

正值対称行列上の確率分布および それに関連する分布 II

早 川 毅

序

統計的多変量解析に於ては、母集団分布として多変量正規分布を仮定し、その確率標本により構成される対称確率行列、及び対称確率行列の固有値の関数による統計量が使用される。多くの統計量は標本共分散行列（の固有値）の関数として表現される為、Wishart (1928) による標本共分散行列（Wishart 行列という）の同時密度関数の導出は多変量解析の発展に大きな貢献をした。Wishart 行列の固有値の同時密度関数は母集団共分散行列 Σ が $\Sigma = \sigma^2 I$ の場合について、Fisher (1939), Girshick (1939), Hsu (1939), Roy (1939) 等により同時に独立に得られた。しかし $\Sigma \neq \sigma^2 I$ の場合については出来なかった。また各種検定統計量の検出力の導出に必要な非心 Wishart 行列の分布の導出も出来ずに 20 年が過ぎた。此等の問題は James (1960, 1961a, b) により対称行列の Zonal 多項式の導入によって解決された。1960 年代は Zonal 多項式を使用して各種統計量の精密標本分布の導出が盛ん

に行なわれたが、一方 Zonal 多項式を用いた分布（密度）関数の級数展開表現は、Zonal 多項式の具体的な表現が 12 次までしか得られていないこと、級数の収束が遅いこと等により、実際に統計量の分布の各種数表を作ることが不便であった。その為、統計量の分布（密度）関数の漸近展開の必要性が強調される様になり、オーストラリア、日本のグループを中心として各種の方法が提案され、実用に供される様になった。

本稿は最近に於ける Zonal 多項式、不変多項式を使用して分布表現を求める方法についての報告であり、特に 1960 年代までの主な問題については早川（1971）で報告されており、その後の 10 年の発展について述べることにする。

1 Zonal 多項式

1.1 Zonal 多項式

正值対称行列上の Zonal 多項式を James (1961a) は群の表現論を用いて構成し、Constantine (1963) によって多変量解析への適用が容易になった。James (1964) は Zonal 多項式の基本的性質、及び基本統計量の密度関数の表現を Zonal 多項式により与えている。Farrel (1976) は Zonal 多項式の構成法についての適切な導入を行ない、また Saw (1977) は新しい視点から Zonal 多項式の基本性質を与えている。

S を $m \times m$ 正值対称行列とし、 $S = (s_{ij})$ の異なる $n = m(m+1)/2$ 個の元による k 次の同次多項式 $\varphi(S)$ の構成するベクトル

空間を V_k とする.

このとき, 実線形群 $Gl(m, R)$ による変換

$$(1.1.1) \quad S \rightarrow LSL', \quad L \in Gl(m, R)$$

に対して, V_k 内の変換を

$$(1.1.2) \quad T_L: \varphi(S) \rightarrow (L\varphi)(S) = \varphi(L^{-1}SL^{-1'})$$

とすると, T_L は V_k 内に於ける $Gl(m, R)$ の表現となる.

Thrall (1942) により, 表現は $Gl(m, R)$ の既約表現 $\{2\kappa\}$ に分割され, 各既約表現は唯 1 回ずつ現れ,

$$(1.1.3) \quad V_k = \sum_{\kappa} \oplus V_{\kappa}$$

とできる. ここで $\{2\kappa\} = (2k_1, 2k_2, \dots, 2k_m)$, $\sum_{i=1}^m k_i = k$, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 0$.

$Gl(m, R)$ を直交変換群 $O(m)$ に制限するとき, V_k は直交変換に関して不変な多項式の一次元部分空間を含む. この部分空間を生成する多項式を表現の Zonal 多項式という. このとき, $(\text{tr } S)^k \in V_k$ は

$$(1.1.4) \quad (\text{tr } S)^k = \sum_{\kappa} C_{\kappa}(S)$$

と一意に分解され, $C_{\kappa}(S) \in V_{\kappa}$. この $C_{\kappa}(S)$ を分割 κ に対応する Zonal 多項式という.

直交変換に関する不変性より,

$$(1.1.5) \quad C_{\kappa}(S) = C_{\kappa}(HSH'), \quad H \in O(m)$$

であるから, $C_{\kappa}(S)$ は S の固有値の関数である. 故に, $R > 0$ とするとき,

$$(1.1.6) \quad C_{\kappa}(RS) = C_{\kappa}(R^{1/2}SR^{1/2}).$$

自然数 k について, 分割 κ, ν を

$$\kappa \equiv (k_1, k_2, \dots, k_m), \quad \sum_{i=1}^m k_i = k, \quad k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 0$$

$$\nu \equiv (1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots k^{\nu_k}), \quad \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + k\nu_k = k$$

とし,

$$s_j = \text{tr } S^j, \quad j=1, 2, \dots, m$$

とするとき, Zonal 多項式は

$$(1.1.7) \quad Z_i(S) = \sum_{\nu} z_{\nu} s_1^{\nu_1} s_2^{\nu_2} \dots s_k^{\nu_k}$$

$$(1.1.8) \quad C_i(S) = \sum_{\nu} c_{\nu} s_1^{\nu_1} s_2^{\nu_2} \dots s_k^{\nu_k} = \frac{\chi_{[2^k]}(1) 2^k k!}{(2k)!} Z_i(S),$$

$$\chi_{[2^k]}(1) = (2k)