l-1)]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{h=1}^{l}(\boldsymbol{\lambda}_{(h)}-\boldsymbol{\lambda})^{(r)}[\boldsymbol{W}_{(h)}{}^{(r)}](\boldsymbol{\lambda}_{(h)}-\boldsymbol{\lambda})^{(r)T}$$
$$+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{h=1}^{l}(\boldsymbol{\lambda}_{(h)}-\boldsymbol{\lambda})[\boldsymbol{W}_{(h)}]_{(k-r)}(\boldsymbol{\lambda}_{(h)}-\boldsymbol{\lambda})^T.$$

次の式では，第1項は自由度$r(l'-1)$，第2項は自由度$(k-r)(l'-1)$になる。

$$(3.\ 78)\qquad Q_4{}^G[k(l'-1)]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{h=1}^{l'}(\boldsymbol{\mu}_h-\boldsymbol{\rho})^{(r)}[\boldsymbol{B}_h{}^{(r)}](\boldsymbol{\mu}_h-\boldsymbol{\rho})^{(r)T}$$
$$+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{h=1}^{l'}(\boldsymbol{\mu}_h-\boldsymbol{\rho})[\boldsymbol{B}_h]_{(k-r)}(\boldsymbol{\mu}_h-\boldsymbol{\rho})^T.$$

次の式では，第1項は自由度 r，第2項は自由度 $k-r$ である。

$$(3.\ 79)\qquad Q_9{}^G[k]=\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\nu})^{(r)}[(\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{G})^{(r)}](\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\nu})^{(r)T}$$
$$+\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\nu})[(\boldsymbol{U}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{G})]_{(k-r)}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\nu})^T.$$

以上の分割は，第6表のように表の形で示すことはできないが，この種の分割を行い得ることは，多元回帰における重共分散分析法の著しい特色である。ある1個の級についての（3. 69）の関係式は既に知られているが，この種の分割は，第6表に現われる χ^2 変量のうち，自由度が k の倍数になっているもの　すべてに対して適用できることが分る。

2　多元回帰における推定と検定

（イ）

第6表に示された独立な χ^2 変量を用いての推定と検定の方法は，原理的には全く一元回帰の場合と同じである。したがって，後者から推察のつく事柄は　なるべく省略することにする。また，**II 2**（ハ）の　はじめに述べたと同じ理由により，以下では本論文の終りに至る

において，右辺第1項は自由度 $\sum_i r_i$，第2項は自由度 $kt-\sum_i r_i$ の χ^2 分布に従い，互に独立である。

$Q_4[k(t-1)]$ を同じように補助定理IIを用いて分割すると，

$$(3.\ 71)\qquad Q_4[k(t-1)]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})^{(r)}[\boldsymbol{W}_i{}^{(r)}](\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})^{(r)T}$$

$$+\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})[\boldsymbol{W}_i]_{(k-r)}(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})^T,$$

$$(0<r\leqq k)$$

この場合，t 個の $\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$ は（3. 34）の制約条件に従うから，（3. 71）右辺第1項の自由度は $r(t-1)$，第2項の自由度は $(k-r)(t-1)$ で，両者は互に独立な χ^2 変量となる。

以下，同じようにして，$0<r\leqq k$ のとき，次に記す4個の式の右辺第1項は自由度 r，第2項は自由度 $k-r$ の χ^2 分布に従い，両者は互に独立である。

$$(3.\ 72)\qquad Q_5[k]=\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\lambda}^{(r)}[\boldsymbol{W}^{(r)}]\boldsymbol{\lambda}^{(r)T}+\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\lambda}[\boldsymbol{W}]_{(k-r)}\boldsymbol{\lambda}^T,$$

$$(3.\ 73)\qquad Q_7[k]=\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\mu}^{(r)}[\boldsymbol{B}^{(r)}]\boldsymbol{\mu}^{(r)T}+\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\mu}[\boldsymbol{B}]_{(k-r)}\boldsymbol{\mu}^T,$$

$$(3.\ 74)\qquad Q_9[k]=\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})^{(r)}[(\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B})^{(r)}](\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})^{(r)T}$$

$$+\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})[(\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B})]_{(k-r)}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})^T,$$

$$(3.\ 75)\qquad Q_{10}[k]=\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\eta}^{(r)}[\boldsymbol{S}^{(r)}]\boldsymbol{\eta}^{(r)T}+\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\eta}[\boldsymbol{S}]_{(k-r)}\boldsymbol{\eta}^T$$

最後の式では，（3. 46）第1式を用いている。

次の式では，右辺第1項は自由度 $r(t_h-1)$，第2項は自由度 $(k-r)\times(t_h-1)$ になる。

$$(3.\ 76)\qquad Q_4{}^{(h)}[k(t_h-1)]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}{}_{(h)}(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_{(h)})^{(r)}[\boldsymbol{W}_i{}^{(r)}](\boldsymbol{\lambda}_i$$

$$-\boldsymbol{\lambda}_{(h)})^{(r)T}+\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}{}_{(h)}(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_{(h)})[\boldsymbol{W}_i]_{(k-r)}(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_{(h)})^T,$$

$$
= \left[\begin{array}{c|c} [A^{(r)}] & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right] + \left[\begin{array}{c|c} A_r-[A^{(r)}] & P^T \\ \hline P & A_{k-r} \end{array}\right]
$$

と書かれる。

以上の補助定理を用いて得られる結果を記す。(3. 27) 第2式の第 i 級の組成分子は, W_i が k 次の正値定符号行列であるから, 補助定理IIと, そこで定義された記号を用いて, $0\leqq r_i\leqq k$ を満す整数 r_i $(i=1, 2, \cdots, t)$ について, $W_i^{(0)}=0$ とするとき,

$$
(3.\ 69)\qquad Q_2^i[k]=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta}_i-\beta_i)W_i(\hat{\beta}_i-\beta_i)^T
$$

$$
=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta}_i-\beta_i)^{(r_i)}[W_i^{(r_i)}](\hat{\beta}_i-\beta_i)^{(r_i)T}
$$

$$
+\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta}_i-\beta_i)[W_i]_{(k-r_i)}(\hat{\beta}_i-\beta_i)^T
$$

と書くことができる。$[W_i^{(r_i)}]$, $[W]_{(k-r_i)}$ は それぞれ正値定符号および非負符号の行列で, その階数は r_i, $k-r_i$ であり, 階数の和は W_i の階数 k に等しい。したがって Cochran の定理により, (3. 69) 右辺の第1項は自由度 r_i の χ^2 分布, 第2項は自由度 $k-r_i$ の χ^2 分布に従い, しかも互に独立である。1 個の級 i についての (3. 69) の分割は既によく知られており, 別の形の証明が Wilks によって与えられ[14], これを重共分散分析に用いるときの考え方の解説が, 小宮氏の論文にある[15]。

(3. 69) を (3. 27) 第2式に代入すれば,

$$
(3.\ 70)\qquad Q_2[kt]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\hat{\beta}_i-\beta_i)^{(r_i)}[W_i^{(r_i)}](\hat{\beta}_i-\beta_i)^{(r_i)T}
$$

$$
+\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\hat{\beta}_i-\beta_i)[W_i]_{(k-r_i)}(\hat{\beta}_i-\beta_i)
$$

$$
(0\leqq r_i\leqq k)
$$

(3. 65)
$$\begin{array}{|c|}\hline P^T \\ \hline A_{k-r} \\ \hline \end{array}$$

の階数に等しい。(3. 62) の転置行列を作り，A_{k-r} の対称性に注意すると，

$$R^T A_{k-r} = P^T$$

となり，P^T の行ベクトルは，A_{k-r} の行ベクトルの一次結合として表わされる。したがって，(3. 65) の階数は A_{k-r} の階数 $k-r$ に等しい。これで D の階数が $k-r$ に等しいことが出た。同時に A_{k-r} が正値定符号であるから，D は非負符号の行列になる。(3. 61) を移項して (3. 59) を得る。(証明終)

この補助定理Ⅰから，直ちに次の補助定理Ⅱが出る。

〔補助定理Ⅱ〕 k 次の正値定形式 xAx^T は，補助定理Ⅰに定義した C_r, D を用いて，

(3. 66) $$xAx^T = x^{(r)}C_r^{-1}x^{(r)T} + xDx^T$$

の形に書ける。こゝに，C_r^{-1} は正値定符号行列，D は非負符号の行列で，その階数は それぞれ r, $k-r$ である。また，$x^{(r)}$ は x のはじめの r 個の成分から成る r 次元行ベクトルとする。

以下では，A と C_r^{-1} および D との関係，さらに，それらの階数を明かにするために，補助定理Ⅰ,Ⅱで用いられた行列を

(3. 67) $$C_r^{-1} = [A^{(r)}], \qquad D = D_{(k-r)} = [A]_{(k-r)}$$

と書く。後者は C_{k-r}^{-1} ではないから，ことさら $(k-r)$ を括弧外へ出した。この記号を用いれば，(3. 59) (3. 61) は

(3. 68) $$A = \begin{array}{|c|c|}\hline [A^{(r)}] & 0 \\ \hline 0 & 0 \\ \hline \end{array} + [A]_{(k-r)}$$

を成立させるような $(k-r)\times r$ 型の矩形行列 $\boldsymbol{R}$ が存在する。k 次，r 次，$k-r$ 次の単位行列を $\boldsymbol{I}_k$, $\boldsymbol{I}_r$, $\boldsymbol{I}_{k-r}$ と書くと，(3. 60) において

$$\boldsymbol{AC}=\boldsymbol{I}_k=\begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{I}_r & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{I}_{k-r} \\ \hline\end{array}$$

であるが，左辺の積を計算して，右辺の対応部分と比較すると，

(3. 63) $$\begin{cases} \boldsymbol{A}_r\boldsymbol{C}_r+\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{I}_r, \\ \boldsymbol{PC}_r+\boldsymbol{A}_{k-r}\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{0}, \end{cases}$$

が出る。この第２式から

$$\boldsymbol{A}_{k-r}\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{PC}_r$$

を得るが，$\boldsymbol{A}_{k-r}^{-1}$ が存在するから，これを左から乗じて，

$$\boldsymbol{Q}=-\boldsymbol{A}_{k-r}^{-1}\boldsymbol{PC}_r$$

が出る。これを (3. 63) 第１式に代入し，$\boldsymbol{C}_r^{-1}$ が存在するから，それを右から乗じて移項すれば，

$$\boldsymbol{A}_r-\boldsymbol{C}_r^{-1}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{A}_{k-r}^{-1}\boldsymbol{P}$$

が出る。こゝで (3. 62) を用いると，

$$\boldsymbol{A}_r-\boldsymbol{C}_r^{-1}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{R}$$

となり，(3. 62) と合わせると，

(3. 64) $$\begin{array}{|c|}\hline \boldsymbol{P}^T \\ \hline \boldsymbol{A}_{k-r} \\ \hline\end{array}\ \boldsymbol{R}=\begin{array}{|c|}\hline \boldsymbol{A}_r-\boldsymbol{C}_r^{-1} \\ \hline \boldsymbol{P} \\ \hline\end{array}$$

が出る。したがって，(3. 61) における $\boldsymbol{D}$ の　はじめの r 列の k 次元列ベクトルは，最後の $k-r$ 列の k 次元列ベクトルで表わされて，$\boldsymbol{D}$ の階数は，(3. 64) 左辺第１因子

$$(3.\ 59)\qquad \boldsymbol{A}=\begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{C}_r^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \hline \end{array}+\boldsymbol{D}$$

とすることができる。たゞし，$\boldsymbol{0}$ は　すべての要素が 0 から成る行列，$\boldsymbol{D}$ は非負符号の行列，$\boldsymbol{C}_r^{-1}$ は r 次行列で正値定符号になる。

（証明）$r=k$ ならば当然である。$0<r<k$ のとき，記号を次のように決める。

$$(3.\ 60)\qquad \boldsymbol{A}=\begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{A}_r & \boldsymbol{P}^T \\ \hline \boldsymbol{P} & \boldsymbol{A}_{k-r} \\ \hline \end{array},\qquad \boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}=\begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{C}_r & \boldsymbol{Q}^T \\ \hline \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{C}_{k-r} \\ \hline \end{array}$$

ここに，$\boldsymbol{A}_r$ は $\boldsymbol{A}$ のはじめの r 行 r 列から作った主座小行列，$\boldsymbol{A}_{k-r}$，$\boldsymbol{C}_{k-r}$ は，$\boldsymbol{A}$ および $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}^{-1}$ の最後の $k-r$ 行 $k-r$ 列から作った主座小行列で，$\boldsymbol{A}$ の対称性から $\boldsymbol{C}$ の対称性が出る。また，$\boldsymbol{A}$ は正値定符号であるから，その主座小行列 $\boldsymbol{A}_r$，$\boldsymbol{A}_{k-r}$ は共に正値定符号で，それらは逆行列をもつ。$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{C}$ も正値定符号で，$\boldsymbol{C}_r$，$\boldsymbol{C}_{k-r}$ の逆行列も存在し，$\boldsymbol{C}_r^{-1}$ は正値定符号である。$\boldsymbol{C}_r^{-1}$ を用いて次のような k 次の正方行列 $\boldsymbol{D}$ を作ると，これが階数 $k-r$ の非負符号の行列になることを証明できる。

$$(3.\ 61)\qquad \boldsymbol{D}=\begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{A}_r-\boldsymbol{C}_r^{-1} & \boldsymbol{P}^T \\ \hline \boldsymbol{P} & \boldsymbol{A}_{k-r} \\ \hline \end{array}=\boldsymbol{A}-\begin{array}{|c|c|}\hline \boldsymbol{C}_r^{-1} & \boldsymbol{0} \\ \hline \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} \\ \hline \end{array}$$

まず，$\boldsymbol{A}_{k-r}$ の $k-r$ 次元列ベクトル $k-r$ 個は一次独立であって，$\boldsymbol{P}$ の列ベクトルは　それらを用いて表わされるから，

$$(3.\ 62)\qquad \boldsymbol{A}_{k-r}\boldsymbol{R}=\boldsymbol{P}$$

最後の式の右辺第1項の総和を形成している各項のうち，$t_h=k+1$ のものについては，(3. 32) と同じように，その変量も自由度も 0 になるから，$t_h>k+1$ として総和しても，$t_h\geqq k+1$ として和をとっても同じである。その総和項の自由度は，

$$\sum_{h=1}^{l'}(t_h-k-1)=\sum_{h=1}^{l'+l''}(t_h-k-1)-\sum_{t_h=1}(t_h-k-1)$$
$$=t-(k+1)l+kl''=t-kl'-l$$

となる。これへ他の諸項の自由度を加えると，

$$(t-kl'-l)+k(l'-1)+(l-k-1)+k=t-k-1$$

となって左辺の自由度と一致する。

このようにして，多元回帰の場合の重共分散分析においても，第 3 表のような形の再分割が可能になる。たゞ，一元回帰のときの共分散分析とは，自由度が違っている点に注意する必要がある。以上に得られた結果をまとめて第 6 表に示してある。これは共分散分析の際の第 1 表および第 3 表を結合したものに対応している。

(ハ)

以上に述べたことは，原理的には一元回帰の場合と全く同じである。たゞ自由度が違う点と，ベクトル記号の扱い方のために説明を繰り返す必要があったに過ぎない。しかし，以下では一元回帰の共分散分析の際には問題にならなかったが，多元回帰の重共分散分析においてはじめて問題となる点を取り扱う。

第 6 表に現われている χ^2 変量は，$Q[N]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j\epsilon_{ij}{}^2$ を Cochran の定理によって分割したものであるから，いずれも正値二次形式変量である。これを今までとは別の方針で，さらに分割するために，次の 2 つの補助定理を証明しておく。

〔補助定理 I〕 k 次の正値定符号行列 $\boldsymbol{A}$ において，その逆行列 $\boldsymbol{A}^{-1}$ の，はじめの r 個 $(0<r\leqq k)$ の行と列とから成る主座小行列を $\boldsymbol{C}_r$ とするとき，階数 $k-r$ の k 次正方行列 $\boldsymbol{D}$ を用いて，

$$
\left\{
\begin{aligned}
&=\frac{1}{\sigma^2}[G(\epsilon^2)-\boldsymbol{\nu G \nu}^T],\\
&Q_9{}^G[k]=\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\nu})\ \boldsymbol{UB}^{-1}\boldsymbol{G}\ (\boldsymbol{\rho}-\boldsymbol{\nu})^T,\\
&Q_6[t-k-1]=\sum_{h=1}^{l'} Q_6{}^{(h)}[t_h-k-1]+Q_4{}^G[k(l'-1)]\\
&\quad +Q_6{}^G[l-k-1]+Q_9{}^G[k].
\end{aligned}
\right.
$$

第６表　ϵ に関する重共分散分析表

<table>
<tr><td colspan="3">$Q_1[N-(k+1)t]=\frac{1}{\sigma^2}[W(\epsilon^2)-\sum_i \boldsymbol{\lambda}_i \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\lambda}_i{}^T]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j(x_{ij}-\hat{\alpha}_i-\hat{\beta}_i z_{ij}{}^T)^2$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$Q_2[kt]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i \boldsymbol{\lambda}_i \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\lambda}_i{}^T$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\boldsymbol{\beta}_i)$
$\times \boldsymbol{W}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\boldsymbol{\beta}_i)^T$</td><td rowspan="2">$Q_4[k(t-1)]$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})$
$\times \boldsymbol{W}_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})^T$
$=\frac{1}{\sigma^2}[\sum_i \boldsymbol{\lambda}_i \boldsymbol{W}_i \boldsymbol{\lambda}_i{}^T$
$-\boldsymbol{\lambda W \lambda}^T]$</td><td>$\left.\begin{array}{l}Q_4{}^{(1)}[k(t_1-1)]\\ \vdots\\ Q_4{}^{(h)}[k(t_h-1)]\\ \vdots\\ Q_4{}^{(l')}[k(t_{l'}-1)]\end{array}\right\}$ 自由度 $k(t-l)$</td></tr>
<tr><td>$Q_4{}^M[k(l-1)]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Q_6[t-k-1]$
$=\frac{1}{\sigma^2}[B(\epsilon^2)$
$-\boldsymbol{\mu B \mu}^T]$</td><td>$\left.\begin{array}{l}Q_6{}^{(1)}[t_1-k-1]\\ \vdots\\ Q_6{}^{(h)}[t_h-k-1]\\ \vdots\\ Q_6{}^{(l')}[t_{l'}-k-1]\end{array}\right\}$ 自由度 $t-l-kl'$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$Q_3[t]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i{}^{-}{}_i{}^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}[B(\epsilon^2)+N\bar{\epsilon}^2]$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i(\bar{x}_i-\alpha_i$
$-\boldsymbol{\beta}_i\bar{z}_i)^2$</td><td>$\left.\begin{array}{l}Q_4{}^G[k(l'-1)]\\ \vdots\\ Q_6{}^G[l-k-1]\\ \vdots\\ Q_9{}^G[k]\end{array}\right\}$ 自由度 $l+kl'-k-1$</td></tr>
<tr><td>$Q_5[k]=\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\lambda W \lambda}^T$
$Q_7[k]=\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\mu B \mu}^T$</td><td>$Q_9[k]=\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})\ \boldsymbol{WS}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})^T$
$Q_{10}[k]=\frac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{s}(\epsilon z)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{s}(\epsilon z)^T$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Q_8[1]=\frac{N\bar{\epsilon}^2}{\sigma^2}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$Q[N]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j \epsilon_{ij}{}^2=\frac{1}{\sigma^2}[W(\epsilon^2)+B(\epsilon^2)+N\ {}^2]=\frac{1}{\sigma^2}[S(\epsilon^2)+N\bar{\epsilon}^2]$</td></tr>
</table>

(3. 57) 第3式右辺第1項は，はじめの l' 個のグループについての合計になっている。この総和項の自由度は，$t_h=1$ のとき　ちょうど $t_h-1=0$ になるから，

$$k\sum_{h=1}^{l'}(t_h-1)=k\sum_{h=1}^{l'+l''}(t_h-1)=k(t-l)$$

となる。

次に $Q_6[t-k-1]$ の再分割に移る。(3. 30) 第1式を

$$Q_6[t-k-1]=\frac{1}{\sigma^2}[B(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu B\mu^T}]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}[\sum_{h=1}^{l'}B_h(\epsilon^2)+G(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu B\mu^T}]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{h=1}^{l'}[B_h(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu_h B_h\mu_h{}^T}]$$

$$+\frac{1}{\sigma^2}[\sum_{h=1}^{l'}\boldsymbol{\mu_h B_h\mu_h{}^T}-\boldsymbol{\rho U\rho^T}]+\frac{1}{\sigma^2}[G(\epsilon^2)-\boldsymbol{\nu G\nu^T}]$$

$$+\frac{1}{\sigma^2}[\boldsymbol{\rho U\rho^T}+\boldsymbol{\nu G\nu^T}-\boldsymbol{\mu B\mu^T}]$$

と書きなおせば，$Q_6[t-k-1]$ が次のような形の互に独立な χ^2 変量に分割されることが分る。この第1式は，(3. 29) 第1式および (3. 30) 第1式をグループ $M_h(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$ について考えたものに外ならない。

$$\left\{\begin{aligned}
&Q_6{}^{(h)}[t_h-k-1]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i{}_{(h)}n_i[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon}_{(h)})-\boldsymbol{\mu_h}(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\bar{\boldsymbol{z}}_{(h)})^T]^2\\
&\qquad=\frac{1}{\sigma^2}[B_h(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu_h B_h\mu_h{}^T}],\ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')\\
&Q_4{}^G[k(l'-1)]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{h=1}^{l'}(\boldsymbol{\mu_h}-\boldsymbol{\rho})\boldsymbol{B_h}(\boldsymbol{\mu_h}-\boldsymbol{\rho})^T\\
&\qquad=\frac{1}{\sigma^2}[\sum_{h=1}^{l'}\boldsymbol{\mu_h B_h\mu_h{}^T}-\boldsymbol{\rho U\rho^T}],\\
&Q_6{}^G[l-k-1]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_h N_h[(\bar{\epsilon}_{(h)}-\bar{\epsilon})-\boldsymbol{\nu}(\bar{\boldsymbol{z}}_{(h)}-\bar{\boldsymbol{z}})^T]^2
\end{aligned}\right.\tag{3. 58}$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\nu G}=\boldsymbol{g}(\epsilon z), \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_{(h)}\boldsymbol{W}_{(h)}=\boldsymbol{w}_{(h)}(xz), \ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l) \\ \hat{\boldsymbol{\beta}}\sum_{h=1}^{l}\boldsymbol{W}_{(h)}=\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{W}=\sum_{h=1}^{l}\boldsymbol{w}_{(h)}(xz)=\boldsymbol{w}(xz). \end{cases}$$

$$(3.\ 54)\qquad \begin{cases} E(\bar{x}_i)=\gamma_h+\boldsymbol{\delta}_h\bar{z}_i^T, \ (i\epsilon M_h)\ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l') \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}_h\boldsymbol{B}_h=\boldsymbol{b}_h(xz), \ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l') \end{cases}$$

次の２式は，$\boldsymbol{\delta}$ および $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ の定義式である。

$$(3.\ 55)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{\delta}\sum_{h=1}^{l'}\boldsymbol{B}_h=\sum_{h=1}^{l'}\boldsymbol{\delta}_h\boldsymbol{B}_h, \\ \hat{\boldsymbol{\delta}}\sum_{h=1}^{l'}\boldsymbol{B}_h=\sum_{h=1}^{l'}\hat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{B}_h. \end{cases}$$

$$(3.\ 56)\qquad \begin{cases} E(\bar{x}_{(h)})=\kappa+\boldsymbol{\xi}\bar{z}_{(h)}^T, \ (h=1,\ 2, \cdots,\ l',\ \cdots,\ l) \\ \hat{\boldsymbol{\xi}}\boldsymbol{G}=\boldsymbol{g}(xz), \\ \boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\xi}=\boldsymbol{\tau}. \end{cases}$$

これだけの記号を定義して，$Q_4[k(t-1)]$ の再分割に進む。Cochran の定理を使う際の叙述は既に何回も繰り返したから，こゝでは詳細は略して筋道だけを示す。

$$\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}=(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_{(h)})+(\boldsymbol{\lambda}_{(h)}-\boldsymbol{\lambda})$$

と変形して，（3. 33）第１式に代入し

$$\sum_i{}_{(h)}(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_{(h)})\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{w}_{(h)}(\epsilon z)-\boldsymbol{w}_{(h)}(\epsilon z)=\boldsymbol{0},$$

$$\sum_i{}_{(h)}\boldsymbol{W}_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_{(h)})^T=\boldsymbol{0},$$

と（1. 32）を用いると，$Q_4[k(t-1)]$ が次のように互に独立な χ^2 変量に分割される。

$$(3.\ 57)\qquad \begin{cases} Q_4{}^{(h)}[k(t_h-1)]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i{}_{(h)}(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_{(h)})\ \boldsymbol{W}_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_{(h)})^T, \\ Q_4{}^M[k(l-1)]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_{h=1}^{l}(\boldsymbol{\lambda}_{(h)}-\boldsymbol{\lambda})\ \boldsymbol{W}_{(h)}(\boldsymbol{\lambda}_{(h)}-\boldsymbol{\lambda})^T, \\ Q_4[k(t-1)]=\sum_{h=1}^{l'}Q_4{}^{(h)}[k(t_h-1)]+Q_4{}^M[k(l-1)]. \end{cases}$$

最後の l'' 個のグループについては，$t_h=1$，$\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}_{(h)}=\boldsymbol{0}$ であるから，

B を定義する。たとえば,

$$U(x^2)=\sum_{h=1}^{l'} B_h(x^2)=\sum_{h=1}^{l'}\sum_{i}{}_{(h)} n_i(\bar{x}_i-\bar{x}_{(h)})^2.$$

なお，最後の l'' 個のグループでは，$t_h=1$ であるから，$\boldsymbol{B}_h$, $B_h(x^2)$, $B_h(\epsilon^2)$ は すべて 0 となり，これらは はじめの l' 個のグループについてだけ考えればよい。さらに，(3, 50) に現われる行列は，すべて階数 k であると前提する。

次の 2 式は，ϵz, xz について同じような記号であるため，括弧をつけて ϵz, xz を記すべき所を略してある。

$$(3\cdot 51)\quad \begin{cases} \boldsymbol{w}_{(h)}=\sum_{i}{}_{(h)}\boldsymbol{w}_i, \ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l) \\ \boldsymbol{w}=\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{w}_i=\sum_{h=1}^{l}\boldsymbol{w}_{(h)}. \end{cases}$$

$$(3.\ 52)\quad \begin{cases} \boldsymbol{b}_h(\epsilon z)=\sum_{i}{}_{(h)} n_i'(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon}_{(h)})(\bar{z}_i-\bar{z}_{(h)}), \ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l') \\ \boldsymbol{u}(\epsilon z)=\sum_{h=1}^{l'}\boldsymbol{b}_h(\epsilon z), \\ \boldsymbol{g}(\epsilon z)=\sum_{h=1}^{l} N_h(\bar{\epsilon}_{(h)}-\bar{\epsilon})(\bar{z}_{(h)}-\bar{z}), \\ \boldsymbol{b}(\epsilon z)=\boldsymbol{u}(\epsilon z)+\boldsymbol{g}(\epsilon z), \\ \boldsymbol{s}_h(\epsilon z)=\boldsymbol{w}_{(h)}(\epsilon z)+\boldsymbol{b}_h(\epsilon z), \ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l) \\ \boldsymbol{s}(\epsilon z)=\boldsymbol{w}(\epsilon z)+\boldsymbol{b}(\epsilon z)=\sum_{h=1}^{l}\boldsymbol{s}_h(\epsilon z)+\boldsymbol{g}(\epsilon z). \end{cases}$$

最後から 2 番目の式で，終りの l'' 個のグループに対して $\boldsymbol{b}(\epsilon z)=0$ となることは，さきと同じ。(3. 52) の各式に現われる ϵ を，x と書きなおしたもので，$\boldsymbol{b}_h(xz)$, $\boldsymbol{u}(xz)$, $\boldsymbol{g}(xz)$,……を定義する。

$$(3.\ 53)\quad \begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_{(h)}\boldsymbol{W}_{(h)}=\boldsymbol{\lambda}_{(h)}\sum_{i}{}_{(h)}\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{w}_{(h)}(\epsilon z)=\sum_{i}{}_{(h)}\boldsymbol{w}_{(h)}(\epsilon z), \\ \qquad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l) \\ \boldsymbol{\lambda}\sum_{h=1}^{l}\boldsymbol{W}_{(h)}=\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{W}=\sum_{h=1}^{l}\boldsymbol{w}_{(h)}(\epsilon z)=\boldsymbol{w}(\epsilon z), \\ \boldsymbol{\mu}_h\boldsymbol{B}_h=\boldsymbol{b}_h(\epsilon z), \ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l') \\ \boldsymbol{\rho}\boldsymbol{U}=\boldsymbol{\rho}\sum_{h=1}^{l'}\boldsymbol{B}_h=\boldsymbol{u}(\epsilon z)=\sum_{h=1}^{l'}\boldsymbol{b}_h(\epsilon z), \end{cases}$$

のグループに集め，級を1個しか含まぬものは，終りの l'' 個 ($l=l'+l''$)のグループとした。しかし今度は説明変数が k 個になるので，グループ内の級平均値回帰を考えるためには，1つのグループ内に少くとも $k+1$ 個の級が含まれていないと困る。そこで級を $k+1$ 個またはそれ以上含むグループを　はじめの l' 個のグループとして集め，あとに残る l'' 個のグループは，今までの1つの級を　そのまゝ1つのグループとして認めたものであるとする。これで，t 個の級が $l'+l''=l$ 個のグループに分れたことになる。

次のように記号を決める。こゝで新しく定義されたもの以外は原則として省略してあるが，若干のものは新しく現われたものとの関係を示すために再記してある。グループを示す添字 h についての総和では，その上端が l' であるか，l であるかについて特に注意する必要がある。以下では，l' までの和は常に上端を記すが，l までの和では　これを省略することがある。

$$
(3.\ 50)\quad
\begin{cases}
\boldsymbol{W}_{(h)}=\sum_{i}{}_{(h)}\boldsymbol{W}_i,\ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l)\\[2mm]
\boldsymbol{W}=\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{W}_i=\sum_{h=1}^{l}\sum_{i}{}_{(h)}\boldsymbol{W}_i=\sum_{h=1}^{l}\boldsymbol{W}_{(h)},\\[2mm]
\overline{\mathbf{z}}_{(h)}=\dfrac{1}{N_h}\sum_{i}{}_{(h)}n_i\overline{\mathbf{z}}_i,\\[2mm]
\overline{\mathbf{z}}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{t}n_i\overline{\mathbf{z}}_i=\dfrac{1}{N}\sum_{h}N_h\overline{\mathbf{z}}_{(h)},\\[2mm]
\boldsymbol{B}_h=\sum_{i}{}_{(h)}n_i(\overline{\mathbf{z}}_i-\overline{\mathbf{z}}_{(h)})^T(\overline{\mathbf{z}}_i-\overline{\mathbf{z}}_{(h)}),\ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')\\[2mm]
\boldsymbol{U}=\sum_{h=1}^{l'}\boldsymbol{B}_h,\\[2mm]
\boldsymbol{G}=\sum_{h=1}^{l}N_h(\overline{\mathbf{z}}_{(h)}-\overline{\mathbf{z}})^T(\overline{\mathbf{z}}_{(h)}-\overline{\mathbf{z}}),\\[2mm]
\boldsymbol{B}=\sum_{i=1}^{t}n_i(\overline{\mathbf{z}}_i-\overline{\mathbf{z}})^T(\overline{\mathbf{z}}_i-\overline{\mathbf{z}})=\boldsymbol{U}+\boldsymbol{G}.
\end{cases}
$$

以上のゴチック大文字を通常文字大文字にしたものに括弧をつけて　その内部に ϵ^2, x^2 を記し，ϵ, x に関する同性質の函数 W_h, B_h, U, G,

$$(3.\ 46)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{\eta}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}(\epsilon z), \\ \hat{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{S}=\boldsymbol{s}(xz), \end{cases}$$

を考えると,

$$(3.\ 47)\qquad S(\epsilon^2)-\boldsymbol{s}(\epsilon z)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{s}(\epsilon z)^T=S(\epsilon^2)-\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\eta}^T$$

は, (3. 44) の N 個の観測値に対して, 最小二乗法によって $\hat{\alpha}+\hat{\boldsymbol{\eta}}\boldsymbol{z}_{ij}{}^T$ (たゞし $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ は (3. 46) 第2式で与えられ, $\hat{\alpha}=\bar{x}-\hat{\boldsymbol{\eta}}\bar{\boldsymbol{z}}^T$) を あてはめたときの推定誤差平方和で,

$$(3.\ 48)\qquad S(\epsilon^2)-\boldsymbol{\eta}\boldsymbol{S}\boldsymbol{\eta}^T=\sum_i\sum_j[(x_{ij}-\bar{x})-\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}})^T]^2$$

となる。この式は,

$$(3.\ 49)\qquad \begin{aligned} &\sum_i\sum_j[(x_{ij}-\bar{x})-\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}})^T]^2 \\ &=\sum_i\sum_j[\{(x_{ij}-\bar{x}_i)-\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T\}+\{(\bar{x}_i-\bar{x})-\hat{\boldsymbol{\eta}}(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\bar{\boldsymbol{z}})^T\}]^2 \\ &=\sum_i\sum_j[(x_{ij}-\bar{x}_i)-\hat{\boldsymbol{\eta}}(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2 \\ &\qquad\qquad +\sum n_i[(\bar{x}_i-\bar{x})-\hat{\boldsymbol{\eta}}(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\bar{\boldsymbol{z}})^T]^2 \end{aligned}$$

と変形できるから, (3. 47) (3. 48) (3. 49) を (3. 43) (3. 45) と比較し, $\hat{\boldsymbol{\eta}}$ が後者における $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{y}$ に相当していることを考えれば,

$$S(\epsilon^2)-\boldsymbol{s}(\epsilon z)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{s}(\epsilon z)^T\geqq[B(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu}^T]+[W(\epsilon^2)-\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\lambda}^T]$$

が出て, (3. 41) が証明された。

以上を表の形にまとめると, 一元回帰の場合の第1表に対応するものができる。これは後に示す第6表の一部になっている。$t=1$ の場合には, 第6表の Q_4, Q_6, Q_7, Q_9 が すべて0となり, よく知られた多元回帰の共分散分析表になる。

(ロ)

一元回帰の場合と同じように, 数個の級をグループにまとめるとき, 前節 (イ) で述べた $Q_4[k(t-1)]$ と $Q_6[t-k-1]$ とを, さらに分割することができる。グループ別の方針は, **II 1** (ハ) で用いた第1のグループ別と同じとする。それは, t 個の級全部を問題として取りあげて, それをグループに分ける場合であった。そこでは, l 個のグループのうち, 級を2個または それ以上含むものは, はじめの l' 個

に対して，$k+1$ 次元空間内の平面 $\hat{\alpha}_i+\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{z}_{ij}^T$ を最小二乗法によってあてはめたときの推定誤差平方和になっており，α_i, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ の値は（3. 10）によって与えられる。任意の k 次元ベクトルを $\boldsymbol{x}_i$ とするとき，最小二乗法の性質により，（3. 42）について

$$w_i(\epsilon^2)-\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\lambda}_i^T\leqq\Sigma[(x_{ij}-\bar{x}_i)-\boldsymbol{x}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\boldsymbol{z}_i)^T]^2$$

が成立している。

これと同じように，

$$(\bar{x}_1,\ \bar{\boldsymbol{z}}_1),\ (\bar{x}_2,\ \bar{\boldsymbol{z}}_2),\ \cdots,\ (\bar{x}_t,\ \bar{\boldsymbol{z}}_t)$$

の各点に対して，ウエイト n_1, n_2, $\cdot$,n_t を与えて最小二乗法により $\hat{\gamma}+\hat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{z}_i^T(\hat{\gamma}$, $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ の値は（3. 14）で示される）を　あてはめたときの推定誤差平方和が，次の式の第1項・第2項であり，任意の k 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ に対して，次の関係式が成立している。

（3. 43）
$$B(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{B}\boldsymbol{\mu}^T=\sum_i n_i[(\bar{x}_i-\bar{x})-\hat{\boldsymbol{\delta}}(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\bar{\boldsymbol{z}})^T]^2$$
$$\leqq\sum_i n_i[(\bar{x}_i-\bar{x})-\boldsymbol{x}(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\bar{\boldsymbol{z}})^T]^2.$$

また，

（3. 44）
$$\begin{aligned}&(x_{11},\ \boldsymbol{z}_{11}),\ (x_{12},\ \boldsymbol{z}_{21}),\ \cdots,\ (x_{1n_1},\ \boldsymbol{z}_{1n_1}),\\&(x_{21},\ \boldsymbol{z}_{21}),\ \cdot\cdot,\ (x_{2n_1},\ \boldsymbol{z}_{2n_1}),\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\\&(x_{t1},\ \boldsymbol{z}_{t1}),\ \cdots,\ (x_{tn_t},\ \boldsymbol{z}_{tn_t}).\end{aligned}$$

なる N 個の観測値に対して，同じく最小二乗法で，$\hat{\alpha}_i'+\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{z}_{ij}^T$（たゞし $\hat{\boldsymbol{\beta}}$ の値は（3. 11）で与えられ，$\hat{\alpha}_i'=\bar{x}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}}\bar{\boldsymbol{z}}_i^T$. このとき，常数値 α_i' は各級毎に異なるが，$\boldsymbol{\beta}$ は全級を通じて同じであることに注意していたゞきたい）を　あてはめたときの推定誤差平方和は，次の式の第1項・第2項で示され，任意の k 次元ベクトル $\boldsymbol{y}$ に対して，次の関係式が成立している。

（3. 45）
$$W(\epsilon^2)-\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\lambda}^T=\sum_i[w_i(\epsilon^2)-\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\lambda}^T]$$
$$=\sum_i\sum_j[(x_{ij}-\bar{x}_i)-\hat{\boldsymbol{\beta}}(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2$$
$$\leqq\sum_i\sum_j[(x_{ij}-\bar{x}_i)-\boldsymbol{y}(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2.$$

最後に，

$$\boldsymbol{s}(\epsilon z)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{s}(\epsilon z)=(\boldsymbol{w}(\epsilon z)+\boldsymbol{b}(\epsilon z))\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{w}(\epsilon z)+\boldsymbol{b}(\epsilon z))^T$$
$$=(\boldsymbol{\lambda W}+\boldsymbol{\mu B})\boldsymbol{S}^{-1}(\boldsymbol{\lambda W}+\boldsymbol{\mu B})^T$$
$$=\boldsymbol{\lambda W S^{-1} W \lambda}^T+\boldsymbol{\mu B S^{-1} W \lambda}^T+\boldsymbol{\lambda W S^{-1} B \mu}^T+\boldsymbol{\mu B S^{-1} B \mu}^T$$

が出るから，この式と（3. 39）とを辺々相加え，（3. 4）最終式を用いることにより，

$$Q_9[k]+Q_{10}[k]=\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{\lambda W S^{-1} B \lambda}^T+\boldsymbol{\mu B S^{-1} W \mu}^T$$
$$+\boldsymbol{\lambda W S^{-1} W \lambda}^T+\boldsymbol{\mu B S^{-1} B \mu}^T)$$
$$=\frac{1}{\sigma^2}[\boldsymbol{\lambda W S}^{-1}(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{W})\boldsymbol{\lambda}^T+\boldsymbol{\mu B S}^{-1}(\boldsymbol{W}+\boldsymbol{B})\boldsymbol{\mu}^T]$$
$$=\frac{1}{\sigma^2}(\boldsymbol{\lambda W \lambda}^T+\boldsymbol{\mu B \mu}^T)$$

が出る。これと（3. 38）とを比較して，所要の

$$Q_5[k]+Q_7[k]=Q_9[k]+Q_{10}[k] \tag{3. 40}$$

を得た。

残された一点，すなわち，（3. 35）第3式の $Q_9[k]$ が正値定形式であることを示すには，（3. 40）において，

$$Q_5[k]+Q_7[k]\geqq Q_{10}[k]$$

であることを言えばよい。以下では，この式の両辺に σ^2 を乗じたものを，

$$W(\epsilon^2)+B(\epsilon^2)=S(\epsilon^2)$$

から辺々相減じて得る次の式を証明する。

$$[W(\epsilon^2)-\boldsymbol{\lambda W \lambda}^T]+[B(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu B \mu}^T] \tag{3. 41}$$
$$\leqq S(\epsilon^2)-\boldsymbol{s}(\epsilon z)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{s}(\epsilon z)^T.$$

そのための準備として，（3. 22）第1式および（3. 27）第1式を見ると，その第 i 級組成分子の σ^2 倍は，（3. 26）によって

$$\sigma^2 Q_1{}^i[n_i-(k+1)]=w_i(\epsilon^2)-\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\lambda}_i{}^T \tag{3. 42}$$
$$=\sum_j[(x_{ij}-\bar{x}_i)-\hat{\boldsymbol{\beta}}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)]^2$$

で，これは

$$(x_{i1},\ \boldsymbol{z}_{i1}),\ (x_{i2},\ \boldsymbol{z}_{i2}),\ \cdots\cdots,\ (x_{in_i},\ \boldsymbol{z}_{in_i})$$

$$xSx^T=\sum_i\sum_j x(z_{ij}-\bar{z})^T(z_{ij}-\bar{z})x^T=\sum_i\sum_j[x(z_{ij}-\bar{z})^T]^2$$

を得て，S の階数と次数の等しいことが前提されているから，この二次形式は正値定形式になり，したがって $xS^{-1}x^T$ なる二次形式も正値定形式になる。x として $s(\epsilon z)$ を考えれば，(3. 35) 第2式の $Q_{10}[k]$ が正値定形式であることを知る。

次に，(3. 4) の最後の式から

(3. 36)
$$\begin{aligned}WS^{-1}B&=(S-B)S^{-1}(S-W)\\&=S-W-B+BS^{-1}W=BS^{-1}W\end{aligned}$$

が出る。W, S, B は　いずれも対称行列であるから，いま得た (3. 36) を用いて，

(3. 37)
$$(WS^{-1}B)^T=BS^{-1}W=WS^{-1}B$$

が出る。したがって，$WS^{-1}B$ は対称行列となり，(3. 35) 第1式の $Q_9[k]$ は二次形式変量になる。これが正値形式であることを言うためには，W, S^{-1}, B, の各行列が正値定符号で　いずれも階数 k というだけでは条件が足りない。何故なら，3 者の積 ($WS^{-1}B$) の階数が k であっても，これが正値定符号ではなくて負値定符号になることも考えられるからである。後者ではないことを証明する前に，(3. 35) の2者の和が，$Q_5[k]+Q_7[k]$ に等しいことを示す。

(3. 33) 第2式と (3. 30) 第2式から，目標となる関係式

(3. 38)
$$Q_5[k]+Q_7[k]=\frac{1}{\sigma^2}(\lambda W\lambda^T+\mu B\mu^T)$$

が出る。以下では (3. 35) の2式を適当に変形して，その和が上式右辺に等しいことを示す。

(3. 8) 第2式，(3. 9) (3. 36) を用いると，

(3. 39)
$$\begin{aligned}&(\lambda-\mu)WS^{-1}B(\lambda-\mu)^T\\&=\lambda WS^{-1}B(\lambda-\mu)^T-\mu BS^{-1}W(\lambda-\mu)^T\\&=\lambda WS^{-1}B\lambda^T-\lambda WS^{-1}B\mu^T-\mu BS^{-1}W\lambda^T+\mu BS^{-1}W\mu^T.\end{aligned}$$

他方，(3. 5) 第4式と (3. 8) 第2式および (3. 9) から，W, B の対称性を用いて，

$$(3.\ 33)\quad \begin{cases} \quad =\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{W}_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})^T \\ \quad =\dfrac{1}{\sigma^2}[\sum_i\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\lambda}_i^T-\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\lambda}^T], \\ Q_5[k]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j[\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2 \\ \quad =\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\lambda}^T=\dfrac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\lambda}^T, \\ Q_2[kt]=Q_4[k(t-1)]+Q_5[k]. \end{cases}$$

$Q_4[k(t-1)]$ の自由度については,

$$(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})\ \boldsymbol{W}_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})^T=\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}(\lambda_i^{(r)}-\lambda^{(r)})(\lambda_i^{(s)}-\lambda^{(s)})w_i(z^{(r)}z^{(s)})$$

において, $(\lambda_i^{(r)}-\lambda^{(r)})$, $(r=1, 2, \cdots, k)$ が ϵ_{ij} の一次同次式であり, $i=1, 2, \cdots, t$ を考えると kt 個の $(\lambda_i^{(r)}-\lambda^{(r)})$ が現われるが, それらの間には (3. 5) (3. 8) 第1式 (3. 9) から出る

$$(3.\ 34)\qquad \sum_i(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{0}$$

の各成分に対応する k 個の条件式があることを考えればよい。なお, $t=1$ のときには, $\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda}=\boldsymbol{0}$ になって, $Q_4[k(t-1)]=0$ である。

最後に,

$$(3.\ 35)\qquad \begin{cases} Q_9[k]=\dfrac{1}{\sigma_2}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{W}\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\lambda}-\boldsymbol{\mu})^T, \\ Q_{10}[k]=\dfrac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{s}(\epsilon z)\boldsymbol{S}^{-1}\boldsymbol{s}(\epsilon z)^T, \end{cases}$$

は, いずれも自由度 k の互に独立な χ^2 変量で, その和は $Q_5[k]+Q_7[k]$ に等しいことを証明する。そのためには, ϵ_{ij} の一次同次式の $(\lambda^{(r)}-\mu^{(r)})$ および $s^{(r)}=S(\epsilon z^{(r)})$, $(r=1, 2, \cdots, k)$ が, (3. 35) の両式にいずれも k 個ずつ存在することを考え, Cochran の定理を用いることにすると, (3. 35) の両者が共に正値二次形式変量で, その和が $Q_5[k]+Q_7[k]$ に等しいことを言えばよい。

まず任意の k 次元ベクトルを $\boldsymbol{x}$ とするとき, (3. 4) の最終式から

$$\times\left|\begin{array}{lll} n_{i_1}(\bar{z}_{i_1}{}^{(1)}-\bar{z}^{(1)}),\ \cdots, & n_{i_k}(\bar{z}_{i_k}{}^{(k)}-\bar{z}^{(k)}), & n_{i_{k+1}}(\bar{z}_{i_{k+1}}{}^{(1)}-\bar{z}^{(1)}) \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots \\ n_{i_1}(\bar{z}_{i_1}{}^{(k)}-\bar{z}^{(k)}),\ \cdots, & n_{i_k}(\bar{z}_{i_k}{}^{(k)}-\bar{z}^{(k)}), & n_{i_{k+1}}(\bar{z}_{i_{k+1}}{}^{(k)}-\bar{z}^{(k)}) \\ n_{i_1}(\bar{\epsilon}_{i_1}-\bar{\epsilon}),\ \cdots\cdots, & n_{i_k}(\bar{\epsilon}_{i_k}-\bar{\epsilon}), & n_{i_{k+1}}(\bar{\epsilon}_{i_{k+1}}-\bar{\epsilon}) \end{array}\right|$$

こゝで，i_1，i_2，…，i_{k+1} のうちに同じものがあれば，その項の行列式は 0，であり，i_1，i_2，…，i_k が全部異る行列式については，第２列以下を全部第１列に加えると，$t=k+1$ を考えれば，

$$\sum_{i=1}^{k+1} n_i\bar{z}_i{}^{(r)}/\sum_{i=1}^{k+1} n_i=\bar{z}^{(r)}\quad (r=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} n_i\bar{\epsilon}_i/\sum_{i=1}^{k+1} n_i=\bar{\epsilon},$$

によって，それが０になる。故に（3. 31）が０となって，

(3. 32)　　$t=k+1$ のとき，$Q_6[t-k-1]=\dfrac{1}{\sigma^2}[B(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu B\mu}^T]=0.$

後に（3. 43）で見るように，（3. 31）は級内平均値（$\bar{x}_i$，$\bar{z}_i$）（$i=1$，2，‥，t）に対して，n_i をウエイトとして最小二乗法で回帰平面をあてはめた場合の推定誤差平方和であるから，$t=k+1$ のときに　その値が零になることは，直観的には当然のことである。

次に $Q_2[kt]$ の分割に通む。$\boldsymbol{\lambda}$ を用いて，

$$\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T=(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T+\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T$$

と変形しておいて，両辺を二乗し，i，j について加えると，（3. 4）（3. 8）（3. 9）（3. 21）および級内平均値の定義から，積の形の項の和が消え，二乗和に対する条件式を吟味して，Cochran の定理を用いると，$Q_2[kt]$ は次の互に独立な２つの χ^2 変量に分割される。第１式の変形には，（3. 4）（3. 8）を用いた。

$$\left\{\begin{aligned} Q_4[k(t-1)]&=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j[(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2 \\ &=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)(\boldsymbol{\lambda}_i-\boldsymbol{\lambda})^T \end{aligned}\right.$$

$$=\frac{1}{|B|}\left|\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B} & \begin{array}{c} B(\epsilon z^{(1)}) \\ \vdots \\ B(\epsilon z^{(k)}) \end{array} \\ \hline 0,\ \cdots,\ 0, & B(\epsilon^2) \end{array}\right| + \frac{1}{|B|}\left|\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B} & \begin{array}{c} B(\epsilon z^{(1)}) \\ \vdots \\ B(\epsilon z^{(k)}) \end{array} \\ \hline B(\epsilon z^{(1)}),\ \cdots,\ B(\epsilon z^{(k)}), & 0 \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{|B|}\left|\begin{array}{c|c} \boldsymbol{B} & \begin{array}{c} B(\epsilon z^{(1)}) \\ \vdots \\ B(\epsilon z^{(k)}) \end{array} \\ \hline B(\epsilon z^{(1)}),\ \cdots,\ B(\epsilon z^{(k)}), & B(\epsilon^2) \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{|B|}\left|\begin{array}{lll} \sum_i n_i(\bar{z}_i^{(1)}-\bar{z}^{(1)})^2, & \cdots\cdots\cdots, & \sum_i n_i(\bar{z}_i^{(1)}-\bar{z}^{(1)})(\bar{z}_i^{(k)}-\bar{z}^{(k)}), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_i n_i(\bar{z}_i^{(k)}-\bar{z}^{(k)})(\bar{z}_i^{(1)}-\bar{z}^{(1)}), & \cdots, & \sum_i n_i(\bar{z}_i^{(k)}-\bar{z}^{(k)})^2, \\ \sum_i n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})(\bar{z}_i^{(1)}-\bar{z}^{(1)}), & \cdots\cdots, & \sum_i n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})(\bar{z}_i^{(k)}-\bar{z}^{(k)}), \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \sum_i n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})(\bar{z}_i^{(1)}-\bar{z}^{(1)}) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \sum_i n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})(\bar{z}_i^{(k)}-\bar{z}^{(k)}) \\ \sum_i n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})^2 \end{array}\right|$$

こゝで $\sum_i=\sum_{i=1}^{t}=\sum_{i=1}^{k+1}$ であるから，

$$(3.\ 31)=(\text{上式})=\frac{1}{|B|}\sum_{i_1=1}^{k+1}(\bar{z}_{i_1}^{(1)}-\bar{z}^{(1)})\left|\begin{array}{ll} n_i(\bar{z}_{i_1}^{(1)}-\bar{z}^{(1)}) & \\ \vdots & \text{第2列以下} \\ n_i(\bar{z}_{i_1}^{(k)}-\bar{z}^{(k)}) & \text{変化なし} \\ n_i(\bar{\epsilon}_{i_1}-\bar{\epsilon}) & \end{array}\right|$$

$$=\frac{1}{|B|}\sum_{i_1=1}^{k+1}\cdots\sum_{i_k=1}^{k+1}\sum_{i_{k+1}=1}^{k+1}(\bar{z}_{i_1}-\bar{z}^{(1)})\cdots(\bar{z}_{i_k}^{(k)}-\bar{z}^{(k)})(\bar{\epsilon}_{i_{k+1}}-\bar{\epsilon})$$

$Q_6[t-k-1]$ の自由度については，t 個の

$$\sqrt{n_i}\,[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-\boldsymbol{\mu}(\bar{z}_i-\bar{z})^T,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

の間に，

$$\sum_i\sqrt{n_i}\,[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-\boldsymbol{\mu}(\bar{z}_i-\bar{z})^T]\cdot\sqrt{n_i}=0,$$

という1個と，(3. 4) (3. 5) (3. 8) 第2式を用いて出る

$$\sum_i\sqrt{n_i}\,[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-\boldsymbol{\mu}(\bar{z}_i-\bar{z})^T]\cdot\sqrt{n_i}\,(\bar{z}_i-\bar{z})=\boldsymbol{b}(\epsilon z)-\boldsymbol{\mu B}=\boldsymbol{0},$$

の各成分に対応する k 個の条件式があることを考えればよい。

(3. 29) の　はじめの2式は, (3, 4) (3, 5) (3. 8) 第2式を用いて，

$$(3.\ 30)\quad\begin{cases}Q_6[t-k-1]\\ \quad=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-\boldsymbol{\mu}(\bar{z}_i-\bar{z})^T][(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-(\bar{z}_i-\bar{z})\boldsymbol{\mu}^T]\\ \quad=\dfrac{1}{\sigma^2}[B(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu B\mu}^T],\\ Q_7[k]=\dfrac{1}{\sigma^2}\boldsymbol{\mu B\mu}^T,\end{cases}$$

と変形できる。

この第1式は，$t=k+1$ のとき0となる。その証明は次の通り。
(3. 8) 第2式から

$$(3.\ 31)\quad B(\epsilon^2)-\boldsymbol{\mu B\mu}^T=B(\epsilon^2)-\boldsymbol{b}(\epsilon z)\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{b}(\epsilon z)^T$$
$$=B(\epsilon^2)-\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}B(\epsilon z^{(r)})B(\epsilon z^{(s)})B_{rs}/|\,B\,|,$$

ただし $|\,B\,|$ は $\boldsymbol{B}$ から作られる行列式，B_{rs} は，$|\,B\,|$ における第 r 行第 s 列元素の余因子とする。

したがって，

$$(3.\ 31)=B(\epsilon^2)+\frac{1}{|\,B\,|}\begin{vmatrix}\begin{array}{c|c}\boldsymbol{B} & \begin{matrix}B(\epsilon z^{(1)})\\ \vdots\\ B(\epsilon z^{(k)})\end{matrix}\\ \hline B(\epsilon z^{(1)}),\ \cdots,\ B(\epsilon z^{(k)}), & 0\end{array}\end{vmatrix}$$

第１式を用いた。

(3. 26) (3. 25) (3. 23) 第１式を用いて，(3. 22) の各式を別の形で書くと，次のようになる。なお，こゝでは，各変量の級別の組成分子を右肩に級を示す添字をつけて表わし，各級別の分割をも併せて記しておいた。

$$
(3.\ 27)\quad
\begin{cases}
Q_1[N-(k+1)t]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j(x_{ij}-\hat{\alpha}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{z}_{ij}{}^T)^2 \\[2ex]
\quad=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j[(x_{ij}-\bar{x}_i)-\hat{\boldsymbol{\beta}}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\overline{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2 \\[2ex]
\quad=\sum_i Q_1{}^i[n_i-(k+1)], \\[2ex]
Q_2[kt]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\boldsymbol{\beta}_i)\boldsymbol{W}_i(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\boldsymbol{\beta}_i)^T=\sum_i Q_2{}^i[k], \\[2ex]
Q_3[t]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i(\bar{x}_i-\alpha_i-\boldsymbol{\beta}_i\overline{\boldsymbol{z}}_i{}^T)=\sum_i Q_3{}^i[1].
\end{cases}
$$

この第１式から，$Q_1[N-(k+1)t]$ が各級内の推定誤差平方和の合計を母分散 σ^2 で割ったものになっていることを知る。

次に，$Q_2[kt]$ および $Q_3[t]$ の分割を行う。まず後者から論ずる。

$\boldsymbol{\mu}$ を用いて，$\bar{\epsilon}_i$ を

$$
(3.\ 28)\qquad \bar{\epsilon}_i=[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-\boldsymbol{\mu}(\overline{\boldsymbol{z}}_i-\overline{\boldsymbol{z}})^T]+\boldsymbol{\mu}(\overline{\boldsymbol{z}}_i-\overline{\boldsymbol{z}})^T+\bar{\epsilon}
$$

と変形し，両辺を二乗し，n_i を乗じて i について総和すると，(3. 8) 第２式および総平均値の定義から積の形の項の和は消え，二乗和に対する条件式を数えて，Cochran の定理を適用すれば，$Q_3[t]$ は，次の３つの互に独立な χ^2 変量に分割される。

$$
(3.\ 29)\quad
\begin{cases}
Q_6[t-k-1]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i[\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-\boldsymbol{\mu}(\overline{\boldsymbol{z}}_i-\overline{\boldsymbol{z}})^T]^2, \\[2ex]
Q_7[k]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i[\boldsymbol{\mu}(\overline{\boldsymbol{z}}_i-\overline{\boldsymbol{z}})^T]^2, \\[2ex]
Q_8[1]=\dfrac{1}{\sigma^2}N\bar{\epsilon}^2, \\[2ex]
Q_3[t]=Q_6[t-k-1]+Q_7[k]+Q_8[1].
\end{cases}
$$

$$
(3.\ 22)\quad
\begin{cases}
Q_1[N-(k+1)t]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2 \\
\qquad\qquad\qquad\quad =\dfrac{1}{\sigma^2}[W(\epsilon^2)-\sum_i\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\lambda}_i^T], \\
Q_2[kt]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j[\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\lambda}_i^T, \\
Q_3[t]=\dfrac{1}{\sigma_2}\sum_i n_i\bar{\epsilon}_i^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})+\bar{\epsilon}]^2 \\
\qquad\ =\dfrac{1}{\sigma^2}[B(\epsilon^2)+N\bar{\epsilon}^2], \\
Q[N]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j\epsilon_{ij}^2=Q_1[N-(k+1)t]+Q_2[kt]+Q_3[t].
\end{cases}
$$

この第1式では（3. 17）と同じような変形を，第2式では（3. 21）を，第3式では総平均値の定義を用いて変形した。

（3. 3）から

$$
(3.\ 23)\quad
\begin{cases}
\bar{\epsilon}_i=\bar{x}_i-\alpha_i-\boldsymbol{\beta}_i\bar{\boldsymbol{z}}_i^T, \\
\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i=(x_{ij}-\bar{x}_i)-\boldsymbol{\beta}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T,
\end{cases}
$$

が出て，第2式の両辺へ（$\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i$）を右から乗じて，$j$ について総和すれば，

$$(3.\ 24)\quad \boldsymbol{w}_i(\epsilon z)=\boldsymbol{w}_i(xz)-\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{W}_i$$

が出て，（3. 8）（3. 10）から

$$\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i=\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{W}_i-\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{W}_i$$

を得る。$\boldsymbol{W}_i$ に関する前提によって，その逆行列が存在し，それを上式の両辺に右から乗ずれば，

$$(3.\ 25)\quad \boldsymbol{\lambda}_i=\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\boldsymbol{\beta}_i$$

となる。これと（3. 23）第2式を用いて，

$$
\begin{aligned}
(3.\ 26)\quad &(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T \\
&=(x_{ij}-\bar{x}_i)-\boldsymbol{\beta}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T-(\hat{\boldsymbol{\beta}}_i-\boldsymbol{\beta}_i)(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T \\
&=(x_{ij}-\bar{x}_i)-\hat{\boldsymbol{\beta}}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T \\
&=x_{ij}-\hat{\alpha}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{z}_{ij}^T
\end{aligned}
$$

を得る。最後の変形では，最尤推定子 $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ に関する性質（3. 10）

$$(3.\ 19)\quad \sum_j[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T](\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)$$
$$=\boldsymbol{w}_i(\epsilon z)-\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{0},\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

という t 個の条件式が存在し，後者は (3. 19) が k 次元ベクトルであり $\boldsymbol{W}_i$ の階数が k であることを考えると，その各成分に対応して互に独立な tk 個の条件式になっている。したがって，(3. 18) 右辺第 1 項については，$\Sigma n_i=N$ 個の

$$(3.\ 20)\quad (\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T$$
$$=(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\{\lambda_i^{(1)}(z_{ij}^{(1)}-\bar{z}_i^{(1)})+\lambda_i^{(2)}(z_{ij}^{(2)}-\bar{z}_i^{(2)})+\cdots$$
$$\cdots+\lambda_i^{(k)}(z_{ij}^{(k)}-\bar{z}_i^{(k)})\}$$

の間に，合計 $(k+1)t$ 個の条件式が存在することになる。$\boldsymbol{\lambda}_i$ は (3. 8) 第 1 式の定義から，ϵ_{ij} に関する一次同次式を成分とする k 次元ベクトルであるから，(3. 20) は ϵ_{ij} に関する一次同次式になる。

次に (3. 18) 右辺第 2 項のうち，j についての総和部分は，(3. 4) を用いて

$$(3.\ 21)\quad \sum_j[\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2=\sum_j\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)\boldsymbol{\lambda}_i^T$$
$$=\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\lambda}_i^T=\sum_{r=1}^{k}\sum_{s=1}^{k}\lambda_i^{(r)}\lambda_i^{(s)}w_i(z^{(r}z^{(s)})$$

となり，ϵ_{ij} に関する一次同次式 $\lambda_i^{(r)}$ $(r=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ を k 個含んでいる。これを，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ t$ について総和すれば，ϵ_{ij} に関する一次同次式$\lambda_i^{(r)}$ $(i=1,2\ \cdots,\ t\ ;\ r=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ を tk 個含むことになる。(3. 18) 右辺最終項は，t 個の$\sqrt{n_i}\ \bar{\epsilon}_i\,(i=1,\ 2,\ t)$ を含み，これらはいずれも ϵ_{ij} の一次同次式である。

したがって，(3. 18) 右辺の各項を順に $Q_1,\ Q_2,\ Q_3$ とし，これらを

$$\frac{\epsilon_{11}}{\sigma},\ \frac{\epsilon_{12}}{\sigma}\cdots,\ \frac{\epsilon_{1n_1}}{\sigma},\ \frac{\epsilon_{21}}{\sigma},\ \cdots,\ \frac{\epsilon_{2n_2}}{\sigma},\ \cdots,\ \frac{\epsilon_{t1}}{\sigma},\ \cdots,\ \frac{\epsilon_{tn_t}}{\sigma},$$

に関する二次形式とみれば，Cochran の定理によって，自由度 N の χ^2 分布に従う $Q[N]$ は次の 3 個の互に独立な χ^2 変量に分割され，それらの自由度は各々の括孤内に記したものになる。

これだけの記号を準備すれば，一元回帰の場合と同じように，Cochran の定理を使って，自由度 N の χ^2 分布に従う

$$Q[N]=\frac{1}{\sigma^2}\Sigma\Sigma\epsilon_{ij}^2$$

が，互に独立な χ^2 変量に分割されることを容易に証明できる。一元回帰の場合には，まず（1. 7）で各級毎に分割し，それを t 個の級について合計して，（1. 9）における $Q[N]$ の分割を導き出したが，こゝでは各級毎の分割は省略する。Cochran の定理の使い方は，一元回帰の場合と全く同じであるが，自由度が違っていることと，ベクトル記号の扱い方とに注意を要する。

$$\epsilon_{ij}=[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]+\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}})^T+\bar{\epsilon}_i \tag{3. 16}$$

と変形しておいて，両辺を二乗し，i, j について加えると，積の形の総和項は，（3. 4）（3. 5）（3. 8）第１式と級内平均値の定義から，

$$\begin{aligned}(3.\ 17)\qquad &\sum_j[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T\\ &=\sum_j[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T](\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)\boldsymbol{\lambda}_i^T\\ &=\boldsymbol{w}_i(\epsilon z)\boldsymbol{\lambda}_i^T-\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i\boldsymbol{\lambda}_i^T=0,\\ &\sum_j[((\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]\bar{\epsilon}_i=0,\\ &\sum_j\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T\bar{\epsilon}_i=0\end{aligned}$$

と消えるので，

$$\begin{aligned}(3.\ 18)\qquad Q[N]&=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j\epsilon_{ij}^2\\ &=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j[\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2\\ &\quad+\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j[\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]^2+\frac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i\bar{\epsilon}_i^2\end{aligned}$$

を得る。右辺の第１項については，その変数に関して，級内平均値の定義から出る t 個の条件式

$$\sum_j[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-\boldsymbol{\lambda}_i(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T]=0,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

のほかに，（3. 8）第１式から出る

(3. 7)　$\boldsymbol{\mu}=(\mu^{(1)}, \mu^{(2)}, \cdots, \mu^{(k)})$

とするとき，$\boldsymbol{W}_i$, $\boldsymbol{B}$ の階数が k であると前提されているから，これらの偏回帰係数は，

(3. 8)　$$\begin{cases}\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{w}_i(\epsilon z),\\ \boldsymbol{\mu B}=\boldsymbol{b}(\epsilon z)\end{cases}$$

によって一義的にきまる。

$\boldsymbol{\lambda}_i$ の加重平均に相当するものは，$\boldsymbol{W}$ の階数が k であることを用いて，

(3. 9)　$$\boldsymbol{\lambda W}=\boldsymbol{w}(\epsilon z)=\sum_i\boldsymbol{\lambda}_i\boldsymbol{W}_i$$

によって一義的に決められる $\boldsymbol{\lambda}$ である。

α_i, $\boldsymbol{\beta}_i$ の最尤推定子 $\hat{\alpha}_i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ は，

(3. 10)　$$\begin{cases}\hat{\alpha}_i=\bar{x}_i-\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\bar{\boldsymbol{z}}_i^T,\\ \hat{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{W}_i=\boldsymbol{w}_i(xz)\end{cases}$$

で決まり，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$ の加重平均に相当するものは，

(3. 11)　$$\hat{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{W}=\boldsymbol{w}(xz)=\sum_i\hat{\boldsymbol{\beta}}_i\boldsymbol{W}_i$$

で定義される $\hat{\beta}$ である。この $\hat{\beta}$ の母数に相当する $\boldsymbol{\beta}$ は，

(3. 12)　$$\boldsymbol{\beta W}=\sum_i\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{W}_i$$

として定義される。$\boldsymbol{W}_i$, $\boldsymbol{W}$ の階数が k であることから，$\hat{\boldsymbol{\beta}}_i$, $\hat{\boldsymbol{\beta}}$, $\boldsymbol{\beta}$ はいずれも一義的に決まる。

級内平均値 $\bar{x}_i$ が $\bar{z}_i$ の一次式で表わされるという帰無仮説は，

(3. 13)　$$\begin{cases}\boldsymbol{\delta}=(\delta^{(1)}, \delta^{(2)}, \cdots, \delta^{(k)}),\\ E(\bar{x}_i)=\gamma+\boldsymbol{\delta}\bar{\boldsymbol{z}}_i^T,\ (i=1, 2, \cdots, t)\end{cases}$$

となる。γ, $\boldsymbol{\delta}$ の最尤推定子 $\hat{\gamma}$, $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ は，

(3. 14)　$$\begin{cases}\hat{\gamma}=\bar{x}-\hat{\boldsymbol{\delta}}\bar{\boldsymbol{z}}^T,\\ \hat{\boldsymbol{\delta}}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{b}(xz)\end{cases}$$

で定義され，$\boldsymbol{B}$ の階数が k であることから，γ,, $\hat{\boldsymbol{\delta}}$ は一義的に決まる。$\boldsymbol{\beta}$ と $\boldsymbol{\delta}$ との喰い違いを示すものは，

(3. 15)　$$\boldsymbol{\Delta}=\boldsymbol{\beta}-\boldsymbol{\delta}$$

である。

$$\begin{cases} \boldsymbol{B}=(B(z^{(r)}z^{(s)}))=\sum_{i=1}^{t} n_i(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\bar{\boldsymbol{z}})^T(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\bar{\boldsymbol{z}}), \\ \boldsymbol{S}=\boldsymbol{W}+\boldsymbol{B}=(S(z^{(r)}z^{(s)}))=\sum_i\sum_j(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}})^T(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}), \end{cases}$$

こゝで定義された $\boldsymbol{W}_i$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{S}$ は，いずれも実対称行列であり，以下では，これらの階数は，すべて k であると前提する。

(3. 5)
$$\begin{cases} \boldsymbol{w}_i(\epsilon z)=(w_i(\epsilon z^{(1)}),\ w_i(\epsilon z^{(2)}),\ \cdots,\ w_i(\epsilon z^{(k)})) \\ \qquad =\sum_{j=1}^{n_i}(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)\ (\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i), \\ \boldsymbol{w}(\epsilon z)=\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{w}_i(\epsilon z)=(W(\epsilon z^{(1)}),\ W(\epsilon z^{(2)}),\ \cdots,\ W(\epsilon z^{(k)})), \\ \boldsymbol{b}(\epsilon z)=(B(\epsilon z^{(1)}),\ B(\epsilon z^{(2)}),\ \cdots,\ B(\epsilon z^{(k)})) \\ \qquad =\sum_{i=1}^{t} n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})(\bar{\boldsymbol{z}}_i-\bar{\boldsymbol{z}}), \\ \boldsymbol{s}(\epsilon z)=\boldsymbol{w}(\epsilon z)+\boldsymbol{b}(\epsilon z)=(S(\epsilon z^{(1)}),\ S(\epsilon z^{(2)}),\ \cdots,\ S(\epsilon z^{(k)})) \\ \qquad =\sum_i\sum_j(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon})(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}), \\ \text{以上の諸式で } \epsilon \text{ を } x \text{ で置きかえたものを，} \boldsymbol{w}_i(xz),\ \boldsymbol{w}(xz), \\ \boldsymbol{b}(xz),\ \boldsymbol{s}(xz) \text{ の定義式とする。} \end{cases}$$

念のために，一元回帰のときの記号と今度の記号とを対比すると，次のようになる。

両者を通じて同じもの。$w_i(\epsilon^2)$, $W(\epsilon^2)$, $w_i(x^2)$, $W(x^2)$, $B(\epsilon^2)$, $S(\epsilon^2)$, $B(x^2)$, $S(x^2)$.

両者で異るもの。

一元回帰	$w_i(z^2)$	$W(z^2)$	$w_i(\epsilon z)$	$W(\epsilon z)$	$w_i(xz)$	$W(xz)$
多元回帰	$\boldsymbol{W}_i$	$\boldsymbol{W}$	$\boldsymbol{w}_i(\epsilon z)$	$\boldsymbol{w}(\epsilon z)$	$\boldsymbol{w}_i(xz)$	$\boldsymbol{w}(xz)$
一元回帰	$B(z^2)$	$S(z^2)$	$B(\epsilon z)$	$S(\epsilon z)$	$B(xz)$	$S(xz)$
多元回帰	$\boldsymbol{B}$	$\boldsymbol{S}$	$\boldsymbol{b}(\epsilon z)$	$\boldsymbol{s}(\epsilon z)$	$\boldsymbol{b}(xz)$	$\boldsymbol{s}(xz)$

第 i 級内における ϵ_{ij} の z_{ij} への偏回帰係数を

(3. 6)　$\boldsymbol{\lambda}_i=(\lambda_i^{(1)},\ \lambda_i^{(2)},\ \cdots,\ \lambda_i^{(k)})$

級内平均値 $\bar{\epsilon}_i$ の $\bar{z}_i$ へ偏回帰係数を

ず互に独立であるとする。その母分散が各級毎に異る値 σ_i^2 をとるかも知れない場合は，一元回帰の **II 1**（イ）で述べたように，分散系列の均一性の検定を行い，その検定を通過したとき，同一母分散 σ^2 を持つとみなし得る。したがって，こゝでは，はじめから ϵ_{ij} は すべて同一の母分散 σ^2 を持つと前提する。

なお，$\boldsymbol{z}_{ij}$ の第1成分 $z_{ij}^{(1)}$ という説明変数を常に1と定義し，$(\alpha_i, \beta_i^{(1)}, \beta_i^{(2)}, \cdots, \beta_i^{(k)})$ を改めて $k+1$ 次元の（3. 2）とすれば，常数項 α_i をも含めて，確率模型（3. 3）を

$$x_{ij}=\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{z}_{ij}^T+\epsilon_{ij}$$

と定義することができるように思われるが，このようにすると，後に定義する行列 $\boldsymbol{W}_i$, $\boldsymbol{W}$, $\boldsymbol{B}$ が常に特異な行列になってしまうので，今はこの形を用いない。

さらに，（3. 3）において $k=1$ とすれば，一元回帰の場合の（1. 1）となり，以下の関係式は，$k=1$ とおくときに，すべて一元回帰のときの関係式に帰着する。

記号 w_i, W, B, S の意味は一元回帰の場合と同じであるが，それらの後へ括孤をつけて ϵ, x, $z^{(1)}$, $z^{(2)}$, $\cdots$, $z^{(k)}$ の すべての組合せを記すことは大変であるから，こゝでは記号を改めて，次のように k 次元の正方行列と，k 次元行ベクトルを定義する。行列には大文字ゴチックを，ベクトルには小文字ゴチックを用いた。

$$(3.\ 4)\quad \left\{\begin{aligned}
\boldsymbol{W}_i=&\begin{pmatrix} w_i(z^{(1)}z^{(1)}), & w_i(z^{(1)}z^{(2)}), & \cdots\cdots, & w_i(z^{(1)}z^{(k)}) \\ w_i(z^{(2)}z^{(1)}), & w_i(z^{(2)}z^{(2)}), & \cdots\cdots, & w_i(z^{(2)}z^{(k)}) \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ w_i(z^{(k)}z^{(1)}), & w_i(z^{(k)}z^{(2)}), & \cdots\cdots, & w_i(z^{(k)}z^{(k)}) \end{pmatrix} \\
&=(w_i(z^{(r)}z^{(s)}))=\sum_{j=1}^{n_i}(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i)^T(\boldsymbol{z}_{ij}-\bar{\boldsymbol{z}}_i), \\
&\qquad\qquad \begin{pmatrix} r=1,\ 2,\ \cdots,\ k \\ s=1,\ 2,\ \cdots,\ k \\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ t \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{W}=&\sum_{i=1}^{t}\boldsymbol{W}_i=(W(z^{(r)}z^{(s)})),
\end{aligned}\right.$$

III　多元回帰における重共分散分析法

1　独立な χ^2 変量への分割

(イ)

序説で述べたように，共分散分析法における公式は，ベクトル記号を用いることにより，簡単に重共分散分析法の公式となる。それ故，こゝでは共分散分析法と同じように推論できる部分が多く，そのような個所は，必要な場合以外は，新しい記法で どのように表わされるかを注意するに止め，再び全部を繰り返すことはしない。そして共分散分析法では問題にならなかったが，重共分散分析法の場合に はじめて問題となる部分に注意を集中する。

説明変数を z，被説明変数を x で示すことは，共分散分析法の場合と同じであるが，今度は，説明変数の個数が 1 個だけではなく，$z^{(1)}, z^{(2)}, \cdots, z^{(k)}$ の $k(\geqq 2)$ 個となり，第 i 級 $(i=1, 2, \cdots, t)$ 第 j 番目 $(j=1, 2, \cdots, n_i)$ の観測値は，$(x_{ij}, z_{ij}{}^{(1)}, z_{ij}{}^{(2)}, \cdots, z_{ij}{}^{(k)})$ で示される。z の部分を，ゴチック体で書いた k 次元行ベクトル $\boldsymbol{z}_{ij}$ で示し，それを転置した列ベクトルを $\boldsymbol{z}_{ij}{}^T$ とする。

$$(3.\ 1)\qquad \begin{cases} \boldsymbol{z}_{ij}=(z_{ij}{}^{(1)},\ z_{ij}{}^{(2)},\ \cdots,\ z_{ij}{}^{(k)}), \\ \overline{\boldsymbol{z}}_i=\dfrac{1}{n_i}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{z}_{ij}=(\bar{z}_i{}^{(1)},\ \bar{z}_i{}^{(2)},\ \cdots,\ \bar{z}_i{}^{(k)}), \\ \overline{\boldsymbol{z}}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{t}\sum\limits_{j=1}^{n_i}\boldsymbol{z}_{ij}=\dfrac{1}{N}\sum\limits_{i=1}^{t}n_i\overline{\boldsymbol{z}}_i=(\bar{z}^{(1)},\ \bar{z}^{(2)},\ \cdots,\ \bar{z}^{(k)}) \end{cases}$$

たゞし，$N=\sum\limits_{i=1}^{t}n_i$ とする。

第 i 級における，級内母集団偏回帰係数を $\beta_i{}^{(1)}, \beta_i{}^{(2)}, \cdots, \beta_i{}^{(k)}$ とし，これらを成分とする k 次元行ベクトルを

$$(3.\ 2)\qquad \boldsymbol{\beta}_i=(\beta_i{}^{(1)},\ \beta_i{}^{(2)},\ \cdots,\ \beta_i{}^{(k)})$$

とすれば，本論文で前提される確率模型は次の形になる。

$$(3.\ 3)\qquad x_{ij}=\alpha_i+\boldsymbol{\beta}_i\boldsymbol{z}_{ij}{}^T+\epsilon_{ij}$$

こゝで，ϵ_{ij} は母平均 0 の正規分布に従い，i, j の如何にかゝわら

$$Q_9{}^G[1]=\frac{1}{\sigma^2}[(\hat{\delta}_G-\delta_G)-(\hat{\xi}-\xi)]^2U(z^2)G(z^2)/B(z^2)$$

を得る。これが（2. 32）に対応しているから，

$$\delta_G-\xi=\tau$$

とするとき，$Q_9{}^G[1]$ によって

H_{19}:　$\tau=\tau^0$　（たゞし，H_{16} と H_{18} の成立を前提して）

を検定できることになる。

さらに，H_5, H_8, H_{11}' の3者の同時成立が H_{12} を意味したように，H_{16}, H_{17}', H_{18}, $\tau^0=0$ とおいた H_{19} の4者の同時成立は，

H_{20}:　$\gamma_h=\gamma_G$,　$\delta_h=\delta_G$,　$(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l)$

と同等になる。このときには H_8 における γ, δ と γ_G, δ_G とが一致する。しかし，H_{16}, H_{17}, H_{18}, $\tau^0=0$ とおいた H_{19} の4者ならば，4者の同時成立は

H'_{20}:　$\gamma_h=\gamma_G$,　$\delta_h=\delta_G$,　$(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$

を意味するが，このとき γ_G, δ_G は H_8の γ, δ とは一致しない。その理由は，この場合には最後の l'' 個のグループが除外されているからである。

以上の検定において，実際計算には次の諸式を用いるのが便利である。

$$Q_4{}^{(h)}[t_h-1]=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_i{}^{(h)}\frac{\{w_i(xz)\}^2}{w_i(z^2)}-\frac{\{W_h(xz)\}^2}{W_h(z^2)}\right],$$

$$Q_4{}^M[l-1]=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{h=1}^{l}\frac{\{W_h(xz)\}^2}{W_h(z^2)}-\frac{\{W(xz)\}^2}{W(z^2)}\right],$$

$$Q_6{}^{(h)}[t_h-2]=\frac{1}{\sigma^2}\left[B_h(x^2)-\frac{\{B_h(xz)\}^2}{B_h(z^2)}\right],$$

$$Q_4{}^G[l'-1]=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_{h=1}^{l'}\frac{\{B_h(xz)\}^2}{B_h(z^2)}-\frac{\{U(xz)\}^2}{U(z^2)}\right],$$

$$Q_6{}^G[l-2]=\frac{1}{\sigma^2}\left[G(x^2)-\frac{\{G(xz)\}^2}{G(z^2)}\right],$$

$$Q_9{}^G[1]=\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{U(xz)}{U(z^2)}-\frac{G(xz)}{G(z^2)}-\tau^0\right]^2\frac{U(z^2)G(z^2)}{B(z^2)}.$$

がない。H_{17}' においては，はじめの l' 個のグループについては級内平均値の傾斜が，後の l'' 個のグループ（実は級）については級内個別観測値の傾斜が出てきて，それら　すべてが同一であるか否かを問題にしようとするため，このように複雑になるのである。

次に，$Q_6{}^G[l-2]$ が，グループ平均値の母集団回帰が直線的であるか否かに関する変量であることは，(1. 48) 第2式を，(1. 21) 第1式および (1. 23) の $Q_6[t-2]$ と対比してみれば直ちに分る。第3図について言えば，グループ平均値の母集団における値を連ねる，傾斜 ξ の×××印の線のような直線が存在するか否かを検定しようとするものである。すなわち，

$$H_{18}:\quad E(\bar{x}_{(h)})=\kappa+\xi\bar{z}_{(h)},\quad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l)$$

に関するものである。こゝでは，1 個の級しか含まない最後の l'' 個のグループも検定の対象に含まれている。

こゝまでくれば，H_{18} が採択されて，グループ平均値の母集団回帰が傾斜 ξ の直線のとき，(2. 49) で定義された δ_G と ξ との差異を問うものが $Q_9{}^G[1]$ に外ならないことは容易に分る。数式的には，H_{18} の成立から

$$\bar{x}_{(h)}=\kappa+\xi\bar{z}_{(h)}+\bar{\epsilon}_{(h)},\ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l)$$

$$\bar{x}=\kappa+\xi\bar{z}+\bar{\epsilon}$$

が出て，

$$\bar{\epsilon}_{(h)}-\bar{\epsilon}=(\bar{x}_{(h)}-\bar{x})-\xi(\bar{z}_{(h)}-\bar{z})$$

となり，両辺に $N_h(\bar{z}_{(h)}-\bar{z})$ を乗じて，h について 1 から l まで合計すれば，

$$G(\epsilon z)=G(xz)-\xi G(z^2)$$

を得るから，

$$\hat{\xi}=\frac{G(xz)}{G(z^2)}$$

とするとき，(1. 46) から

$$\nu=\hat{\xi}-\xi$$

が出る。これと (2. 50) を (1. 48) 第3式に代入して

であり，(1. 48) 第1式へ (2. 48) (2. 50) を代入して，

$$Q_4{}^G[l'-1]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{h=1}^{l'}[(\hat{\delta}_h-\delta_h)-(\hat{\delta}_G-\delta_G)]B_h(z^2)$$

が出る。これが (2. 14) に対応している。したがって，H_{16} が採択されたときに，

H_{17}:　$\delta_h=\delta_G$,　$(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$

（たゞし，H_{16} の成立を前提して）

を検定するために $Q_4{}^G[l'-1]$ を用い得る。これを再び第3図の例解について言えば，グループ内の級平均値回帰線の傾斜 $\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3$ の3者が相等しいか否かを問題にするものである。したがって，この検定は，各グループ内の級平均値の母集団回帰が直線的であることを検定した後でなければ無意味である。H_{17} においても，l' 個のすべてのグループではなく，一部のグループについて δ_h の同一性を検定したければ，それらのグループだけを集団にまとめて考えればよい。

H_{17} では最後の l'' 個のグループが除外されているが，これを含めて

H'_{17}:　$\delta_h=\delta_G$,　$(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l)$

（たゞし，H_{16} の成立を前提して）

を検定するのは，少し面倒である。まず，はじめの l' 個のグループについて H_{17} を検定して，級内平均値の回帰線の傾斜が同一値 δ_G であることを確かめ，次に，後の l'' 個のグループ（実は l'' 個の級）については，$\delta_h=\beta_i$, $(h=l'+1,\ \cdots,\ l'+l'')$ に外ならないことに注目して，これら l'' 個を1つの集団にまとめ，これに対して，**II 2**（イ）の H_5 において $t=l''$ とおいた検定を行って，それらの級内傾斜が同一値 β であることを確かめ，最後に $\beta=\delta_G$ であることを検定しなければならない。このとき，β の背後にある l'' 個のグループと，δ_G の背後にある l' 個のグループとは，それぞれ全く別の級を組成分子としているのであるから，**II 2**（イ）における H_{11}' の検定法を使って，この場合の $\beta=\delta_G$ を検定するわけには行かない。β および δ_G に関して，別々に信頼区間を作り，それらが重なり合うか否かを見るより外に方法

線性に関する帰無仮説

$$H_{16}:\quad E(\bar{x}_i)=\gamma_h+\delta_h\bar{z}_i,\quad i\epsilon M_h,$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t;\quad h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$$

に関するものであることは，$Q_6[t-1]$ と H_8 から直ちに分る。第3図で言えば，各グループ毎に，点線のような傾斜 δ_h の級平均値の直線回帰が存在するか否かを問うものである。

$Q_4{}^G[l'-1]$ は，$Q_4[t-1]$ から推測できるように，H_{16} が採択されたときに，H_{16} に登場した，はじめの l' 個のグループにおける級平均値の母集団回帰の同一性を問うものである。すなわち，$Q_4[t-1]$ についての

$$\alpha_i+\beta_i z_{ij}+\epsilon_{ij},\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t;\quad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n_i)$$

に対応して，$Q_4{}^G[l'-1]$ では

$$\gamma_h+\delta_h\bar{z}_i+\bar{\epsilon}_i,\ i\epsilon M_h,\quad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$$

を考え，(2. 25) の $\hat{\delta}$ をグループ M_h に関して定義した

$$\hat{\delta}_h=\frac{B_h(xz)}{B_h(z^2)}$$

という統計量を導入すれば，(2. 26) と同じようにして

$$\mu_h=\hat{\delta}_h-\delta_h,\quad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l') \tag{2. 48}$$

が出て，これと (1. 35) (1. 45) から

$$\rho=\frac{\sum_{h=1}^{l'}(\hat{\delta}_h-\delta_h)B_h(z^2)}{\sum_{h=1}^{l'}B_h(z^2)}$$

を得る。したがって，

$$\delta_G=\frac{\sum_{h=1}^{l'}\delta_h B_h(z_2)}{\sum_{h=1}^{l'}B_h(z^2)},\qquad \hat{\delta}_G=\frac{\sum_{h=1}^{l'}\hat{\delta}_h B_h(z^2)}{\sum_{h=1}^{l'}B_h(z^2)} \tag{2. 49}$$

とおけば，両者は一般には H_8 の δ と (2. 25) の $\hat{\delta}$ とは一致しないが，

$$\rho=\hat{\delta}_G-\delta_G \tag{2. 50}$$

$Q_4^M[l-1]$ は，上記の H_2' が採択されたことを前提として，$\beta_{(h)}$ $(h=1, 2, \cdots, l', \cdots, l)$ の同一性に関する検定に用い得る。もっとも，H_2' の成立を前提しなくても，M_h を1つの新しい級とみなして，この大きな級に関しての H_5 と考えることもできる。いずれにせよ この場合の仮説は，形式的には，

$$H_{15}:\ \beta_{(h)}=\beta,\quad (h=1, 2, \cdots, l', \cdots, l)$$

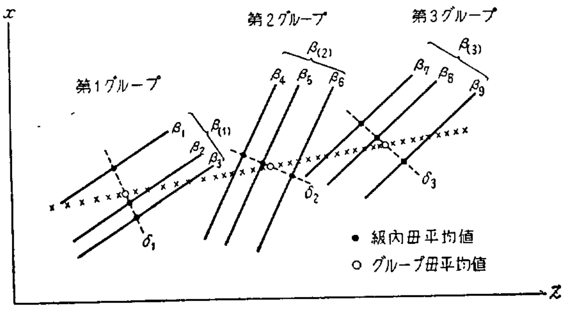
と書ける。

例示的にグラフで示せば，3 個のグループが存在し $(l=3)$，各グループに各々 3 個の級が属するとき $(l''=0)$，第 3 図に見るように，$\beta_1=\beta_2=\beta_3=\beta_{(1)}$，$\beta_4=\beta_5=\beta_6=\beta_{(2)}$，$\beta_7=\beta_8=\beta_9=\beta_{(3)}$ を問うのが H_2' であり，$\beta_{(1)}=\beta_{(2)}=\beta_{(3)}$ を問うのが H_{15} である。

H_{15} において，l 個全部のグループでなく，その一部を取りあげて，それらの中での $\beta_{(h)}$ の同一性を検定したければ，**II 1**（ハ）の最後に述べたように，問題となっているグループだけを1つの新しい集団にまとめて，集団内でのグループ回帰の同一性を検定する形にすればよい。第 3 図で言えば，第 1・第 2 グループから 1 つの集団を作って，$\beta_{(1)}=\beta_{(2)}$ を検定することになる。

$Q_6^{(h)}[t_h-2]$ が，グループ M_h に属する級平均値の母集団回帰の直

第 3 図



$$\text{自由度}\quad l,\ \{N-2t+\sum_{h=1}^{l'}(t_h-1)\}$$

を用いれば，$\beta_{(1)}$, $\beta_{(2)}$, …, $\beta_{(l')}$, $\beta_{(l'+1)}$, …, $\beta_{(l'+l'')}$ の同時信頼領域を求めることができる。これらのうち，最後の l'' 個の $\beta_{(l'+1)}, \cdots, \beta_{(l'+l'')}$ は，実は l'' 個の級の級内母集団回帰係数に外ならない。以上は，ちょうど（2. 2）の分子の＊を取ったものから β_1, $\beta_2, \cdots \beta_u$ の同時信頼領域を作ることに対応している。したがって，この同時信頼領域よりも，$\beta_{(h)}$ に関するグループ別の個別的信頼区間を，

$$F_{(h)}=\frac{Q_5{}^{(h)}[1]}{(Q_1{}^{(h)}[N_h-2t_h]+Q_4{}^{(h)}[t_h-1]^*)/(N_h-t_h-1)}, \tag{2. 47}$$

$$\text{自由度}\quad 1,\ (N_h-t_h-1) \qquad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$$

を用いて作り，これらを結合した方が実用的ということになる。この式は，さきの（2. 18）をグループ M_h に適用したものであり，級別の個別的信頼区間の（2. 4）に対応している。$\beta_{(1)}$, $\beta_{(2)}$, …, $\beta_{(l')}$, …, $\beta_{(l'+l'')}$ の同時信頼領域と，（2. 47）によるグループ別の個別的信頼区間の結合との間に,（2. 5）に関して述べたと同じような関係のあることも　すぐ分る。

ある特定グループ M_h について $\beta_{(h)}$ の信頼区間を求めたいときに，**II 2**（イ）の（2. 6）を用いる方法に比較して，今述べた方法が　いかに簡単であるかは，（2. 47）の分子が

$$Q_5{}^{(h)}[1]=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta}_{(h)}-\beta_{(h)})^2 W_h(z^2),$$

$$\text{たゞし}\quad \hat{\beta}_{(h)}=\frac{\Sigma_{(h)}w_i(z^2)\hat{\beta}_i}{\Sigma_{(h)}w_i(z^2)}=\frac{W_h(xz)}{W_h(z^2)}$$

となることからも明かである。この 2 式は，（2. 17）および（2. 11）と同じ性質のものを，グループ M_h に対して定義したものに外ならない。

このように，グループに分割した場合には，原則として，今まで級 i として考えていたものの代りにグループ h が現われたと思えばよいのであるから，第 3 表における他の χ^2 変量の説明は，今までの結果を利用して比較的簡単に行い得る。

から，前節（ロ）で論じた検定と推定は，そのまゝの形で各グループ毎に行うことができる。たとえば，各グループ毎に，それに属するt_h個の級の級内回帰線の完全同一性を問うには，グループ毎に H_5, H_8, H_{11}' の3者の同時検定を行うことにすればよい。したがって，第4表のグループ別については，特に新しく附加すべき点はないので，以下では必要な場合を除いて，第3表のグループ分割だけを論ずる。さらに，各種の問題に応じて，どの χ^2 変量を組合せて F 分布を用いたらよいかは，今までの叙述から明かであると思われるので，今後は，既述の部分との対応上，特に明白を必要とする場合を除いて，F の値は，なるべく記さないことにする。

まず，$Q_4^{(h)}[t_h-1]$ $(h=1, 2, \cdots, l)$ は，第 h グループ M_h に属する級内回帰線の傾斜の同一性を問うものであることは，$Q_4[t-1]$ および H_5 から直ちに推察がつく。いまの場合，本節の初めに述べたように $u=t$ として考えていること，および，l 個のグループのうち はじめの l'個だけが2個または それ以上の級を含むことに注意すれば，これは，**II 2**（イ）で論じた H_2 と同等の

$$H_2':\quad \beta_i=\beta_{(h)},\quad i\in M_h,\quad (i=1, 2, \cdots, t,\quad h=1, 2, \cdots, l')$$

を検定することに外ならない。

H_2' では，l' 個のグループ全部について，同時にグループ毎に回帰線の傾斜の同一性を問うのであるから，次の統計量を用いることになる。

$$F=\frac{\sum_{h=1}^{l'} Q_4^{(h)}[t_h-1]^*/\sum_{h=1}^{l'}(t_h-1)}{Q_1[N-2t]/(N-2t)},\quad \text{自由度}\ \sum_{h=1}^{l'}(t_h-1),\ (N-2t)$$

たゞし，分子の肩の＊は，H_2' に規定される関係を代入したことを示す。その形は（2. 15）から推察できる。

H_2' が採択されたとき，

$$F=\frac{(\sum_{h=1}^{l'}Q_5^{(h)}[1]+\sum_{h=l'+1}^{l'+l''}Q_2^{(h)}[1])/l}{(Q_1[N-2t]+\sum_{h=1}^{l'}Q_4^{(h)}[t_h-1]^*)/\{N-2t+\sum_{h=1}^{l'}(t_h-1)\}}$$

第5表 ϵ に関する共分散分析表 $(u+v=t)$

<table>
<tr><td rowspan="2">$Q_1[N-2t]$</td><td colspan="3">$Q_1^{(1)}[N-2t_1]$
⋮
$Q_1^{(l)}[N_l-2t_l]$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$Q_1^{(l+1)}[N_{l+1}-2t_{l+1}]$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$Q_2[t]$</td><td rowspan="3">$Q_2[u]$</td><td rowspan="2">$Q_4[u-1]$</td><td>$Q_4^{(1)}[t_1-1]$
⋮
$Q_4^{(l)}[t_l-1]$</td></tr>
<tr><td>$Q_4^M[l-1]$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$Q_6[u-2]$</td><td>$Q_6^{(1)}[t_1-1]$
⋮
$Q_6^{(l)}[t_l-1]$</td></tr>
<tr><td>$Q_2[v]$</td><td rowspan="2">$Q_4^G[l'-1]$
$Q_6^G[l-2]$
$Q_9^G[1]$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$Q_3[t]$</td><td rowspan="3">$Q_3[u]$</td></tr>
<tr><td>$Q_5[1]$
$Q_7[1]$</td><td>$Q_9[1]$
$Q_{10}[1]$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Q_8[1]$</td></tr>
<tr><td>$Q_3[v]$</td><td colspan="2">$Q_2[v]$
$Q_3[v]$</td></tr>
<tr><td colspan="4">$Q[N]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j \epsilon_{ij}^2$</td></tr>
</table>

第5表のような形になる。これで見ると，$Q_2[v]$, $Q_3[v]$ は，さし当って関係のない変量として除外され，グループ M_{l+1} に入れられた最後の v 個の級は，残差項 $Q_1[N-2t]$ を増す役目を果しているにすぎない。したがって，この点に注意しさえすれば，実際上は，観測された t 個の級全部を問題として取りあげ，これを l 個のグループに分割する第1のグループ別と何ら違わない。第4表については，この間の事情は一層明白である。それ故，以下では，専ら第3表および第4表に示された第1のグループ別に依って推論して行くとにする。

第1のグループ別をとるとき，第4表については，グループ M_h に含まれる級個数 t_h を，第1表の t とみなして分割しているに過ぎない

さらに後節（ハ）のグループ別の検定と推定を論じたものは見当らなかった。

上記の諸著作で扱われている仮説検定では，問題とする母数が零であるか否かを問うことが主題となっている。自然科学の実験において，説明変数が実験結果に対して影響するか否かを問う型の問題を扱う場合には，このような仮説検定が足りるであろうが，経済学のように説明変数の影響が明白であって，その影響の有無よりも，むしろ影響の大きさを問題にする場合には，推定された母数が零であるか否かを検定してみても，あまり意味がない。そのような検定よりも，母数の信頼区間または信頼領域の方が，説明変数の影響の程度を知る上で遙かに大切である。さらに信頼区間または信頼領域を作ったとき，その中に母数零に相当する点が含まれるか否かを見れば，母数が零なりや否やの型の検定がなされることになるから，本論文では検定と同時に区間推定に重点をおいて述べてきた次第である。

本節の最後として，Mood の叙述と本論文との差違の小さな点について触れておく。Mood では，β_i が全級を通じて同一値をとるときの値を β として定義しているため，H_{11}' は，H_5 および H_8 の2者の成立を前提して　はじめて意味があることになるが，本論文では（2.13）のように β の定義を与えているので，H_{11}' および　それを一般化した H_{11} は，H_8 だけの前提を予定すれば足りる。

（ハ）

前節（ロ）では，観測された t 個の級全部を問題とする，**II 1**（ハ）の第1のグループ別に基づいて論じたが，今度は再び **II 2**（イ）の第2のグループ別に戻ることにする。すなわち，t 個の級のうちの一部，u 個（$u \leqq t$）を問題とし，当面問題としない $t-u$ 個を最後のグループ M_{l+1} に入れ，他を **II 1**（ハ）の第1のグループ別の方針で l 個のグループに分割する。したがって，l 個のグループのうちの　はじめの l' 個は2個または　それ以上の級を含むが，終りの l'' 個のグループには　各グループに　たゞ1個の級が含まれる。当面問題としない $t-u=v$ 個をグループ M_{l+1} に入れて分離するから，既述の第3表は，

の同時信頼領域を，(2. 9) を用いて作ることは面倒であると述べたが，現在の方法によれば，これを簡単に作ることができる。

さらに，(2. 46) の分子で，α, β に特定値 α^0, β^0 を代入したものを検定すれば，全級を通じて級内回帰線が全く同一であるという H_{12} の成立を前提した上で，その回帰線が $\alpha^0+\beta^0 z_{ij}$ という特定のものであるか否かを検定したことになる。

通常，共分散分析表では，第1表または第3表のように最下段に $Q[N]$ を出すことなく，$S(x^2)$ と その自由度 $N-1$ を記すのが慣例となっている。その理由は，常に自由度 $N-1$ の χ^2 分布に従う変量 $Q[N]-Q_8[1]=\dfrac{1}{\sigma^2}S(\epsilon^2)$ が，ある条件の下では$\dfrac{1}{\sigma^2}S(x^2)$ に一致することと，標本観測値から計算し得るのは $S(\epsilon^2)$ ではなくて $S(x^2)$ であることとに由来する。ここに言う ある条件とは，(1. 1) の前提のもとで $S(\epsilon^2)=S(x^2)$ を成立させるような条件であるから，

$$\alpha_i=\alpha,\quad \beta_i=0,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

に外ならない。これは，H_{12} に加えて，H_{13} で $\beta^0=0$ とおいた仮説が成立することを意味する。このように，共分散分析表で総和項として現われる $S(x^2)$ は，無条件で自由度 $N-1$ の χ^2 分布に従うものではないこと，および，$Q_8[1]$ と $Q[N]$ を結合して $S(x^2)$ で表わさずに，$Q_8[1]$ を独立させておけば，上記のような利用価値がある。

なお，本論文の序説で，Mood の本における共分散分析法の説明が，きわめて限られた型の仮説検定を扱うに止まっていると述べたが，Mood は，H_5, H_8, H_{11}', $\beta^0=0$ の場合の H_{13}, $\bar{\alpha}^0=0$ の場合の H_{14} (たゞし H_{11} として H_{11}' を用いるから，$\bar{\alpha}=\alpha=0$ の検定になる) を論じている。G. W. Snedecor の書物[11]，および，B. H. Wilsdon の論文[12]にも同じ方法の例解があるが，後者によると，これらの方法は M. S. Bartlett[13] に由来するものと思われる。Bartlett が どのような証明を与えているかは，その論文を見ていないため分らないが，私の見た限りでは，Mood の本以外は手法の説明だけで その証明は なされていない。そして Mood も母数の信頼区間の求め方や，H_5, H_8, H_{11}' の3者を結合しての (2. 35) による H_{12} の検定などは述べていない。

ば.

$$Q_8[1]^{*****}=\frac{N}{\sigma^2}(\bar{x}-\bar{\alpha}^0-\beta^0\bar{z})^2$$

となるから. H_{14} の検定を

$$F=\frac{Q_8[1]^{*****}}{(Q_1[N-2t]+Q_4[t-1]^*+Q_6[t-2]^*+Q_9[1]^{**}+Q_{10}[1]^{****})/(N-1)},\quad 自由度\quad 1,\ (N-1)$$

で行うことができる。

また, この式の分子で (2. 45) を用いれば, H_5, H_8, H_{11}, H_{13} が成立するときの $\bar{\alpha}$ の信頼区間を作ることができる。分子として (2, 44) を用い, 分母から $Q_{10}[1]^{****}$ を除いて $(N-2)$ で割ることとし, 自由度を 1, $(N-2)$ にすれば, H_5, H_8, H_{11} が成立するときの $\bar{\alpha}+\beta\bar{z}$ の信頼区間を作ることができる。後の場合に, 分子に (2. 42) を加えて 2 で割り, 自由度を 2, $(N-2)$ とすれば, $\bar{\alpha}, \beta$ の同時信頼領域を求め得る。

H_{11} として, 特に H_{11}' をとれば, H_5, H_8, H_{11}' なる 3 者と H_{12} との同等性から, (2. 37) によって $\bar{\alpha}=\alpha$ が出て, H_5, H_8, H_{11}' の 3 者すなわち H_{12} が採択されたことを前提して, (2. 44) により $\alpha+\beta\bar{z}$ の信頼区間を, (2. 42) において $\Delta^0=0$ とおいたものと (2. 44) とを結合したものからは α, β の同時信頼領域を求め得る。最後のものは,

$$(2.\ 46)\qquad F=\frac{(Q_8[1]^{***\prime}+Q_{10}[1]^{***0})/2}{(Q_1[N-2t]+Q_4[t-1]^*+Q_6[t-2]^*+Q_9[1]^{*0}/(N-2)},\quad 自由度\quad 2,\ (N-2)$$

による。ただし, 分子の $Q_8[1]^{***\prime}$ において $\bar{\alpha}=\alpha$ とおく。さらに, $Q_{10}[1]^{***0}$ は, (2. 42) で $\Delta^0=0$ とおいたもの, 分母の $Q_9[1]^{*0}$は, (2. 32) で $\beta=\delta$ とおいたものである。

さきに, **II 2** (イ) の最後の所で述べた H_4' において, $u=t$ とおいたものが H_{12} に外ならない。その際, H_4' が採択されたときの α, β

信頼区間を求めているのであって，H_7 のように，単に各級の級内母集団回帰が平行直線群で表わされるか否かを問うこととは違う。いまは，成立を前提した3仮説のうちの H_{11} として，その特別な場合 H_{11}' をとって述べたが，一般的な H_{11} であれば，第2図から分るように，各級内の平行な回帰直線相互間の距離について制約条件が附加され，この距離について何らの条件を設けない H_7 の場合とは異る。

さきに $Q_8[1]$ については，H_8, H_9 が成立しているときの H_{10} の検定，および，H_8, H_9 が成立するときの γ の信頼区間，さらに H_8 のもとでの γ, δ 同時信頼領域，さらに，$\gamma+\delta\bar{z}$ の信頼区間を求めるために用い得ることを述べたが，その際には，H_8 に規定されているように，各級内平均値の母集団回帰が直線で表わされるという前提条件だけで，まだ級内回帰線相互間の関係については，何らの前提がなされていなかった。今度は，H_8 に加えて H_5: $\beta_i=\beta(i=1, 2, \cdots, t)$ の成立をも前提し，さらに，各級内回帰線と級平均値回帰線との関係を規定した H_{11} の成立をも前提する。このとき，(2. 38) 第2式から

$$\bar{\epsilon}=\bar{x}-\bar{\alpha}-\beta\bar{z}$$

が出るから，H_5, H_8, H_{11} が成立するときの $Q_8[1]$ の値を，3 個の * をつけ，さらに (2. 30) と混同しないようにダッシュをつけると，(この式に関するかぎりは，H_5 の成立だけで足りるが，最後の目的は H_{12} のもとで $\bar{\alpha}=\alpha$ となる場合にあるので，H_8, H_{11} をも前提しておく)

$$(2,\ 44)\qquad Q_8[1]^{***\prime}=\frac{N}{\sigma^2}(\bar{x}-\bar{\alpha}-\beta\bar{z})^2.$$

H_5, H_8, H_{11} の3仮説の外に．さらに H_{13} も成立するときの値には，4 個の * をつけて示すと．

$$(2,\ 45)\qquad Q_8[1]^{****}=\frac{N}{\sigma^2}(\bar{x}-\bar{\alpha}-\beta^0\bar{z})^2.$$

以上の H_5, H_8, H_{11}, H_{13} が採択されたとき．

H_{14}:　$\bar{\alpha}=\bar{\alpha}^0$,　(ただし．$H_5$, H_8, H_{11}, H_{13} の成立を前提して)

という帰無仮説のもとでの値には．さらにもう 1 個の * をつけて示せ

＊をつけて示すと，（2. 41）を（1. 29）第2式に代入して，

$$Q_{10}[1]^{***}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{[\{S(xz)+\varDelta^0 B(z^2)\}-\beta S(z^2)]^2}{S(z^2)} \tag{2. 42}$$

を得る。H_5, H_8, H_{11} が成立したとき，さらに

H_{13}: $\beta=\beta^0$，（ただし，H_5, H_8, H_{11} の成立を前提して）

が成立すれば，そのときの（2. 42）の値を，さらに1個の＊を附加して示すと，

$$Q_{10}[1]^{****}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{[\{S(xz)+\varDelta^0 B(z^2)\}-\beta^0 S(z^2)]^2}{S(z^2)} \tag{2. 43}$$

となるから，H_5, H_8, H_{11} が採択された後に，

$$F=\frac{Q_{10}[1]^{****}}{(Q_1[N-2t]+Q_4[t-1]^*+Q_6[t-2]^*+Q_9[1]^{**})/(N-2)}$$

自由度　1, $(N-2)$

を用いて H_{13} を検定できる。この式の分子として，＊を1つ取り去った（2. 42）を用いれば，H_5, H_8, H_{11} の成立を前提した場合の β の信頼区間を求めることができるし，今の場合は，（2. 36）が成立しているから，同時に δ の信頼区間が求まる。$\delta^0=\beta^0-\varDelta^0$ とおけば，H_5, H_8, H_{11} の成立を前提した場合，いまの H_{13} と，

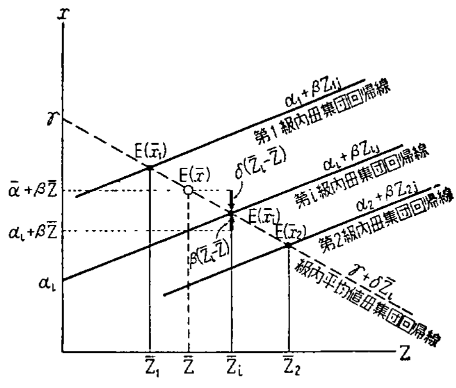
H_{13}': $\delta=\delta^0$，（ただし，H_5, H_8, H_{11} の成立を前提して）

とが同等であることは言うまでもない。なお，（2. 43）で $\varDelta^0=\beta^0=0$ とおいたものは，（1. 29）第2式で ϵ の代りに x と書いたものになっている。

ここに述べた H_{13} と，さきに述べた H_7 とは，一見すると同じようであるが，H_7 の検定のためには，何ら前提条件を必要としないのに対して，H_{13} では，H_5, H_8, H_{11} の3者が既に成立していなければならない。

H_{11} として，その特別な場合 H_{11}' をとれば，成立を前提された3者と H_{12} とは同等だから，この場合の H_{13} は，すべての級内母集団回帰が $\alpha+\beta z_{ij}$ という　ただ1つの直線で表わされることを前提した上で，β の特定値に関して検定を行い，それに続いて，その際の β の

第 2 図



を得る。これら 2 式から，

(2. 39)　　$\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}=(x_{ij}-\bar{x})-(\alpha_i-\bar{\alpha})-\beta(z_{ij}-\bar{z})$

が出る。(2. 38) 第 2 式から $E(\bar{x})=\bar{\alpha}+\beta\bar{z}$, H_8 から $E(\bar{x}_i)=\gamma+\delta\bar{z}_i$, $E(\bar{x})=\gamma+\delta\bar{z}$, となって，$\alpha_i$, $\bar{\alpha}$, $\bar{z}_i$, $\bar{z}$ の関係は，第 2 図に示すように，$E(\bar{x}_i)-E(\bar{x})=\delta(\bar{z}_i-\bar{z})$, $E(\bar{x}_i)-(\alpha_i+\beta\bar{z})=\beta(\bar{z}_i-\bar{z})$ となるから，$\bar{\alpha}-\alpha_i=E(\bar{x})-(\alpha_i+\beta\bar{z})$ と (2. 36) を用いて

(2. 40)　　$\bar{\alpha}-\alpha_i=(\beta-\delta)(\bar{z}_i-\bar{z})=\Delta^0(\bar{z}_i-\bar{z})$

が出る。これを (2. 39) に代入すれば，

$$\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}=(x_{ij}-\bar{x})+\Delta^0(\bar{z}_i-\bar{z})-\beta(z_{ij}-\bar{z})$$

となる。この両辺に $(z_{ij}-\bar{z})$ を乗じて，i, j について総和すれば，

$$S(\epsilon z)=S(xz)+\Delta^0 B(z^2)-\beta S(z^2).$$

したがって，

(2. 41)　　$$\frac{\{S(\epsilon z)\}^2}{S(z^2)}=\frac{[\{S(xz)+\Delta^0 B(z^2)\}-\beta S(z^2)]^2}{S(z^2)}$$

となるから，H_5, H_8, H_{11} が成立した場合の $Q_{10}[1]$ の値を，3 個の

1図から明かである。すなわち，H_5, H_8, H_{11}' の3者の同時成立と，帰無仮説

$$H_{12}:\quad \alpha_i=\alpha,\quad \beta_i=\beta,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

（H_4 で $u=t$, $l=1$ とおいた場合）

とは同等である。したがって，これら3個の仮説検定を全部同時にやれば，仮説 H_{12} の検定がなされることになる。これは，

$$(2.\ 35)\qquad F=\frac{(Q_4[t-1]^*+Q_6[t-2]^*+Q_9[1]^{*0})/2(t-1)}{Q_1[N-2t]/(N-2t)},$$

自由度　$2(t-1)$, $(N-2t)$

で行うことができる。ただし，この式の分子に現われている $Q_9[1]^{*0}$ は，(2. 32) において $\beta=\delta$ とおいた統計量である。

さきに，**II 2**（イ）において，$Q_2[t]$ と $Q_3[t]$ とを結合して行う検定法を述べたが，その際の H_4' で $u=t$ とおいた場合が H_{12} に外ならないから，(2. 10) の信頼楕円を t 個の全部の級について描いてみる方法に比較して，現在の検定法が，いかにスマートであるかが分るであろう。

以上の検定で必要とされる統計量を計算するには，(2. 11) (2. 25) を (2. 34) に代入して得る次の式によるのが便利である。

$$Q_9[1]^{**}=\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{W(xz)}{W(z^2)}-\frac{B(xz)}{B(z^2)}-\Delta^0\right]^2\frac{W(z^2)B(z^2)}{S(z^2)}$$

この式で $\Delta^0=0$ とおいたもの，すなわち，(2. 32) で $\beta=\delta$ とおいた $Q_9[1]^{*0}$ は，(1. 29) 第1式で ϵ の代りに x と書いたものになっている。

$Q_{10}[1]$ については，H_5, H_8, H_{11} が成立するとき，

$$(2.\ 36)\qquad \beta_i=\beta=\delta+\Delta^0,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

となり，第2図に示すように各級内回帰線は平行線となったうえ，級内平均値の母集団回帰も直線となる。

$$(2.\ 37)\qquad \bar{\alpha}=\frac{1}{N}\sum_i n_i\alpha_i$$

と定義すると，(1. 1) から $\beta_i=\beta$ を用いて，

$$(2.\ 38)\qquad \begin{cases} x_{ij}=\alpha_i+\beta z_{ij}+\epsilon_{ij}, \\ \bar{x}=\bar{\alpha}+\beta\bar{z}+\bar{\epsilon} \end{cases}$$

21）第2式・第3式の $Q_7[1]$, $Q_8[1]$ において ϵ の代りに x と書いたものになっていることが注目される。

$Q_9[1]$ については，H_8 が成立するときの　その値を，＊をつけて示すと，(2. 12) (2. 13) および (2. 26) を (1. 29) 第1式へ代入して，

$$(2.\ 32)\qquad Q_9[1]^*=\frac{1}{\sigma^2}[(\hat{\beta}-\beta)-(\hat{\delta}-\delta)]^2\ W(z^2)B(z^2)/S(z^2)$$

が出る。

$$(2.\ 33)\qquad \beta-\delta=\Delta$$

と定義し，この差 Δ の特定値を Δ^0 として，

H_{11}：$\Delta=\Delta^0$,（ただし，H_8 の成立を前提して）

のもとでの (2. 32) の値を，さらに1個の＊を附加して示せば，

$$(2.\ 34)\qquad Q_9[1]^{**}=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta}-\hat{\delta}-\Delta^0)^2\,W(z^2)B(z^2)/S(z^2)$$

となり，H_8 が採択された後に，H_{11} を

$$F=\frac{Q_9[1]^{**}}{(Q_1[N-2t]+Q_6[t-2]^*)/(N-t-2)}$$

自由度　1, $(N-t-2)$

で検定できる。この式の分子で肩の＊を1つだけ取った (2. 32) を用いれば，Δ についての信頼区間を作ることができる。

H_{11} で指定された特定値 Δ^0 を，特に0とおいた場合を，H_{11}' とする。

H_{11}'：$\Delta=0$,（ただし，H_8 の成立を前提して）

この仮説検定は，級内平均値の母集団回帰線の傾斜が，各級内回帰線の傾斜の加重平均値 (2. 13) と等しいか否かを問うものである。この検定に際しては，H_8 が既に採択されていなければ無意味であるが，もし，これに加えて H_5 が採択されていれば，$\beta_i=\beta(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$ が成立しており，これら2つの仮定に加えて，さらに　もう1つ今述べた仮説 H_{11}' が採択されれば，$\beta=\delta$ となり，各級内の回帰線と級平均値の回帰線とが　すべて完全に一致する。このことは，さきの第

の＊を附加して示すと，

$$Q_8[1]^{**}=\frac{N}{\sigma^2}(\bar{x}-\gamma-\delta^0\bar{z})^2 \tag{2. 29}$$

になる。H_8, H_9 の 2 つの仮説の成立を前提したとき，γ が特定値 γ^0 に等しいという帰無仮説，

H_{10}： $\gamma=\gamma^0$, （ただし，H_8 および H_9 の成立を前提して）

のもとでの（2. 29）の値を，3 個の＊をつけて示すと，

$$Q_8[1]^{***}=\frac{N}{\sigma^2}(\bar{x}-\gamma^0-\delta^0\bar{z})^2 \tag{2. 30}$$

になるから，H_8, H_9 が成立した場合に，H_{10} を

$$F=\frac{Q_8[1]^{***}}{(Q_1[N-2t]+Q_6[t-2]^*+Q_7[1]^{**})/(N-t-1)},$$

自由度　1, $(N-t-1)$

で検定できる。この式の分子の肩の＊を 1 つ取り去った（2. 29）を用いれば，H_8, H_9 が成立するときの γ の信頼区間を作ることができる。

また，H_8 が採択された場合，γ, δ の同時信頼領域は，（2. 27）（2. 28）を用いて，

$$F=\frac{(Q_7[1]^*+Q_8[1]^*)/2}{(Q_1[N-2t]+Q_6[t-2]^*)/(N-t-2)},$$

自由度　2, $(N-t-2)$

によって作ることができる。この式の分子で $Q_8[1]^*$ だけを用い，2 で割るのを止め，自由度を 1, $(N-t-2)$ にすれば，$\gamma+\delta\bar{z}$ の信頼区間を求め得る。

以上の検定および区間推定に当って必要となる値を実際に計算するには，（2. 24）（2. 30）のほか，次の関係を用いるのが便利である。

$$Q_7[1]^{**}=\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{\{B(xz)\}^2}{B(z^2)}-2\delta^0B(xz)+(\delta^0)^2B(z^2)\right]. \tag{2. 31}$$

（2. 24）の $Q_6[t-2]^*$ は，H_8 が成立するときには，δ^0, γ^0 の如何にかかわらず（1. 23）の $Q_6[t-2]$ で ϵ の代りに x と書いたものになっており，（2. 31）（2. 30）は，$\delta^0=\gamma^0=0$ の場合に，それぞれ（1.

ときの推定誤差平方和 $Q_6[t-2]^*$ を誤差分散と対比している点で，H_8 の検定において（2. 24）による方法が最も適当なものであるか否かは，なお検討の余地がある。

また，$Q_7[1]$ については，H_8 が成立するときの　その値を＊をつけて示すと，

$$\hat{\delta}=\frac{B(xz)}{B(z^2)} \tag{2. 25}$$

という統計量を導入するとき，（1. 20）（2. 22）から

$$\mu=\hat{\delta}-\delta \tag{2. 26}$$

が出て，これを（1. 21）第2式に代入し

$$Q_7[1]^*=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\delta}-\delta)^2B(z^2) \tag{2. 27}$$

となる。H_8 に加えて，δ が特定値 δ^0 に等しいという帰無仮説，

H_9:　$\delta=\delta^0$　（ただし，H_8 の成立を前提して）

が成立するときの（2. 27）の値を，さらに1個の＊を附加して示せば，

$$Q_7[1]^{**}=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\delta}-\delta^0)^2B(z^2)$$

となる。したがって，H_8 の成立を前提した上での H_9 の検定には，

$$F=\frac{Q_7[1]^{**}}{(Q_1[N-2t]+Q_6[t-2]^*)/(N-t-2)},$$

自由度　1，$(N-t-2)$

を用いることができる。分母に $Q_6[t-2]^*$ を含めたのは，H_9 の検定のためには，予め H_8 が採択されていなければ無意味だからである。この式で，分子の肩の＊を1つ取り去った（2. 27）を用いれば，δ の信頼区間を作り得ることは見易い。この場合も，予め H_8 が採択されていなければ無意味であることは言うまでもない。

$Q_8[1]$ については，H_8 が成立するときの　その値を＊をつけて示すと，（2. 19）第2式を（1. 21）第3式に代入して，

$$Q_8[1]^*=\frac{N}{\sigma^2}(\bar{x}-\gamma-\delta\bar{z})^2 \tag{2. 28}$$

を得る。H_8 に加えて H_9 が成立するときの　その値を，さらに1個

$$H_8': \quad \bar{x}_i=\gamma+\delta\bar{z}_i+\bar{\epsilon}_i, \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

とは同等である。

H_8 が成立するとき，

$$(2.\ 19) \qquad \begin{cases} \bar{\epsilon}_i=x_i-\gamma-\delta\bar{z}_i, \\ \bar{\epsilon}=\bar{x}-\gamma-\delta\bar{z} \end{cases}$$

が出て，これらを辺々相減ずると，

$$(2.\ 20) \qquad \bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon}=(\bar{x}_i-\bar{x})-\delta(\bar{z}_i-\bar{z})$$

を得る。両辺を二乗して n_i を掛け，i について加え合わせると，

$$(2.\ 21) \qquad B(\epsilon^2)=\sum_i n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})^2=\sum_i n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2$$

$$-2\delta\sum_i(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{z}_i-\bar{z})+\delta^2\sum_i(\bar{z}_i-\bar{z})^2$$

$$=B(x^2)-2\delta B(xz)+\delta^2 B(z^2).$$

同じように，(2. 20) の両辺に $n_i(\bar{z}_i-\bar{z})$ を掛け，i について総和すれば，

$$(2.\ 22) \qquad B(\epsilon z)=B(xz)-\delta B(z^2)$$

を得て，後者から

$$(2.\ 23) \qquad \frac{\{B(\epsilon z)\}^2}{B(z^2)}=\frac{\{B(xz)\}^2}{B(z^2)}-2\delta B(xz)+\delta^2 B(z^2)$$

が出るので，H_8 または H_8' のもとでの $Q_6[t-2]$ の値を＊つけて示すとき，(2. 21) (2. 23) を (1. 23) に代入して，

$$(2.\ 24) \qquad Q_6[t-2]^*=\frac{1}{\sigma^2}\left[B(x^2)-\frac{\{B(xz)\}^2}{B(z^2)}\right]$$

となる。これは，H_8 のもとで $Q_1[N-2t]$ とは独立な χ^2 変量になるから，

$$F=\frac{Q_6[t-2]^*/(t-2)}{Q_1[N-2t]/(N-2t)}, \quad \text{自由度} \quad (t-2),\ (N-2t)$$

によって，H_8 または H_8' を検定することができる。

ただ，この場合，通常の直線性の検定であれば，$\bar{x}_i$ の $\bar{z}_i$ に関する相関比の二乗と，相関係数の二乗との差を，誤差分散と比較して検定するところであるが[10]，ここでは，$\bar{x}_i$ の $\bar{z}_i$ に関する回帰が直線である

$$Q_5[1]^* = \frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{\{W(xz)\}^2}{W(z^2)} - 2\beta^0 W(xz) + (\beta^0)^2 W(z^2)\right]$$

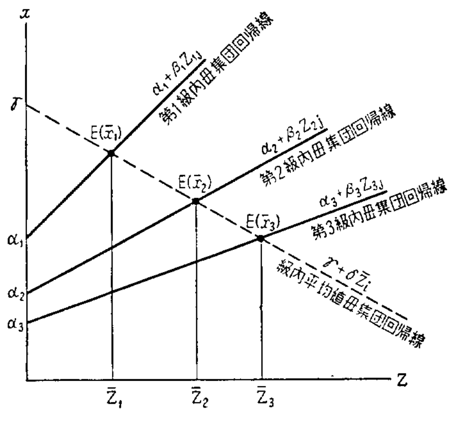
はじめの式は，β^0 の如何にかかわらず（1. 27）の $Q_4[t-1]$ で ϵ の代りに x と書いたものであり，第2式は，$\beta^0=0$ のとき，（1. 25）の $Q_5[1]$ で ϵ の代りに x と書いたものになっていることが注目される。

$Q_6[t-2]$ を用いて行い得る検定は，観測された t 個の級すべてについて，級内平均値の回帰が直線的であるという帰無仮説，

H_8:　$E(\bar{x}_i)=\gamma+\delta\bar{z}_i$,　$(i=1, 2, \cdots, t)$

である。（1. 1）で想定した各級内母集団回帰線と，H_8 の想定する級内平均値の母集団回帰線との関係は，第1図から明かであろう。この

第 1 図



図は，Mood によるものである。[9]（1. 1）から，

$$\bar{x}_i=\alpha_i+\beta_i\bar{z}_i+\bar{\epsilon}_i,\quad (i=1, 2, \cdots, t)$$

したがって，

$$E(\bar{x}_i)=\alpha_i+\beta_i\bar{z}_i$$

が出るから，H_8 と

$$Q_5[1]^* = \frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta}-\beta^0)^2 W(z^2)$$

となる。はじめ，H_5 によって β_i $(i=1, 2, \cdots, t)$ が同一値をとることを確めた後，H_7 によって　その同一値が特定値 β^0 であるか否かを問うには，

$$F = \frac{Q_5[1]^*}{(Q_1[N-2t]+Q_4[t-1]^*)/(N-t-1)}, \tag{2. 18}$$

自由度　1，$(N-t-1)$

を用いることができる。分母に $Q_4[t-1]^*$ を含めたのは，すでに H_5 が採択されているから，$Q_4[t-1]^*$ が自由度 $t-1$ の χ^2 分布に従い，これが $Q_1[N-2t]$ および $Q_5[1]^*$ と独立になるからである。

さらに，H_7 が採択されたとき，(2. 18) の分子の肩の $*$ を取り去った変量によって，全級に共通な回帰係数 β の信頼区間を求めることができる。

もし，上記のように H_5 を先ず検定し，それが採択されてから H_7 に進むことをせずに，はじめから H_7 を問題にするときは，$Q_4[t-1]$ と $Q_5[1]$ とを結合した

$$F = \frac{(Q_4[t-1]^*+Q_5[1]^*)/t}{Q_1[N-2t]/(N-2t)}, \quad \text{自由度} \quad t, (N-2t)$$

を用いて検定を行い，この式の分子の肩の $*$ を取った変量によって β の区間推定を行うべきことは見易い。しかし，この場合には H_7 は，H_1 において $u=t$, $\beta_i{}^0=\beta^0$, $(i=1, 2, \cdots, t)$ とおいた仮説であること，同時に (1. 26) によって $Q_4[t-1]$ と $Q_5[1]$ との和は $Q_2[t]=\sum_i Q_2{}^i[1]$ に等しいことを考えると，上記の F の値は (2. 2) の特別の場合に過ぎないことを知る。

以上の検定および区間推定で必要となる統計量の実際の計算には，(1. 17) 第2式と (2. 11) を (2. 15) (2. 17) に代入して出る次の関係式を用いるのが便利である。

$$Q_4[t-1]^* = \frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_i \frac{\{w_i(xz)\}^2}{w_i(z^2)} - \frac{\{W(xz)\}^2}{W(z^2)}\right]$$

H_5':　$\beta_1=\beta_2$　　に対しては，(2. 15) は (2. 11) を用いて

$$Q_4[1]^*=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)^2\left[\frac{1}{w_1(z^2)}+\frac{1}{w_2(z^2)}\right]$$

となって，よく知られた2つの回帰係数の有意差検定に帰着する。

H_5 を少し一般化して，$\beta_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$ 相互間の差を指定した帰無仮説

H_6:　$\beta_i=\beta+d_i^0,\quad d_t^0=0,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$

も，H_5 と同じような方法で検定できることは容易に分る。H_6 では，相異る β_i の間の差違だけが問題だから，そのうちの1つ (とたえば β_t) を β としてある。

特に $t=2$ の場合，$d_1^0=d$ と記すとき，H_6 は

H_6':　$\beta_1-\beta_2=d$

となり，(2. 14) は (2. 13) を用いて，

$$Q_4[1]=\frac{1}{\sigma^2}\left[(\hat{\beta}_1-\hat{\beta}_2)^2\left\{\frac{1}{w_1(z^2)}+\frac{1}{w_2(z^2)}\right\}\right.$$
$$\left.-\frac{2d}{W(z^2)}\{(\hat{\beta}_1-\hat{\beta})w_1(z^2)-(\hat{\beta}_2-\hat{\beta})w_2(z^2)\}+\frac{d^2}{W(z^2)}\right]$$

となる。これを用いて

$$F=\frac{Q_4[1]}{Q_1[N-4]/(N-4)},\quad \text{自由度}\quad 1,\ (N-4)$$

から，2 つの回帰係数の差 d の信頼区間を求めることができる。$d=0$ のとき，H_6' が H_5' に，$Q_4[1]$ が $Q_4[1]^*$ に帰することは当然である。

次に $Q_5[1]$ については，(2. 12) (2. 13) から得られる $\lambda=\hat{\beta}-\beta$ を (1. 25) 第2式に代入して，

$$(2.\ 17)\qquad Q_5[1]=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta}-\beta)^2W(z^2)$$

が出るから，

H_7:　$\beta_i=\beta^0,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$

(H_1' において，$u=t,\ l=1$ とおいた場合，または，H_1 において $u=t,\ \beta_i^0=\beta^0,\ (i=1,\ 2,\ \ ,\ t)$ とした場合)

が成立したときの (2. 17) の値を，＊をつけて示すと，

するとき，

$$(2,\ 15)\qquad Q_4[t-1]^*=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\hat{\beta}_i-\hat{\beta})^2w_i(z^2)$$

は，自由度 $t-1$ の χ^2 分布に従い，$Q_1[N-2t]$ と独立である。上式右辺には，σ^2 を除いて何らの母数は含まれていない。それ故，上記の帰無仮説 H_5 を，

$$F=\frac{Q_4[t-1]^*/(t-1)}{Q_1[N-2t]/(N-2t)},\quad \text{自由度}\quad (t-1),\ (N-2t)$$

で検定することができる。$n_i=n$，$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$ すなわち各級内の観測個数の等しい場合は[8]よく知られている。しかし，『統計数値表』の解説で，誤差項の自由度が $N-2t$ ではなくて $N-t$ に相当する値になっていることは，確率模型として（1．1）をとるかぎり適当ではない。何故ならば，（1．12）から

$$x_{ij}-\bar{x}_i=\beta_i'z_{ij}-\bar{z}_i)+(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)$$

が出て，

$$x_{ij}-\bar{x}_i=x_{ij}',\ z_{ij}-\bar{z}_i=z_{ij}',\ \epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i=\epsilon_{ij}'$$

とおくとき，

$$(2.\ 16)\qquad x_{ij}'=\beta_iz_{ij}'+\epsilon_{ij}'$$

となり，各級で推定さるべき未知母数は β_i ただ1個になる。したがって，（2．16）の ϵ_{ij}' が，母平均 0，母分散 σ^2 の正規分布に従い，$i,\ j$ のいずれについても互に独立であるならば，推定誤差平方和の自由度は，級内では n_i-1，全級を合算して $N-t$ となる。しかし，本論文の出発点となった確率模型では，ϵ_{ij} が $i,\ j$ について互に独立であることを前提しており，$\epsilon_{ij}'=\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i$ には j に関して共通な $\bar{\epsilon}_i$ が含まれているから，ϵ_{ij}' の方は，もはや互に独立ではない。それ故，$Q_4[t-1]$ を用いての検定において，誤差項の自由度を $N-t$ とすることは，級内平均値からの偏差についての（2．16）における ϵ_{ij}' について独立性を前提する場合には正しいが，本論文の前提のもとでは正しくない。

H_5 における特別の場合として，$t=2$ のとき，

が採択されたときの（α, β）の同時信頼領域を求めるには，（2. 9）の分子から分るように $2\bar{u}$ 個の2次式の和の形の不等式を解かなければならない。以上で $Q_3[t]$ を用いての推定および検定を終る。

（ロ）

前節（イ）では，観測された t 個の回帰方程式のうちの一部 u 個（$u \leqq t$）だけを問題とする第2のグループ別を用いたが，本節では，**II 1**（ハ）の第1のグループ別を用いて，常に t 個全部を問題とする。$\sum_i$ とあるものは，既述のように，いつでも $\sum_{i=1}^{t}$ を意味する。

まず $Q_4[t-1]$ について述べる。（1. 17）第2式で定義された各級内回帰係数の推定子 $\hat{\beta}_i$ の加重平均，

$$\text{(2. 11)} \qquad \hat{\beta}=\frac{\sum_i w_i(z^2)\hat{\beta}_i}{\sum_i w_i(z^2)}=\frac{\sum_i w_i(xz)}{\sum_i w_i(z^2)}=\frac{W(xz)}{W(z^2)}$$

という統計量を導入する。（1. 18）を（1. 24）に代入して（2. 11）を用い，

$$\text{(2. 12)} \qquad \lambda=\frac{\sum_i w_i(z^2)(\hat{\beta}_i-\beta_i)}{\sum_i w_i(z^2)}=\hat{\beta}-\frac{\sum_i w_i(z^2)\beta_i}{\sum_i w_i(z^2)}$$

を得る。ここで（2. 11）の母数に相当するものを，

$$\text{(2. 13)} \qquad \beta=\frac{\sum_i w_i(z^2)\beta_i}{\sum_i w_i(z^2)}$$

と定義すると，（1. 18）（1. 25）から（2. 12）を用いて，

$$\text{(2. 14)} \qquad Q_4[t-1]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i[(\hat{\beta}_i-\beta_i)-(\hat{\beta}-\beta)]^2 w_i(z^2)$$

したがって，観測された t 個の級全部について，その級内母集団回帰係数が等しいという帰無仮説

H_5:　$\beta_i=\beta$,　($i=1,\ 2,\ \cdots,\ t$)

（H_2 において，$u=t$, $l=1$ とおいた場合）

のもとでの $Q_4[t-1]$ の値を，右肩に＊をつけて示すと，H_5 が成立

$$(2.\ 9)\qquad F=\frac{\sum_{i=1}^{u}(Q_2{}^i[1]^*+Q_3{}^i[1]^*)/2u}{Q_1[N-2t]/(N-2t)},\ \text{自由度}\quad 2u,\ (N-2t)$$

を用いる。ここで分子の肩へ＊をつけたのは，α_i, β_i の値として H_3 の指定する値を代入したことを示す。

さきに（2. 4）を用いて β_i に関して作った各級別の信頼区間に対応するものは，（2. 8）に対して各級の級別を示す添字をつけた

$$(2.\ 10)\qquad F_i=\frac{(Q_2{}^i[1]+Q_3{}^i[1])/2}{Q_1{}^i[n_i-2]/(n_i-2)},\ \text{自由度}\quad 2,\ (n_i-2)$$

を用いて，$(\alpha_i,\ \beta_i)$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ u)$ に関して作った級別信頼楕円である。便宜上これを楕円 i と呼ぶ。α-β 平面上に，u 個の級別信頼楕円を描いたとき，$h=1,\ 2,\ \cdots,\ l$ について，t_h 個の楕円 $i(i\epsilon M_h)$ が，与えられた点 $(\alpha_{(h)}{}^0,\ \beta_{(h)}{}^0)$ を覆うならば，帰無仮説

$$H_3{}':\quad \alpha_i=\alpha_{(h)}{}^0,\quad \beta_i=\beta_{(h)}{}^0,\quad i\epsilon M_h,\quad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$$

は棄てられない。ここに現われる l 個の点を特定の点として固定しないならば，帰無仮説

$$H_4:\quad \alpha_i=\alpha_{(h)},\quad \beta_i=\beta_{(h)},\quad i\epsilon M_h,\quad (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$$

は棄てられない。

H_4 が採択されたとき，（2. 6）を今の場合に拡張して作った

$$F_{(h)}=\frac{\Sigma_{(h)}(Q_2{}^i[1]+Q_3{}^i[1])/2t_h}{\Sigma_{(h)}Q_1{}^i[n_i-2]/(N_h-2t_h)},\ \text{自由度}\quad 2t_h,\ (N_h-2t_h)$$

の分子において，$\alpha_i=\alpha_{(h)}$, $\beta_i=\beta_{(h)}$, $(i\epsilon M_h)$ とおきかえたものを用いれば，グループ毎に $(\alpha_{(h)},\ \beta_{(h)})$ $(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ の信頼領域を作ることができる。

α_i, β_i を同時に考える場合には，（2. 9）の分子の＊を取り去った変量を用いて，$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_u,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_u)$ の同時信頼領域，および，H_4 が採択された場合の $(\alpha_{(1)},\ \alpha_{(2)},\ \cdots,\ \alpha_{(l)},\ \beta_{(1)},\ \beta_{(2)},\ \cdots,\ \beta_{(l)})$ の同時信頼領域を導出できる。しかし，その計算が複雑になるため実用価値は少い。一例を挙げれば，H_4 で $l=1$ とおいた帰無仮説

$$H_4{}':\quad \alpha_i=\alpha,\quad \beta_i=\beta,\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ u)$$

まず，家計の貯蓄額 x を所得額 z の一次式として表わす。次に，社会的に決まる最低生計費とは，家計が現在財の調達に追われて，将来への配慮を行うことができず，貯蓄額が零となるような所得水準であると定義する。この定義は，カロリー計算その他物理的尺度からする最低生計費の概念にかえて，何らか経済学的な意味での最低生計費の定義を求めようとして到達した結果であった。母集団における最低生計費 $z_{\min}$ は，$E(x)=\alpha+\beta z_{\min}=0$ から，$z_{\min}=-\alpha/\beta$ と出る。(2. 8) を用いて α, β に関する信頼楕円を作り，その内部の (α, β) の組合せについて，$-\alpha/\beta$ の最大値と最小値を計算して，上に定義した最低生計費の信頼区間とする。以上が最低生計費の算定についての方法の大要である。一見すると，$E(x)=\alpha+\beta z$ なる直線と横軸との交点の横座標が，上に言う $z_{\min}$ に外ならないから，このように α, β の同時信頼領域を考えなくても，説明変数の平均値 $\bar{z}$ における母集団回帰線の高さ $\alpha+\beta\bar{z}$ の信頼区間 $[a, b]$ $(a<b)$ と，直線の傾斜 β の信頼区間 $[c, d]$ $(c<d)$ とを考え，これら二つの信頼区間を結合して，点 $(\bar{z}, a)$ を通り傾斜 c または d をもつ直線と横軸の交点，および，点 $(\bar{z}, b)$ を通り傾斜 c または d をもつ直線と横軸との交点によって，最低生計費の信頼区間を求めた方が簡便であると思われるかも知れない。しかし，第2表の $Q_2[1]$ と $Q_3[1]$ とは互に独立であっても，それらを同一の $Q_1[N-2]$ で割ったものは　もはや互に独立ではなくなるから，$\alpha+\beta\bar{z}$ と β の信頼区間を (2. 5) と同じ方針で結合して α, β なる2母数を含む $z_{\min}=-\alpha/\beta$ の信頼区間を導き出すことはできない。以上は $t=1$ の場合であり，本論文にとっては　いわば予備的考察であるが，$t\geqq 2$ のときも原理には変りない。

さきの H_1 に対応するものは，今度は，α_i および β_i の特定値 α_i^0, $\beta_i^0 (i=1, 2, \cdots, u)$ を指定して，

$$H_3:\quad \alpha_i=\alpha_i^0,\quad \beta_i=\beta_i^0,\quad (i=1, 2, \cdots, u)$$

となる。これを検定するには，

変数として所得額，被説明変数として問題としている支出費目への支出額をとるとき，$\alpha_i+\beta_i\bar{z}_i$ は「級内平均所得額に対応する平均支出額」を示す。そのような平均支出額に有意な差があるかどうかを，2 個またはそれ以上の級について比較検定することができることになる。そして，観測された t 個の回帰方程式のうちの u 個 ($u\leqq t$) だけを問題にし得ることや，その中でグループを作り得ることなど，すべて $Q_2[t]$ について述べたと同じことが成立する。

しかし一見して分るように，$\alpha_i+\beta_i\bar{z}_i$ には，母数 α_i, β_i のほかに説明変数 $\bar{z}_i$ が含まれており，これを通じての外部的影響が強く現われる。説明変数の級内平均値 $\bar{z}_i(i=1, 2, \cdots, t)$ を，各級を通じて同一水準に保つことができる場合には，「修正されない平均値」$\alpha_i+\beta_i\bar{z}_i$ の有意差の検定で足りるが，$\bar{z}_i$ を十分に制御できないときには，その影響を除いて「修正された」平均値を比較の対象としなければならない。これは統計学教科書で，「修正された平均値の比較」として述べられている問題であり，さきの消費函数の例で言えば，これによって「所得の影響を取り除いたときの平均支出額」に差があるか否かを検定できることになる。この方法は，本論文の主題とも関係があるので，その大要を最終節 **III 2** (ハ) に記した。そこでは $Q_2[t]$ と $Q_3[t]$ とが同時に用いられることになるが，ここでは，$Q_2[t]$ と $Q_3[t]$ とを，それとは別の形で結合して用い，α_i と β_i とを同時に考える方法に進むことにする。

まず　予備的に，$t=1$ の場合について考える。第 2 表から

$$F=\frac{(Q_2[1]+Q_3[1])/2}{Q_1[N-2]/(N-2)}, \text{ 自由度 } 2,\ N-2 \tag{2.8}$$

を用いて，α, β の同時信頼領域（これは楕円になる）を作ることができる。このことは Mood の教科書にも記されているが[6]，筆者は，嘗って，この考方に基づいて，最低生計費の区間推定を試みたことがある[7]。これを載せた刊行物が，拙稿とは別に当時「秘」扱いの統計資料を含んでいたため，限定された部数しか出ていないので，ここに　その方法の大要を記すことを許していただきたい。

問題にするよりも，グループ毎に回帰係数の差があるか否かの問題の方が重要なことが多い。その一例は本論文の序説に挙げておいたが，参考文献〔2〕の小宮氏の論文にも，数種類の例が示されている。ただ，この場合，上に述べた方法では，まず，予め規定されたグループ別が許されるか否かを見るために，同時的信頼領域の方法に従うとすれば，H_2 に指定した部分空間が同時信頼領域と交わるかどうかの検証はかなり面倒であり，級別信頼区間の方法によれば，問題となっている u 個の回帰係数全部について信頼区間を作らなければならない。そして次に，そのようなグループ別が許され得ると判定されたとき，グループ別の回帰係数 $\beta_{(1)}$, $\beta_{(2)}$, …, $\beta_{(l)}$ の信頼領域を作ろうとするとき，これらの同時的信頼領域の方法をとれば，(2. 2) の分子の＊を取ったものを用いて β_1, β_2, ‥, β_u について行った同時信頼領域の計算を，β_i が一部分ずつ $\beta_{(h)}$ に等しいという条件の下で，もう一度繰り返さなければならないし，グループ毎の個別的信頼区間の方法によれば，(2. 6) の分子は $\beta_{(h)}$ の二次式の t_h 個の和になっているから，その計算もかなりの労力を要する。

したがって，$Q_2[t]$ を用いての推定および検定では，H_1 または H_1' の検定は　ともかくとして，H_2 の検定およびグループ毎の母集団回帰係数 $\beta_{(1)}$, $\beta_{(2)}$, …, $\beta_{(l)}$ の信頼領域の導出は相当に面倒である。これに対して，以下の（ロ）（ハ）で述べる方法は，この種の問題について　きわめて簡便な解答を与える。ここでグループ別の推定と検定について，あまり実用的でない方法を，やや詳しく述べた理由の一つは，後述の方法の便利さを強調するためでもあった。以上で $Q_2[t]$ についての説明を終る。

$Q_3[t]$ に移る。(1. 11) 第2式を (1. 7) 第4式に代入して，

$$(2.\ 7)\qquad Q_3{}^i[1]=\frac{n_i}{\sigma^2}(\bar{x}_i-\alpha_i-\beta_i\bar{z}_i)^2,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

これを用いて，第 i 級の説明変数が $\bar{z}_i$ なる値をとるときの，母集団回帰線の縦座標の高さ $\alpha_i+\beta_i\bar{z}_i$ の推定および検定を行い得ることは，どの統計学の教科書にも記されている。消費函数の例で言えば，説明

域と同じ信頼係数を希望するならば，$p=(p')^u$ を満すような p' を用いて級別信頼区間を求めておく必要がある。

β_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ u)$ の個別信頼区間を同じ直線上にとるとき，重なり合うものがあれば，それらに対応する級は同一の母集団回帰係数をもつと見なし得る。いま，t_h 個の $\beta_i(i\epsilon M_h)$ の信頼区間が，与えられた点 $\beta^0{}_{(h)}$ $(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ を覆うならば，帰無仮説 H_1' は棄てられない。このとき，$\beta_{(h)}{}^0$ $(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ を特定値に固定せず，各グループ毎に共通な任意の一点でよいとするとき，帰無仮説 H_2 は棄てられない。それ故，グループ分けを予め行わないで，u個の $\beta_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ u)$ について信頼区間を作れば，これらを どのようにグループ分けしてもよいかが推察できる。もっとも，このとき採択さるべきグループ別が，一義的に決まるとは限らない。

1 から u までの級に対して予め与えておいたグループ別，M_1，M_2，$\cdots$，M_l が採択されたとき，または採択され得るようなグループ別をあとから作ったときに，これらのグループ毎に共通な母集団回帰係数 $\beta_{(1)}$，$\beta_{(2)}$，$\cdots$，$\beta_{(l)}$ の同時信頼領域またはグループ別信頼区間を，上記と全く同じ方針で作ることができる。同時信頼領域の場合には，さきと同じように（2. 2）または（2. 3）の肩の＊を取ったものを用いる。今度は，$\beta_i=\beta_{(h)}$，$(i\epsilon M_h,\ h=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ であるから，同時信頼領域は，l 次元空間内の楕円体になる。グループ別の個別的信頼区間ならば，（2. 4）の分子として，同一グループに属するものを合算することができて，

$$(2.\ 6)\qquad F_{(h)}=\frac{\Sigma_{(h)}Q_2{}^i[1]/t_h}{\Sigma_{(h)}Q_1{}^i[n_i-2]/(N_h-2t_h)},$$

自由度　t_h，(N_h-2t_h)

において，分子の $\beta_i(i\epsilon M_h)$ を すべて $\beta_{(h)}$ でおきかえたものを使えばよい。

グループ別と言っても，H_1 で数個ずつの β_i を同じ値にまとめたものが H_1' に外ならないから，以上に述べたことは原理的には自明のことであるが，応用上は，個々の級の間で回帰係数の差があるか否かを

部分空間 $\beta_i=\beta_{(h)}$, $i \in M_h$, $i=1, 2, \cdots, u$; $h=1, 2, \cdots, l$ が，上記の信頼領域と交われば，帰無仮説

$$H_2:\ \beta_i=\beta_{(h)},\ i \in M_h,\ \ (i=1, 2, \cdots, u;\ \ h=1, 2, \cdots, l)$$

は棄てられない。ここに現われた $\beta_{(1)}, \beta_{(2)}, \cdots, \beta_{(l)}$ は，各グループ毎の共通の母集団回帰係数であり，H_2 では，それらの特定値は指定されておらず，ただグループ毎に母集団回帰係数が等しいという関係だけが規定されている。これに対して，ある特定値 $\beta_{(1)}^0$, $\beta_{(2)}^0$, $\cdots$, $\beta_{(l)}^0$ を指定した帰無仮説

$$H_1':\ \beta_i=\beta_{(h)}^0,\ \ i \in M_h,\ \ (i=1, 2, \cdots, u;\ \ h=1, 2, \cdots, l)$$

は，さきの H_1 において数個ずつの β_i を同一値にまとめたものに過ぎないから，H_1 と同じ方針で処理できる。

ここで，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_u$ の信頼領域と言っても，$u \geqq 4$ になると，このような同時信頼領域を作る労力が大変である。その場合には，これらを一括した同時信頼領域よりも，β_i $(i=1, 2, \cdots, u)$ 毎に各級別の信頼区間を作って，それを結合した方が実用的である。すなわち，

$$(2.\ 4)\qquad F_i=\frac{Q_2^i[1]}{Q_1^i[n_i-2]/(n_i-2)},\ \begin{array}{l}\text{自由度}\ \ 1, (n_i-2)\\ (i=1, 2, \cdots, u)\end{array}$$

を用いて，$F_i \leqq F_{i0}$（F_{i0} の値は，自由度と信頼係数に応じて決める）$(i=1, 2, \cdot \cdot, u)$ から，個別的に β_i の信頼区間を作る。(2 .4) では各級間に独立性が前提されているから，

$$(2.\ 5)\qquad F_1 \leqq F_{10} \cap F_2 \leqq F_{20} \cap\ \cdots\ \cap F_u \leqq F_{u0}$$

によって，$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_u$ の信頼区間を導き出して，その信頼係数を次のように計算することができる。

(2. 2) の肩の＊を取った式による同時信頼領域の信頼係数を p, (2. 4) の級別信頼区間の信頼係数を，全級を通じて一律に p' とするとき，

$$P_r(F \leqq F_0)=p,\ P_r(F_i \leqq F_{i0})=p',\ (i=1, 2, \cdots, u)$$

したがって，(2. 5) の各事象の独立性から，

$$P_r(F_1 \leqq F_{10} \cap F_2 \geqq F_{20} \cap \cdot\cdot \cap F_u \leqq F_{u0})=(p')^u$$

この式から分るように，級別信頼区間を結合する方法で，同時信頼領

を用いて F 分布の表を参照すればよい。ここで，分子の総和項の $Q_2{}^i[1]$ の右肩へ＊をつけたのは，$Q_2{}^i[1]$ の中に表われる母数 β_i に対して，帰無仮説 H_1 の指定する値 $\beta_i{}^0$ を代入したことを示す。また，i に関する u までの和は，$\sum_{i=1}^{u}$ または $\sum_{i}^{u}$ と常に上端を記すこととし，上端の記されていない場合は，t個のすべての級についての和 $\sum_{i=1}^{t}$ を意味するものとする。なお，(2. 1) に現われる母数 σ^2 は，(2. 2) では分母子に出ており約されて消えるから問題はない。

もし，当面問題としない $t-u$ 個の級のうちに，母集団回帰係数が既和のものがあれば，再び適当に番号をつけ変えて，これらを最後の v 個 $(v\leqq t-u)$ の級に集めるとき，既知とされた母集団回帰係数を $\beta^0{}_{t-v+1}$, $\beta^0{}_{t-v+2}$, $\cdots$, $\beta_t{}^0$,

$$\sum_{i=t-v+1}^{t} Q_2{}^i[1]^*=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i=t-v+1}^{t}(\hat{\beta}_i-\beta_i{}^0)^2 w_i(z^2)$$

とするとき，これを (2. 2) の分母に込めて，

$$(2.\ 3)\qquad F=\frac{\sum_{i=1}^{u} Q_2{}^i[1]^*/u}{\left(Q_1[N-2t]+\sum_{i=t-v+1}^{t} Q_2{}^i[1]^*\right)/(N-2t+v)}$$

自由度　u, $(N-2t+v)$

を使って H_1 の検定を行えば．残差項が大きくなると同時に　その自由度が増すから，検定力が高まることになる。

この検定法から直ちに分るように，H_1 に現われる β_1, β_2, $\cdots$, β_u を未知数と見て，(2. 2) または (2. 3) の分子の肩の＊を取り去ったものを F とし，指定された自由度と，希望する信頼係数とから決まる F 分布の値を F_0 とするとき，$F\leqq F_0$ によって，β_1, β_2, $\cdots$, β_u の同時信頼領域を作ることができる。これは u 次元空間内の楕円体になる。

II 1 (ハ) で用いたグループ別を若干修正して，当面問題としない $t-u$ 個を全部一括して最終グループ M_{l+1} とし，問題としている u 個を **II 1** (ハ) の方針で，l 個のグループ M_1, M_2, $\cdots$, M_l に分割したとき，これを第 2 のグループ別と呼ぶ。この場合，u 次元空間内の

作り，l 個のグループ $M_1, M_2, \cdots, M_l$ から，m 個（$m<l$）の集団 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ を作るとき，$Q_4{}^M[l-1]$ および $Q_4{}^C[l'-1]$ が，さきの $Q_4[t-1]$ と同じように再々分割され，$Q_6{}^C[l-2]$ が，さきの $Q_6[t-2]$ と同じように再々分割されることが分る。この手続きは，必要に応じて何段階でも繰り返し得る。

2　一元回帰における推定と検定

（イ）

前節で得られた結果は，第1表および第3表に集約されており，この表の中で縦に並んだ変量は，すべて互に独立な χ^2 分布に従い，その合計が最下段の $Q[N]$ になる。しかし，これらの χ^2 変量は，確率変数 ϵ_{ij} を用いて表わされており，すでに何回か述べたように，この確率変数 ϵ_{ij} は実測不可能であるから，これらを観測可能な確率変数 x_{ij} に移す必要がある。そして，第1表および第3表の諸変量のうち，(1. 16) (1. 19) で見た $Q_1{}^i[n_i-2]$および　その合計 $Q_1[N-2t]$ を除いては，まだ観測可能な形になっていない。以下では，順次に ϵ_{ij} から x_{ij} へ移す作業を行うと同時に，その変量を用いて，どのような推定および検定が可能となるかを検討する。

$Q_2[t]$ について考える。(1. 14) を (1. 7) 第3式に代入し，(1. 17) 第2式を用いて，

(2. 1)　$$Q_2{}^i[1]=\frac{1}{\sigma^2}(\hat{\beta}_i-\beta_i)^2w_i(z^2),\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$$

観測された t 個の回帰方程式のうち，u 個（$u\leqq t$）だけを取りあげ，それらの回帰係数が特定値 $\beta_i{}^0$ をとるか否かを問題にするならば，級番号をつけ変えて，当面問題とする u 個を　はじめの部分に集めるとき，帰無仮説

$$H_1:\ \ \beta_i=\beta_i{}^0,\ \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ u)$$

を検定すればよい。それには，

(2. 2)　$$F=\frac{\sum_{i=1}^{u}Q_2{}^i[1]^*/u}{Q_1[N-2t]/(N-2t)},\ \text{自由度}\ \ u,\ (N-2t)$$

第4表　ϵ に関する共分散分析表 ($l\geqq 2,\ l'\geqq 1,\ l''\geqq 1$)

$Q_1[N-2t]$	$Q_1^1[n_1-2]$ $Q_1^2[n_2-2]$	$Q_1^{(1)}[N_1-2t_1]$			
	⋮	⋮			
		$Q_1^{(l')}[N_{l'}-2t_{l'}]$			
		$Q_1^{(l'+1)}[N_{l'+1}-2]$			
	⋮	⋮			
	$Q_1^t[n_t-2]=Q_1^{(l'+l'')}[N_{l'+l''}-2]$				
$Q_2[t]$	$Q_2^1[1]$ $Q_2^2[1]$	$Q_2^{(1)}[t_1]$	$Q_4^{(1)}[t_1-1]$ $Q_6^{(1)}[t_1-2]$		第1グループ
	⋮	⋮	$Q_5^{(1)}[1]$ $Q_7^{(1)}[1]$	$Q_9^{(1)}[1]$ $Q_{10}^{(1)}[1]$	
		$Q_2^{(l')}[t_{l'}]$	$Q_8^{(1)}[1]$		
		$Q_2^{(l'+1)}[1]$	⋮		
	$Q_2^t[1]=Q_2^{(l'+l'')}[1]$		$Q_4^{(l')}[t_{l'}-1]$ $Q_6^{(l')}[t_{l'}-2]$		第 l' グループ
$Q_3[t]$	$Q_3^1[1]$ $Q_3^2[1]$	$Q_3^{(1)}[t_1]$	$Q_5^{(l')}[1]$ $Q_7^{(l')}[1]$	$Q_9^{(l')}[1]$ $Q_{10}^{(l')}[1]$	
	⋮	⋮	$Q_8^{(l')}[1]$		
		$Q_3^{(l')}[t_{l'}]$	$Q_2^{(l'+1)}[1]$ $Q_3^{(l'+1)}[1]$		第 $l'+1$ グループ
		$Q_3^{(l'+1)}[1]$	⋮		
	$Q_3^t[1]=Q_3^{(l'+l'')}[1]$		$Q_2^{(l'+l'')}[1]$ $Q_3^{(l'+l'')}[1]$		第 $l'+l''$ グループ

$$Q[N]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j \epsilon_{ij}^2$$

第3表　ϵ に関する共分散分析表 ($l \geqq 2$, $l' \geqq 1$)

<table>
<tr><td>$Q_1[N-2t]$</td><td colspan="4">$\left.\begin{matrix} Q_1{}^1[n_1-2] \\ Q_1{}^2[n_2-2] \\ \vdots \end{matrix}\right\} Q_1{}^{(1)}[N_1-2t_1]$
$\left.\begin{matrix} \vdots \\ Q_1{}^i[n_i-2] \end{matrix}\right\} Q_1{}^{(h)}[N_h-2t_h]$
$\left.\begin{matrix} \vdots \\ Q_1{}^t[n_t-2] \end{matrix}\right\} Q_1{}^{(l)}[N_l-2t_l]$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$Q_2[t]$</td><td rowspan="3">$\left.\begin{matrix} Q_2{}^1[1] \\ Q_2{}^2[1] \\ \vdots \end{matrix}\right\} Q_2{}^{(1)}[t_1]$
$\left.\begin{matrix} \vdots \\ Q_2{}^i[1] \end{matrix}\right\} Q_2{}^{(h)}[t_h]$
$\left.\begin{matrix} \vdots \\ Q_2{}^t[1] \end{matrix}\right\} Q_2{}^{(l)}[t_l]$</td><td rowspan="2">$Q_4[t-1]$</td><td>$Q_4{}^{(1)}[t_1-1]$
$\vdots$
$Q_4{}^{(h)}[t_h-1]$
$\vdots$
$Q_4{}^{(l')}[t_{l'}-1]$</td><td>} 自由度 $t-l$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Q_4{}^M[l-1]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$Q_6[t-2]$</td><td>$Q_6{}^{(1)}[t_1-2]$
$\vdots$
$Q_6{}^{(h)}[t_h-2]$
$\vdots$
$Q_6{}^{(l')}[t_{l'}-2]$</td><td>} 自由度 $t-l-l'$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$Q_3[t]$</td><td rowspan="3">$\left.\begin{matrix} Q_3{}^1[1] \\ Q_3{}^2[1] \\ \vdots \end{matrix}\right\} Q_3{}^{(1)}[t_1]$
$\left.\begin{matrix} \vdots \\ Q_3{}^i[1] \end{matrix}\right\} Q_3{}^{(h)}[t_h]$
$\left.\begin{matrix} \vdots \\ Q_3{}^t[1] \end{matrix}\right\} Q_3{}^{(l)}[t_l]$</td><td>$Q_4{}^G[l'-1]$
$Q_6{}^G[l-2]$
$Q_9{}^G[1]$</td><td>} 自由度 $l+l'-2$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$Q_5[1]$
$Q_7[1]$</td><td>$Q_9[1]$
$Q_{10}[1]$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$Q_8[1]$</td></tr>
<tr><td colspan="5">$$Q[N]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j \epsilon_{ij}{}^2$$</td></tr>
</table>

が出る。μ, μ_h, ρ, ν が, $\bar{\epsilon}_i(i=1, 2, \cdots, t)$ に関する一次同次式であることを考え，上式左辺の各項を

$$\frac{\bar{\epsilon}_1}{\sigma},\ \frac{\bar{\epsilon}_2}{\sigma},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{\bar{\epsilon}_t}{\sigma}$$

に関する二次形式とみて，(1. 23) の$Q_6[t-2]$ の形を参照すれば，Cochran の定理によって $Q_6[t-2]$ が (1. 49) のように互に独立な χ^2 変量に分割され，それらの自由度が括弧内に記したものになることを知る。また (1. 43) により，(1. 49) の自由度の総計は確かに $t-2$ となる。

$$(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-(\bar{z}_i-\bar{z})\mu=[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon}_{(h)})-(\bar{z}_i-\bar{z}_{(h)})\mu_h]+(\bar{\epsilon}_{(h)}-\bar{\epsilon})$$
$$+(\bar{z}_i-\bar{z}_{(h)})\mu_h-(\bar{z}_i-\bar{z})\mu$$

と書きなおしておいて，両辺を二乗し，n_i を掛けて i について加えても，(1. 49) と同じ結果に到達する。しかし今度は，積の形の総和で消えないものがあるため，計算に若干の工夫を要する。しかし，この計算は略す。

以上をまとめて第3表を得る。この表は，グループ M_h に属する t_h 個の級について，t_h を t とみなして第1表の分割を行い，この種の分割を，$h=1, 2, \cdots, l'$ 個並べ，それへ $h=l'+1, \cdots, l$ についての第2表の分割を l'' 個つけ加えた第4表とは違う点に注目していただきたい。なお，第3表で $l=2$, $l'=1$, $t_h=2$ の各々の場合には，自由度 $l-2$, $l'-1$, t_h-2 の変量は0となる。さらに，$t_h=1$ であるような l'' 個のグループについては，$Q_4[t-1]$, $Q_6[t-2]$ の再分割は，$Q_4{}^M[l-1]$, $Q_6{}^G[l-2]$ に現われるだけで，$Q_4{}^{(h)}[t_h-1]$, $Q_6{}^{(h)}[t_h-2]$ および $Q_4{}^G[l'-1]$ の形では現われない。特別な場合として，t 個の級を $t_h=1$ 個ずつ l 個のグループに分割するときは，($l'=0$, $l''=l=t$) 級別とグループ別は一致して，

$$Q_4[t-1]=Q_4{}^M[l-1],\ Q_6[t-2]=Q_6{}^G[l-2]$$

となることは当然であるが，(1. 47) の対応表から，$Q_9{}^G[1]=Q_9[1]$ となることを知る。

また，第3表を見れば，グループを数個ずつまとめて新たに集団を

(1. 47)

級　　別	w_i, $W+B=S$, λ_i, λ, μ, t,
グループ別	B_h, $U+G=B$, μ_h, ρ, ν, l,

級別の場合の，(1. 25) 第1式および (1. 27) の $Q_4[t-1]$, (1. 21) 第1式および (1. 23) の $Q_6[t-2]$, (1. 29) 第1式の $Q_9[1]$ に対応して，次の諸変量が定義できることは，上の対応表から直ちに分る。

(1. 48)
$$
\begin{cases}
Q_4{}^G[l'-1]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{h=1}^{l'}(\mu_h-\rho)^2B_h(z^2) \\
\quad=\dfrac{1}{\sigma^2}\left[\sum\limits_{h=1}^{l'}\dfrac{\{B_h(\epsilon z)\}^2}{B_h(z^2)}-\dfrac{\{U(\epsilon z)\}^2}{U(z^2)}\right], \\
Q_6{}^G[l-2]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_{h=1}^{l}N_h[(\bar{\epsilon}_{(h)}-\bar{\epsilon})-(\bar{z}_{(h)}-\bar{z})\nu]^2 \\
\quad=\dfrac{1}{\sigma^2}\left[G(\epsilon^2)-\dfrac{\{G(\epsilon z)\}^2}{G(z^2)}\right], \\
Q_9{}^G[1]=\dfrac{1}{\sigma^2}(\rho-\nu)^2U(z^2)G(z^2)/B(z^2) \\
\quad=\dfrac{1}{\sigma^2}\left[\dfrac{U(\epsilon z)}{U(z^2)}-\dfrac{G(\epsilon z)}{G(z^2)}\right]^2\dfrac{U(z^2)G(z^2)}{B(z^2)} \\
\quad=\dfrac{1}{\sigma^2}\left[\dfrac{\{U(\epsilon z)\}^2}{U(z^2)}+\dfrac{\{G(\epsilon z)\}^2}{G(z^2)}-\dfrac{\{B(\epsilon z)\}^2}{B(z^2)}\right]
\end{cases}
$$

最後の式の変形には，$U+G=B$ を用いる。

この第1式は，「級平均値のグループ内傾斜」μ_h に関する変量であって，(1, 39) の「級内傾斜のグループ平均値」$\lambda_{(h)}$ に関する $Q_4{}^M[l-1]$ とは違う。また，第1式では，$t_h \geqq 2$ なる如き l' 個のグループを考えているから，その自由度は $l'-1$ となる。

(1. 42) (1. 48) の各式を辺々相加え，$\sum\limits_{h=1}^{l'}B_h(\epsilon^2)+G(\epsilon^2)=B(\epsilon^2)$ を使えば，

(1. 49)
$$
\sum_{h=1}^{l'}Q_6{}^{(h)}[t_h-2]+Q_4{}^G[l'-1]+Q_6{}^G[l-2]+Q_9{}^G[1]
$$
$$
=\frac{1}{\sigma^2}\left[B(\epsilon^2)-\frac{\{B(\epsilon z)\}^2}{B(z^2)}\right]
$$

$$
(1.\ 44)\quad
\begin{cases}
U(z^2)=\sum_{h=1}^{l'} B_h(z^2)=\sum_h\sum_{i\,(h)} n_i(\bar{z}_i-\bar{z}_{(h)})^2, \\
G(z^2)=\sum_{h=1}^{l} N_h(\bar{z}_{(h)}-\bar{z})^2=\sum_h\sum_{i\,(h)} n_i(\bar{z}_{(h)}-\bar{z})^2, \\
U(z^2)+G(z^2)=\sum_h\sum_{i\,(h)} n_i(\bar{z}_i-\bar{z})^2=B(z^2), \\
U(\epsilon z)=\sum_{h=1}^{l'} B_h(\epsilon z)=\sum_h\sum_{i\,(h)} n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon}_{(h)})(\bar{z}_i-\bar{z}_{(h)}) \\
G(\epsilon z)=\sum_{h=1}^{l} N_h(\bar{\epsilon}_{(h)}-\bar{\epsilon})(\bar{z}_{(h)}-\bar{z}) \\
\qquad\quad =\sum_h\sum_{i\,(h)} n_i(\bar{\epsilon}_{(h)}-\bar{\epsilon})(\bar{z}_{(h)}-\bar{z}), \\
U(\epsilon z)+G(\epsilon z)=B(\epsilon z), \\
\text{以下}\ U(\epsilon^2),\ G(\epsilon^2),\ \cdots\text{の定義も同様。}
\end{cases}
$$

さきの，総偏差平方和（または積和）＝級内＋級間，すなわち $S=W+B$ の公式に相当するものが，今度は，グループに関する総偏差平方和（または積和）＝グ－プ内＋グループ間　を示すところの $B=U+G$ の形になっている。

さらに，（1. 35）の μ_h を（1. 6）の λ_i に対応させ，（1. 24）の λ に対応するものとして，

$$
(1.\ 45)\qquad \rho=\sum_{h=1}^{l'} B_h(\epsilon z)\Big/\sum_{h=1}^{l'} B_h(z^2)=\frac{U(\epsilon z)}{U(z^2)}
$$

を定義する。$t_h=1$ であるような l'' 個のグループは ρ の決定には参加していない。また，（1. 24）の λ の分母子の場合と違って，（1. 45）の分母子では，$\sum_{h=1}^{l'} B_h=B$ ではなくて，$B=U+G=\sum_{h=1}^{l'} B_h+G$ であることが注目される。

次に，（1. 20）の μ に対応するものとして，$G(z^2)\neq 0$ と前提して

$$
(1.\ 46)\qquad \nu=\frac{G(\epsilon z)}{G(z^2)}
$$

を定義する。

ここで定義された諸量を，さきの級別の場合の諸量と対比すれば次のように，上下の位置にあるものが互に対応している。

$$\frac{\lambda_1}{\sigma},\ \frac{\lambda_2}{\sigma},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{\lambda_t}{\sigma}$$

に関する二次形式とみて．Cochranの定理を用いればよい。右辺総和項の自由度は，

$$\sum_{h=1}^{l'}(t_h-1)=\sum_{h=1}^{l'+l''}(t_h-1)-\sum_{t_h=1}(t_h-1)=t-l$$

であり，右辺全体では $t-1$ となる。

（1．38）（1．39）を（1．27）の形で書けば，

$$(1.\ 41)\quad \begin{cases} Q_4{}^{(h)}[t_h-1]=\dfrac{1}{\sigma^2}\left[\sum\limits_{i}{}_{(h)}\dfrac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)}-\dfrac{\{W_h(\epsilon z)\}^2}{W_h(z^2)}\right], \\ \qquad (h=1,2,\cdots,l') \\ Q_4{}^M[l-1]=\dfrac{1}{\sigma^2}\left[\sum\limits_{h}\dfrac{\{W_h(\epsilon z)\}^2}{W_h(z^2)}-\dfrac{\{W(\epsilon z)\}^2}{W(z^2)}\right] \end{cases}$$

となる。$t_h=1$ であるような最後の l'' 個のグループについては，$w_i=W_h$ であることを考えると，この形の方が（1．40）の分割を理解し易い。次に述べる $Q_6[t-2]$ の再分割では，このような方法をとる。

グループ M_h $(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$ に属する t_h 個の級について，（1．21）第1式および（1．23）に相当するものをを作る。

$$(1.\ 42)\quad Q_6{}^{(h)}[t_h-2]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_{i}{}_{(h)}n_i[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon}_{(h)})-(\bar{z}_i-\bar{z}_{(h)})\mu_h]^2$$

$$=\frac{1}{\sigma^2}\left[B_h(\epsilon^2)-\frac{\{B_h(\epsilon z)\}^2}{B_h(z^2)}\right],\ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$$

ただし，$t_h=2$ であるようなグループに対しては，（1．31）と同じようにして，この変量は　その値も自由度も共に0となる。したがって，（1．42）を h $(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$ について総和した変量の自由度は，

$$(1.\ 43)\quad \sum_{t_h\geq 2}(t_h-2)=\sum_{h=1}^{l}(t_h-2)-\sum_{t_h=1}(t_h-2)=t-2l-(-1)l''$$

$$=t-l-l'$$

となる。

ここで次のように，グループ平均値間の変量を定義する。

こゝで $t_h=1$ であるような l'' 個のグループについては，$\lambda_i=\lambda_{(h)}$ から（1. 38）は，変量も自由度も 0 となるから，はじめの l' 個のグループだけについて考えればよい。

次にグループ M_h を改めて 1 つの級 h とみなして，M_1, M_2, …, M_l なる l 個の級を考える。各級についての $\lambda_{(h)}$ を，$W_h(z^2)$ をウェイトとして加重平均すれば，$\lambda_{(h)}$ の定義（1. 34）と（1. 36）とによって，これが（1. 24）の λ に等しくなる。したがって，これら l 個の級について，（1. 25）第 1 式に相当するものを作れば，

$$(1.\ 39)\qquad Q_4{}^M[l-1]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_h(\lambda_{(h)}-\lambda)^2 W_h(z^2)$$

となる。左辺右肩の添字は，グループ M_1, M_2, …, M_l に関するものであることを示す。これは，「級内傾斜のグループ平均値」$\lambda_{(h)}$ 相互間の関係に関する変量である。

こゝで，

$$\lambda_i-\lambda=(\lambda_i-\lambda_{(h)})+(\lambda_{(h)}-\lambda)$$

と書きなおして，両辺を二乗し，$w_i(z^2)$ を掛けて i について総和する。積の形の頃の総和は，（1. 32）と λ_i, $\lambda_{(h)}$ の定義を用いて，

$$\begin{aligned}
&\sum_i(\lambda_i-\lambda_{(h)})(\lambda_{(h)}-\lambda)w_i(z^2)\\
&=\sum_h(\lambda_{(h)}-\lambda)\sum_i{}_{(h)}(\lambda_i-\lambda_{(h)})w_i(z^2)\\
&=\sum_h(\lambda_{(h)}-\lambda)\sum_i{}_{(h)}\{w_i(\epsilon z)-\lambda_{(h)}w_i(z^2)\}\\
&=\sum_h(\lambda_{(h)}-\lambda)\{W_h(\epsilon z)-W_h(\epsilon z)\}=0
\end{aligned}$$

と消え，

$$\sum_i(\lambda_i-\lambda)^2w_i(z^2)=\sum_h\sum_i{}_{(h)}(\lambda_i-\lambda_{(h)})^2w_i(z^2)\ +\sum_h(\lambda_{(h)}-\lambda)^2W_h(z^2)$$

を得る。したがって，（1. 25）第 1 式と（1. 38）（1. 39）から，

$$(1.\ 40)\qquad Q_4[t-1]=\sum_{h=1}^{l'}Q_4{}^{(h)}[t_h-1]+Q_4{}^M[l-1]$$

を得る。右辺が互に独立な χ^2 変量の和になっていること，および，その自由度 括弧内に記したものになることは，両辺の各項を

$$\left\{ S_h(\epsilon z)=\sum_i{}_{(h)}(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_{(h)})(z_{ij}-\bar{z}_{(h)})=W_h(\epsilon z)+B_h(\epsilon z),\ \cdots \right.$$

(1. 34)
$$\lambda_{(h)}=\frac{\sum_i{}_{(h)}w_i(\epsilon z)}{\sum_i{}_{(h)}w_i(z^2)}=\frac{W_h(\epsilon z)}{W_h(z^2)},\ (h=1,\ 2,\ \cdots l',\ \cdots,\ l)$$

たゞし，$w_i(z^2)\neq 0$ $(i\epsilon M_h,\ h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l)$ とする。

(1. 35)
$$\mu_h=\frac{B_h(\epsilon z)}{B_h(z^2)},\ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$$

たゞし，$h=1,\ 2,\ \cdots,\ l'$ に対して $B_h(z^2)\neq 0$ とする。$t_h=1$ のグループについては，$B_h(z^2)=B_h(\epsilon z)=0$ であって，μ_h は定義されていない。

以上の記号の原則は，グループ $M_h(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l)$ 内の総和，およびグループ平均値には，添字 h または (h) をつけることである。こゝで特に注意すべきは，$W_h(z^2)$，$W_h(\epsilon z)$，$W_h(\epsilon^2)$，…のすべてを通じて，W_h に関しては，

(1. 36)
$$\sum_{h=1}^{l} W_h=\sum_{i=1}^{t} w_i=W$$

という関係式が成立するが，B_h, S_h は，それぞれのグループ平均値からの偏差平方和または積和であるから，それらを h について加えても，全グループを通じての総平均値からの偏差平方和または積和 B, S にはならないということである。

さて，$Q_1{}^i[n_i-2]$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$ をグループ毎にまとめ，右肩にグループ内総和を示す (h) をつけて，

(1. 37)
$$Q_1{}^{(h)}[N_h-2t_h]=\sum_i{}_{(h)}Q_1{}^i[n_i-2],\ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l',\ \cdots,\ l)$$

を作れば，$Q_1[N-2t]$ が l 個の互に独立な χ^2 変量に分割されることは容易に分る。同時に，$Q_4[t-1]$，$Q_6[t-2]$ が次のように互に独立な χ^2 変量に再分割される。

まず $Q_4[t-1]$ を再分割する。
グループ M_h $(h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$ に属する t_h 個の級について，(1. 25) 第1式に相当するものを作れば，

(1. 38)
$$Q_4{}^{(h)}[t_h-1]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i{}_{(h)}(\lambda_i-\lambda_{(h)})^2 w_i(z^2),\ (h=1,\ 2,\ \cdots,\ l')$$

第1表　ϵ に関する共分散分析表（$t\geqq 2$）

<table>
<tr>
<td>$Q_1^1[n_1-2]$
$Q_1^2[n_2-2]$
$\vdots$
$Q_1^i[n_i-2]$
$\vdots$
$Q_1^t[n_t-2]$</td>
<td colspan="3">$Q_1[N-2t]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda_i]^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}\left[W(\epsilon^2)-\sum_i\frac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)}\right]$
$=\frac{1}{\sigma^2}\left[W(x^2)-\sum_i\frac{\{w_i(xz)\}^2}{w_i(z^2)}\right]$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j(x_{ij}-\hat{\alpha}_i-\hat{\beta}_i z_{ij})^2$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$Q_2^1[1]$
$Q_2^2[1]$
$\vdots$
$Q_2^i[1]$
$\vdots$
$Q_2^t[1]$</td>
<td rowspan="2">$Q_2[t]$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\lambda_i^2\sum_j(z_{ij}-\bar{z}_i)^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\frac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)}$</td>
<td colspan="2">$Q_4[t-1]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\lambda_i-\lambda)^2\sum_j(z_{ij}-\bar{z}_i)^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_i\frac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)}-\frac{\{W(\epsilon z)\}^2}{W(z^2)}\right]$
$Q_6[t-2]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-(\bar{z}_i-\bar{z})\mu]^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}\left[B(\epsilon^2)-\frac{\{B(\epsilon z)\}^2}{B(z^2)}\right]$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$Q_5[1]=\frac{\lambda^2}{\sigma^2}\sum_i\sum_j(z_{ij}-\bar{z}_i)^2=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\{W(\epsilon z)\}^2}{W(z^2)}$
$Q_7[1]=\frac{\mu^2}{\sigma^2}\sum_i n_i(\bar{z}_i-\bar{z})^2=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\{B(\epsilon z)\}^2}{B(z^2)}$</td>
<td rowspan="2">$Q_9[1]=\frac{1}{\sigma^2}(\lambda-\mu)^2$
$\times\frac{W(z^2)B(z^2)}{S(z^2)}=\frac{1}{\sigma^2}$
$\times\left[\frac{W(\epsilon z)}{W(z^2)}-\frac{B(\epsilon z)}{B(z^2)}\right]^2$
$\times\frac{W(z^2)B(z^2)}{S(z^2)}$
$Q_{10}[1]=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\{S(\epsilon z)\}^2}{S(z^2)}$
$=\frac{1}{\sigma^2}\frac{[W(\epsilon z)+B(\epsilon z)]^2}{S(z^2)}$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$Q_3^1[1]$
$Q_3^2[1]$
$\vdots$
$Q_3^i[1]$
$\vdots$
$Q_3^t[1]$</td>
<td rowspan="2">$Q_3[t]$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i\bar{\epsilon}_i^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}[B(\epsilon^2)+N\bar{\epsilon}^2]$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$Q_8[1]=\frac{N\bar{\epsilon}^2}{\sigma^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">$Q[N]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j\epsilon_{ij}^2=\frac{1}{\sigma^2}[W(\epsilon^2)+B(\epsilon^2)+N\bar{\epsilon}^2]=\frac{1}{\sigma^2}[S(\epsilon^2)+N\bar{\epsilon}^2]$</td>
</tr>
</table>

に並んだ χ^2 変量は，最下段を除いて　すべて互に独立であって，その合計が $Q[N]$ になっている。このうち，$Q_1[N-2t]$ が，(1. 16) (1. 19) によって観測可能な形になっているほかは，まだ確率変数 x_{ij} によって表わされてはいない。したがって，これを確率変数 ϵ_{ij} に関する共分散分析表と名づけた。

級の個数が 1 個だけで，$t=1$ のときには，$w_1=W$, $B=0$ から $Q_4[t-1]$, $Q_6[t-2]$, $Q_7[1]$, $Q_9[1]$ がすべて 0 となり，さらに，$Q_1=Q_1^1$, $Q_2[1]=Q_5[1]=Q_{10}[1]$, $Q_3[1]=Q_8[1]$, $n_1=N$ によって

$$Q\ [N]=Q_1[N-2]+Q_2[1]+Q_3[1]$$

第 2 表　ϵ に関する共分散分析表 ($t=1$)

$Q_1[N-2]=\dfrac{1}{\sigma^2}\left[w(\epsilon^2)-\dfrac{\{w(\epsilon z)\}^2}{w(z^2)}\right]=\dfrac{1}{\sigma^2}\left[w(x^2)-\dfrac{\{w(xz)\}^2}{w(z^2)}\right]$ $=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_j(x_j-\hat{\alpha}-\hat{\beta}z_j)^2$
$Q_2[1]=Q_5[1]=Q_{10}[1]=\dfrac{\lambda^2}{\sigma^2}\sum\limits_j(z_j-\bar{z})^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\ \dfrac{\{w(\epsilon z)\}^2}{w(z^2)}$
$Q_3[1]=Q_8[1]=\dfrac{N\bar{\epsilon}^2}{\sigma^2}$
$Q[N]=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_j\epsilon_j{}^2=\dfrac{1}{\sigma^2}[w(\epsilon^2)+N\bar{\epsilon}^2]$

(注)　$t=1$ のとき，$n_1=N$, $j=1, 2, \cdots, N$,　なお ϵ_i, w_i, α_i, β_i の添字 i は略す。
$\bar{z}_1=\bar{z}$, $\bar{\epsilon}_1=\bar{\epsilon}$, $B=0$, $S=W=w$.

という分割がなされ得るに止まる。これは第 2 表として示してあるが，よく知られた直線回帰の共分散分析表にほかならない。

また $t=2$ のときは，

$$B(\epsilon^2)B(z^2)=\left[\sum_{i=1}^{2}n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})^2\right]\cdot\left[\sum_{i=1}^{2}n_i(\bar{z}_i-\bar{z})^2\right] \tag{1. 31}$$

$$=\left[\sum_{i=1}^{2}n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})(\bar{z}_i-\bar{z})\right]^2=\{B(\epsilon z)\}^2$$

から，$Q_6[t-2]=0$ となるが，それ以外は第 1 表と変らない。

第1表 ϵ に関する共分散分析表 ($t \geqq 2$)

<table>
<tr>
<td>$Q_1^1[n_1-2]$
$Q_1^2[n_2-2]$
$\vdots$
$Q_1^i[n_i-2]$
$\vdots$
$Q_1^t[n_t-2]$</td>
<td colspan="3">$Q_1[N-2t]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda_i]^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}\left[W(\epsilon^2)-\sum_i\frac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)}\right]$
$=\frac{1}{\sigma^2}\left[W(x^2)-\sum_i\frac{\{w_i(xz)\}^2}{w_i(z^2)}\right]$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j(x_{ij}-\hat{\alpha}_i-\hat{\beta}_i z_{ij})^2$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$Q_2^1[1]$
$Q_2^2[1]$
$\vdots$
$Q_2^i[1]$
$\vdots$
$Q_2^t[1]$</td>
<td rowspan="2">$Q_2[t]$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\lambda_i^2\sum_j(z_{ij}-\bar{z}_i)^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\frac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)}$</td>
<td colspan="2">$Q_4[t-1]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i(\lambda_i-\lambda)^2\sum_j(z_{ij}-\bar{z}_i)^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_i\frac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)}-\frac{\{W(\epsilon z)\}^2}{W(z^2)}\right]$
$Q_6[t-2]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-(\bar{z}_i-\bar{z})\mu]^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}\left[B(\epsilon^2)-\frac{\{B(\epsilon z)\}^2}{B(z^2)}\right]$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$Q_5[1]=\frac{\lambda^2}{\sigma^2}\sum_i\sum_j(z_{ij}-\bar{z}_i)^2=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\{W(\epsilon z)\}^2}{W(z^2)}$
$Q_7[1]=\frac{\mu^2}{\sigma^2}\sum_i n_i(\bar{z}_i-\bar{z})^2=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\{B(\epsilon z)\}^2}{B(z^2)}$</td>
<td rowspan="2">$Q_9[1]=\frac{1}{\sigma^2}(\lambda-\mu)^2\times\frac{W(z^2)B(z^2)}{S(z^2)}=\frac{1}{\sigma^2}\times\left[\frac{W(\epsilon z)}{W(z^2)}-\frac{B(\epsilon z)}{B(z^2)}\right]^2\times\frac{W(z^2)B(z^2)}{S(z^2)}$
$Q_{10}[1]=\frac{1}{\sigma^2}\frac{\{S(\epsilon z)\}^2}{S(z^2)}=\frac{1}{\sigma^2}\frac{[W(\epsilon z)+B(\epsilon z)]^2}{S(z^2)}$</td>
</tr>
<tr>
<td rowspan="2">$Q_3^1[1]$
$Q_3^2[1]$
$\vdots$
$Q_3^i[1]$
$\vdots$
$Q_3^t[1]$</td>
<td rowspan="2">$Q_3[t]$
$=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i n_i\bar{\epsilon}_i^2$
$=\frac{1}{\sigma^2}[B(\epsilon^2)+N\bar{\epsilon}^2]$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="2">$Q_8[1]=\frac{N\bar{\epsilon}^2}{\sigma^2}$</td>
</tr>
<tr>
<td colspan="4">$Q[N]=\frac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j\epsilon_{ij}^2=\frac{1}{\sigma^2}[W(\epsilon^2)+B(\epsilon^2)+N\bar{\epsilon}^2]=\frac{1}{\sigma^2}[S(\epsilon^2)+N\bar{\epsilon}^2]$</td>
</tr>
</table>

$2t]$, $Q_3[t]$ およびこれらの各級毎の組成分子とも独立である。なお，(1. 25) 第1式を (1. 6) (1. 24) によって変形すると，次の形になる。

$$(1.\ 27)\qquad Q_4[t-1]=\frac{1}{\sigma^2}\left[\sum_i\frac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)}-\frac{\{W(\epsilon z)\}^2}{W(z^2)}\right].$$

以上を まとめると，(1. 9) (1. 22) (1. 26) により，$Q[N]$ が次のように独立な χ^2 変量に分割されたことになる。

$$(1.\ 28)\qquad \begin{aligned} Q[N]&=Q_1[N-2t]+Q_2[t]+Q_3[t]\\ &=Q_1[N-2t]+Q_4[t-1]+Q_5[1]\\ &\quad+Q_6[t-2]+Q_7[1]+Q_8[1] \end{aligned}$$

最後に，$Q_5[1]+Q_7[1]$ を次のように分割しなおすことができる。

$$(1.\ 29)\qquad \begin{cases} Q_9=\dfrac{1}{\sigma^2}(\lambda-\mu)^2W(z^2)B(z^2)/S(z^2)\\[2ex] \quad=\dfrac{1}{\sigma^2}\left\{\dfrac{W(\epsilon z)}{W(z^2)}-\dfrac{B(\epsilon z)}{B(z^2)}\right\}^2W(z^2)B(z^2)/S(z^2),\\[2ex] Q_{10}=\dfrac{1}{\sigma^2}\ \dfrac{\{S(\epsilon z)\}^2}{S(z^2)}=\dfrac{1}{\sigma^2}\ \dfrac{\{W(\epsilon z)+B(\epsilon z)\}^2}{S(z^2)}, \end{cases}$$

という変量を作ると，(1. 5) 第1式を用いて，

$$Q_5[1]+Q_7[1]=\frac{1}{\sigma^2}\left[\frac{\{W(\epsilon z)\}^2}{W(z^2)}+\frac{\{B(\epsilon z)\}^2}{B(z^2)}\right]=Q_9+Q_{10}$$

が出る。両辺の各項を

$$\frac{W(\epsilon z)}{\sigma},\quad \frac{B(\epsilon z)}{\sigma}$$

に関する正値二次形式とみると，いずれも その階数は1になっている。したがって再び Cochran の定理により，左辺の自由度2のχ^2変量が，自由度1ずつの互に独立な χ^2 変量に分割 しなおされる。すなわち

$$(1.\ 30)\qquad Q_5[1]+Q_7[1]=Q_9[1]+Q_{10}[1]$$

で，右辺の2者は互に独立であるだけでなく，(1. 28) 最右辺の $Q_5[1]$, $Q_7[1]$ を除く諸項とも独立である。

(1. 9) (1. 28) (1. 30) を表の形にまとめると第1表を得る。縦

(1. 23)　$$Q_6[t-2]=\frac{1}{\sigma^2}\left[B(\epsilon^2)-\frac{\{B(\epsilon z)\}^2}{B(z^2)}\right]$$

とも書くことができる。

今度は，$Q_2[t]$ の分割を考える。そのために，$w_i(z^2)$ をウエイトとして λ_i の加重平均 λ を定義する。(1. 6) から

(1. 24)　$$\lambda=\frac{\sum_i w_i(z^2)\lambda_i}{\sum_i w_i(z^2)}=\frac{W(\epsilon z)}{W(z^2)}$$

これを用いて

$$(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda_j=(z_{ij}-\bar{z}_i)(\lambda_i-\lambda)+(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda$$

と変形しておいて，両辺の二乗をとり，i および j について総和する。(1. 6) (1. 24) によって積の項の総和は消えて，平方の項だけが残る。

(1. 25)　$$\begin{cases} Q_4=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i\sum_j(z_{ij}-\bar{z}_i)^2(\lambda_i-\lambda)^2=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum_i w_i(z^2)(\lambda_i-\lambda)^2, \\ Q_5=\dfrac{\lambda^2}{\sigma^2}\sum_i\sum_j(z_{ij}-\bar{z}_i)^2=\dfrac{\lambda^2}{\sigma^2}W(z^2)=\dfrac{1}{\sigma^2}\;\dfrac{\{W(\epsilon z)\}^2}{W(z^2)}, \end{cases}$$

とおくと，

$$Q_2[t]=Q_4+Q_5$$

を得る。両辺の各項を

$$\frac{\lambda_1}{\sigma},\ \frac{\lambda_2}{\sigma},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{\lambda_t}{\sigma}$$

に関する正値二次形式とみるとき，$Q_2[t]$ の階数は t であるが，Q_4, Q_5 の階数は　それぞれ $t-1$, 1 を越えない。Q_4 については，t 個の $\dfrac{\lambda_i-\lambda}{\sigma}\sqrt{w_i(z^2)}$ の間に (1. 24) によって，$\sqrt{w_i(z^2)}$ を係数とする

$$\sum_i\frac{\lambda_i-\lambda}{\sigma}\sqrt{w_i(z^2)}\cdot\sqrt{w_i(z^2)}=0$$

という条件式があることを考えればよい。そこで (1. 8) を得たと同じ論法で，

(1. 26)　$$Q_2[t]=Q_4[t-1]+Q_5[1]$$

となり，右辺の2項は互に独立な χ^2 変量で，その自由度は括弧内に記したものになっている。これら2者は，(1. 9) 最終式の $Q_1[N-$

これを用いて，$\bar{\epsilon}_i$ を

$$\bar{\epsilon}_i=[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-(\bar{z}_i-\bar{z})\mu]+(\bar{z}_i-\bar{z})\mu+\bar{\epsilon}$$

と書きなおし，両辺を二乗して n_i を掛け，i について総和する。積の項の和は，総平均値の定義と（1. 20）とから消えて，

$$(1.\ 21)\qquad \begin{cases} Q_6=\dfrac{1}{\sigma^2}\sum\limits_i n_i[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-(\bar{z}_i-\bar{z})\mu]^2 \\ Q_7=\dfrac{\mu^2}{\sigma^2}\sum\limits_i n_i(\bar{z}_i-\bar{z})^2=\dfrac{\mu^2}{\sigma^2}B(z^2)=\dfrac{1}{\sigma^2}\cdot\dfrac{\{B(\epsilon z)\}^2}{B(z^2)}, \\ Q_8=\dfrac{N\bar{\epsilon}^2}{\sigma^2} \end{cases}$$

とおくと，$\sigma_i^2=\sigma^2$ （$i=1, 2, \cdots, t$）に注意して，

$$Q_3[t]=Q_6+Q_7+Q_8$$

を得る。両辺の各項を

$$\frac{\bar{\epsilon}_1}{\sigma},\ \frac{\bar{\epsilon}_2}{\sigma},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{\bar{\epsilon}_t}{\sigma}$$

に関する正値二次形式と見るとき，$Q_3[t]$ の階数は t であり，Q_6, Q_7, Q_8 の階数は　それぞれ $t-2, 1, 1$ を越えない。Q_6 については，μ が $\bar{\epsilon}_i$ の一次同次式であって，t 個の$\dfrac{\sqrt{n_i}}{\sigma}[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-(\bar{z}_i-\bar{z})\mu]$ の間に，総平均値の定義と（1. 20）とによって

$$\sum_i\frac{\sqrt{n_i}}{\sigma}[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-(\bar{z}_i-\bar{z})\mu]\sqrt{n_i}=0,$$

$$\sum_i\frac{\sqrt{n_i}}{\sigma}[(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})-(\bar{z}_i-\bar{z})\mu]\sqrt{n_i}(\bar{z}_i-\bar{z})=0$$

という2個の条件式のあることを考えればよい。そこで（1. 8）を得たと同じ論法で，

$$(1.\ 22)\qquad Q_3[t]=Q_6[t-2]+Q_7[1]+Q_8[1]$$

を得て，右辺の各項は互に独立な χ^2 変量で，その自由度は括弧内に記したものになっている。これら3者は互に独立であるだけでなく，（1. 9）最終式の $Q_1[N-2t]$, $Q_2[t]$ およびこれら2者の各級毎の組成分子とも独立になる。なお，（1. 21）第1式は，（1. 20）により

(1. 16) $$Q_1{}^i[n_i-2]=\frac{1}{\sigma_i{}^2}\left[w_i(x^2)-\frac{\{w_i(xz)\}^2}{w_i(z^2)}\right].$$

すなわち，$Q_1{}^i[n_i-2]$ では，ϵ のかわりに x と書いてもよい。(1. 16) は観測可能な確率変数 x_{ij} で表わされているから，標本から計算し得る統計量である。

また，α_i, β_i の最尤推定子を，

(1. 17) $$\begin{cases}\hat{\alpha}_i=\bar{x}_i-\hat{\beta}_i\bar{z}_i,\\ \hat{\beta}_i=\dfrac{w_i(xz)}{w_i(z^2)}\end{cases}$$

とすれば，(1. 6) (1. 14) から，

(1. 18) $$\lambda_i=\hat{\beta}_i-\beta_i$$

が出て，(1. 12) (1. 17) を用いて，

$$(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda_i=x_{ij}-\hat{\alpha}_i-\hat{\beta}_iz_{ij}$$

を得る。したがって，(1. 7) 第2式は，

(1. 19) $$Q_1{}^i[n_i-2]=\frac{1}{\sigma_i{}^2}\sum_j(x_{ij}-\hat{\alpha}_i-\hat{\beta}_iz_{ij})^2$$

とも書ける。右辺の総和項は，第 i 級内の推定誤差平方和である。

この$Q_1{}^i[n_i-2]$ $(i=1, 2, \cdots, t)$ を用いれば，分散系列 $\{\sigma_i{}^2\}$ $(i=1, 2, \cdots, t)$ の均一性を検定できる[5]。そして，帰無仮説

$$H_0: \sigma_i{}^2=\sigma^2 \ (i=1, 2, \cdots, t)$$

が採択されたならば，$\sigma_i{}^2=\sigma^2$ とおいてよい。以下では，この仮説が採択されたものとし，(1. 1) の ϵ_{ij} の母分散は，i の如何にかゝわらず σ^2 に等しいと仮定する。

(ロ)

(1. 9) 最終式右辺の $Q_2[t]$ と $Q_3[t]$ が，さらに互に独立な χ^2 変量に分割される。まず，$Q_3[t]$ について考える。

$\bar{\epsilon}_i$ の $\bar{z}_i$ への回帰を考え，$B(z^2)\neq 0$ として，その標本回帰係数を μ と書く。

(1. 20) $$\mu=\frac{B(\epsilon z)}{B(z^2)}$$

$$\sum_{i=1}^{t} Q^i[n_i] = \sum_{i=1}^{t} Q_1{}^i[n_i-2] + \sum_{i=1}^{t} Q_2{}^i[1] + \sum_{i=1}^{t} Q_3{}^i[1]$$

における右辺の $3t$ 個の χ^2 変量はすべて互に独立である。左右両辺の総和項を　それぞれ Q, Q_1, Q_2, Q_3 で示せば，これらは自由度 $\sum_i n_i = N$, $\sum_i (n_i-2) = N-2t$, t, t の χ^2 分布に従い，Q_1, Q_2, Q_3 は互に独立である。すなわち

$$(1.\ 9)\qquad \begin{cases} Q[N] = \sum_i Q^i[n_i], \\ Q_1[N-2t] = \sum_i Q_1{}^i[n_i-2], \\ Q_2[t] = \sum_i Q_2{}^i[1], \\ Q_3[t] = \sum_i Q_3{}^i[1], \\ Q[N] = Q_1[N-2t] + Q_2[t] + Q_3[t]. \end{cases}$$

(1. 7) 第2式を (1. 6) を用いて変形すれば,

$$(1.\ 10)\qquad Q_1{}^i[n_i-2] = \frac{1}{\sigma_i{}^2}\left[w_i(\epsilon^2) - \frac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)}\right]$$

となるが，これは　さらに次のように変形される。

(1. 1) から出る2式

$$(1.\ 11)\qquad \begin{cases} \epsilon_{ij} = x_{ij} - \alpha_i - \beta_i z_{ij} \\ \bar{\epsilon}_i = \bar{x}_i - \alpha_i - \beta_i \bar{z}_i \end{cases}$$

を辺々相減ずれば

$$(1.\ 12)\qquad \epsilon_{ij} - \bar{\epsilon}_i = (x_{ij} - \bar{x}_i) - \beta_i (z_{ij} - \bar{z}_i)$$

を得る。これを二乗して，j について加えて，

$$(1.\ 13)\qquad w_i(\epsilon^2) = w_i(x^2) - 2\beta_i w_i(xz) + \beta_i{}^2 w_i(z^2).$$

他方，(1. 12) の両辺に $(z_{ij} - \bar{z}_i)$ を乗じて j について加えれば,

$$(1.\ 14)\qquad w_i(\epsilon z) = w_i(xz) - \beta_i w_i(z^2).$$

これから

$$(1.\ 15)\qquad \frac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)} = \frac{\{w_i(xz)\}^2}{w_i(z^2)} - 2\beta_i w_i(xz) + \beta_i{}^2 w_i(z^2)$$

を得て，この式と (1. 13) を (1. 10) に代入すれば,

$$\begin{cases} Q_2{}^i=\sum_j(z_{ij}-\bar{z}_i)^2\left(\dfrac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)^2=w_i(z^2)\left(\dfrac{\lambda_i}{\sigma_i}\right)^2=\dfrac{1}{\sigma_i{}^2}\dfrac{\{w_i(\epsilon z)\}^2}{w_i(z^2)}, \\ Q_3{}^i=n_i\bar{\epsilon}_i{}^2/\sigma_i{}^2 \end{cases}$$

とおくと，

$$Q^i=Q_1{}^i+Q_2{}^i+Q_3{}^i$$

を得る。両辺の各項を

$$\frac{\epsilon_{i1}}{\sigma_i},\ \frac{\epsilon_{i2}}{\sigma_i},\ \cdots\cdots\cdots\cdots,\ \frac{\epsilon_{in_i}}{\sigma_i}$$

に関する二次形式とみるとき，これらは いずれも正値形式で，Q^i の階数は n_i であり，$Q_1{}^i$, $Q_2{}^i$, $Q_3{}^i$ の階数は それぞれ n_i-2, 1, 1 を越えない。何となれば，$Q_1{}^i$ については，(1. 6) により λ_i が ϵ_{ij} の一次同次式であり，$[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda_i]/\sigma_i$ の総個数は，i を固定するとき n_i 個あるが，それらの間に，級内平均値の定義による

$$\sum_j[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda_i]/\sigma_i=0$$

という一次同次の条件式 1 個と，(1. 6) による

$$\sum_j[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda_i](z_{ij}-\bar{z}_i)/\sigma_i=0$$

という他の一次同次の条件式 1 個とがあるため，その階数は n_i-2 を越えない。$Q_2{}^i$ は $\dfrac{\lambda_i}{\sigma_i}\sqrt{w_i(z^2)}$ の二乗，$Q_3{}^i$ は $\sqrt{n_i}\dfrac{\bar{\epsilon}_i}{\sigma_i}$ の二乗になっているから，それらの階数は共に 1 を越えない。

しかも (1. 7) から分るように，問題となっている二次形式は いずれも正値二次形式であるから，3 個の正値二次形式の和 $Q_1{}^i+Q_2{}^i+Q_3{}^i$ の階数は，$(n_i-2)+1+1=n_i$ を越えない。それが Q^i の階数 n_i に等しいから，$Q_1{}^i$, $Q_2{}^i$, $Q_3{}^i$ の階数は n_i-2, 1, 1 となる。こゝで Cochran の定理を用いれば，(1. 7) の最後の 3 者は，自由度 n_i-2, 1, 1 の χ^2 分布に従い，しかも互に独立である。χ^2 分布に従う変量については自由度が大切であるから，角括弧をつけて自由度を附記することにすると，

(1. 8)　$Q^i[n_i]=Q_1{}^i[n_i-2]+Q_2{}^i[1]+Q_3{}^i[1].$

こゝで $i=1, 2, \cdots, t$ に関して辺々相加えれば，級間では変数の独立性が前提されているから，

$$
(1.\ 5)\quad
\begin{cases}
S(z^2)=\sum_i\sum_j(z_{ij}-\bar{z})^2=W(z^2)+B(z^2),\\
S(\epsilon^2)=\sum_i\sum_j(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon})^2=W(\epsilon^2)+B(\epsilon^2),\\
S(x^2)=\sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x})^2=W(x^2)+B(x^2),\\
S(\epsilon z)=\sum_i\sum_j(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon})(z_{ij}-\bar{z})=W(\epsilon z)+B(\epsilon z),\\
S(xz)=\sum_i\sum_j(x_{ij}-\bar{x})(z_{ij}-\bar{z})=W(xz)+B(xz),
\end{cases}
$$

以上の定義式で，$B(\epsilon^2)$，$W(\epsilon z)$ などのように ϵ_{ij} を含むものは，理論模型（1. 1）において想定された確率変数 ϵ_{ij} に関するものであって実際には計測不可能であり，$B(x^2)$，$W(xz)$ のように確率変数 x_{ij} を含むものが統計量として経験的に計算され得るのであるから，両者を混同しないように注意する必要がある。以下の推論の中心点は，理論模型（1. 1）を確率変数 ϵ_{ij} から x_{ij} への変換式とみなし，まず ϵ_{ij} に対して Cochran の定理を用いて互に独立な χ^2 変量を求め，次にこれを新変数 x_{ij} に移しかえる所にある。その際，説明変数 z_{ij} は予め決められた値をとるものと考えるから，これを常数として扱うことができる。

はじめに第 i 級内における ϵ_{ij} の z_{ij} への回帰を考え，$w_i(z^2)\neq 0$ $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)$ として，その標本回帰係数を λ_i と書く。

$$
(1.\ 6)\qquad \lambda_i=\frac{w_i(\epsilon z)}{w_i(z^2)},\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ t)
$$

これを用いて ϵ_{ij} を

$$
\epsilon_{ij}=[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda_i]+(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda_i+\bar{\epsilon}_i
$$

と書きなおして両辺の平方をとり，i を固定して j について総和する。積の項の総和は，級内平均値の定義と（1. 6）とから消えて，平方の項だけが残る。したがって

$$
(1.\ 7)\qquad
\begin{cases}
Q^i=\dfrac{1}{\sigma_i^2}\sum_{j=1}^{n_i}\epsilon_{ij}^2\\
Q_1{}^i=\sum_j[(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)-(z_{ij}-\bar{z}_i)\lambda_i]^2/\sigma_i^2
\end{cases}
$$

する必要がある。

次のように記号を決める。第 i 級の級内偏差平方和および積和を表わすのに，within の意味で頭 w を用い，次のように書く。

$$
(1.\ 2)\quad
\begin{cases}
w_i(z^2)=\sum_{j=1}^{n_i}(z_{ij}-\bar{z}_i)^2, & \bar{z}_i=\dfrac{1}{n_i}\sum_{j=1}^{n_i}z_{ij} \\
w_i(\epsilon^2)=\sum_j(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)^2, & \bar{\epsilon}_i=\dfrac{1}{n_i}\sum_j\epsilon_{ij} \\
w_i(x^2)=\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)^2, & \bar{x}_i=\dfrac{1}{n_i}\sum_j x_{ij} \\
w_i(\epsilon z)=\sum_j(\epsilon_{ij}-\bar{\epsilon}_i)(z_{ij}-\bar{z}_i), & \\
w_i(xz)=\sum_j(x_{ij}-\bar{x}_i)(z_{ij}-\bar{z}_i). &
\end{cases}
$$

これらを i について1から t まで総和したものには，大文字 W を用いる。

$$
(1.\ 3)\quad
\begin{cases}
W(z^2)=\sum_{i=1}^{t}w_i(z^2), & W(\epsilon^2)=\sum_i w_i(\epsilon^2), \\
W(x^2)=\sum_i w_i(x^2), & W(\epsilon z)=\sum_i w_i(\epsilon z), \\
W(xz)=\sum_i w_i(xz). &
\end{cases}
$$

これに対して級間偏差平方和および積和は between の頭文字を用いるが，W に対応する意味で大文字 B で示す。

$$
(1.\ 4)\quad
\begin{cases}
B(z^2)=\sum_{i=1}^{t}n_i(\bar{z}_i-\bar{z})^2, & \bar{z}=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{t}n_i\bar{z}_i=\dfrac{1}{N}\sum_{i=1}^{t}\sum_{j=1}^{n_i}z_{ij} \\
B(\epsilon^2)=\sum_i n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})^2, & \epsilon=\dfrac{1}{N}\sum_i n_i\bar{\epsilon}_i=\dfrac{1}{N}\sum_i\sum_j\epsilon_{ij} \\
B(x^2)=\sum_i n_i(\bar{x}_i-\bar{x})^2, & \bar{x}=\dfrac{1}{N}\sum_i n_i\bar{x}_i=\dfrac{1}{N}\sum_i\sum_j x_{ij} \\
B(\epsilon z)=\sum_i n_i(\bar{\epsilon}_i-\bar{\epsilon})(\bar{z}_i-\bar{z}), & \\
B(xz)=\sum_i n_i(\bar{x}_i-\bar{x})(\bar{z}_i-\bar{z}). &
\end{cases}
$$

総偏差平方和（または積和）を S で示すと，これは級内偏差平方和（または積和）と級間偏差平方和（または積和）に分解されるから，

だこのような場合への適用は述べられていない。本論文では，これとは別の見地から，一元回帰・多元回帰の場合を通じて，統一的な立場からの理論的構成を試みる。これを一言で言えば，共分散・重共分散分析のいずれにおいても，問題の中心は，Cochran の定理を用いて，共分散または重共分散を互に独立な χ^2 変量に分割し，その自由度を決定することにある。原理的に見るかぎり，一般に説明変数が k 個の場合の重共分散分析法を述べれば，$k=1$ とするとき，その理論は共分散分析法に帰着し，両者を区別する必要はない。しかし，はじめから重共分散分析法にはいると，無用の混乱を起すおそれがあるので，こゝでは，まず共分散分析の場合について研究し，次に重共分散分析に移る。そして，共分散分析の場合に成立する関係式をベクトル記号に直せば，きわめて簡単に重共分散分析に移行することができるので，共分散分析について　できるだけ多くのことを述べておき，重共分散分析の所では，そこで新たに問題として登場してくる事柄に注意を集中する。これによって，単に説明が容易になるだけでなく，重共分散分析法の特色が明かになるという利点がある。

II　一元回帰における共分散分析法

1　独立な χ^2 変量への分割

（イ）

説明変数を z，被説明変数を x で示し，第 i 級（$i=1, 2, \cdots, t$）における $n_i(\geqq 2)$ 個の観測値（x_{ij}, z_{ij}）（$j=1, 2, \cdots, n_i$）は，次の確率模型に従うものとする。

(1. 1)　$x_{ij}=\alpha_i+\beta_i z_{ij}+\epsilon_{ij}$

こゝに α_i, β_i は母数で，ϵ_{ij} は母平均 0，母分散 σ_i^2 の正規分布に従い，i, j の如何にかゝわらず互に独立な確率変数とする。t 個の全級にわたる観測値の総個数を，$N=\sum_{i=1}^{t} n_i$ とおく。(1. 1) の ϵ_{ij} は理論的に想定された確率変数であって実際に計測することはできない。経験的に観測される確率変数は ϵ_{ij} ではなくて x_{ij} であることに注意

分析が用いられているが，それらは本来研究の目的とする主効果——摂取食物の品種や数量の及ぼす影響——にとっては攪乱者として作用する部分を測っているにすぎない。それらは，本来は興味なき外的与件の作用を取り除く目的のために用いられており，回帰分析自体が本来の研究目的ではない。これに反して，経済学で回帰分析を用いて，所得額や価格が消費量に及ぼす影響を研究する場合には，これら独立変数の及ぼす効果自体が研究の主目的であって，その影響の大きさを測るために回帰分析が用いられている。したがって，同じように共分散・重共分散分析の名前で呼ばれていても，実験計画論の場合と回帰理論の場合とでは，おのずから異った型の確率模型から出発し，理論展開の方向もまた異らざるを得ない。実験計画で用いられる共分散・重共分散分析法を，何らの変更をも加えずに，そのまゝの形で経済学に適用することは，よほど特殊な型の問題でないかぎり不可能であるし，たとえ適用し得ても，そこで得られた結果に対して経済学的に苦しい解釈をつけなければならないことになる。従来　経済学者に親しまれてきた正規回帰理論に関して，共分散・重共分散分析法を適用して統計的分析能力を高めることは，最近に至って計量経済学者によって注目され，我国でも　すでに小宮隆太郎氏[2]による解説と適用例の展望があるが，この場合の数理統計学的基礎理論を構成することは，経済現象の統計的計測結果を判断する上で寄与する所があるものと信ずる。

共分散および重共分散分析の区別は，回帰方程式における説明変数が1個だけの場合が一元回帰における共分散分析法であり，説明変数が2個またはそれ以上ならば多元回帰における重共分散分析法となる。回帰理論における共分散分析法については，A. M. Mood の説明がある[3]が，その叙述はかなり複雑で理論的見通しが悪く，そこで述べられている特殊な型の検定法以外への応用が困難である。また重共分散分析法については，$t=1$ の場合に関しては，正規回帰理論として S. S. Wilks によって説かれており[4]，こゝで問題とする $t\geqq2$ の場合についても，Wilks の線に沿うて理論を展開することも可能であろうが，ま

問題とすることになる。この場合，さらに第3の分類要因（例，産業の種類による区分）が加わり，この要因について c 個の分類が可能ならば，$t=abcm$ 個の回帰方程式が研究の対象となる。各グループ内の回帰方程式の個数は，こゝでは簡単化のために同一個数 m としたが，これはグループ毎に違っていてもよい。実験計画論における分散分析法では，母数模型・変量模型・混合模型というように問題の性質に応じて使用される確率模型が違っており，分類要因の個数によっても理論の型が変わる。回帰分析の場合にも，これと同じような分類が可能であろうし，殊に2種類またはそれ以上の分類要因があるとき，各要因について確率変数を考えるとすれば，分類要因の個数によって理論的構成も異ってくるであろう。しかし，経済学の研究でよく用いられる正規回帰分析で前提される確率模型では，確率変数は誤差項としてたゞ1個現われるに過ぎないので，分類要因の個数がいくつあろうとも，上記のように回帰方程式の個数の増加として処理することができる。そして，その個数を一般に t とするとき，これら t 個の回帰方程式を適当にグループにまとめ，そのグループ間で差違があるか否かを検討する形で理論を構成すれば足りるし，各グループに含まれる回帰方程式の個数も，同一個数である必要はない。

共分散および重共分散分析法は実験計画論の一部として発展してきているが，実験計画でこの手法を用いる主目的は，実験結果に対して影響を与える外的与件の効果を除去する点にある[1]。たとえば，摂取食物の品種および数量が実験動物の発育状態に与える影響を観察するとき，実験開始時における各動物の生育状態を示す指標として，生後日数や体重をとるならば，実験開始時の生後日数や体重が実験結果に及ぼす影響を除き去ることが必要であり，そのために，これら外的与件の効果が線型的・加法的に作用することを前提して，共分散分析または重共分散分析法が使われる。本論文の最終節で要点を示した「修正された平均値」の比較という手法は，まさにこの種の方法の好適例である。動物の飼育実験の例でも分るように，このような場合には，除き去るべき外的与件の効果を測るために一元または多元の回帰

正規回帰理論における共分散・重共分散分析法

磯　野　修

I　序　説

この論文の目的は観測された回帰方程式が t 個（$t \geqq 2$）あるとき，回帰係数の比較に関する推定および検定の理論的根拠を明かにすることにある。経済学では，クロス・セクションの資料から1個の回帰方程式を計測し，これを t 個の時点について繰り返して，全部で t 個の回帰方程式を求め，これらの回帰方程式が時間の経過と共に変化したと見なし得るか否かを問題にすることが多い。この場合は，時間という1要因について t 個のグループを考え，各グループについて1個ずつの回帰方程式を計測したことになる。観察対象を2種類またはそれ以上の要因によって分類した場合も同じように扱うことができる。たとえば，第1の要因（例，景気の好況・不況による区分）について a 個の分類が，第2の要因（例，企業規模の大小による区分）について b 個の分類が可能ならば，ab 個のグループ別が生じ，各グループについてそれぞれ m 個の回帰方程式を計測すれば，全部で $t=abm$ 個の回帰方程式が得られ，これらの係数の間に相違が存在するか否かを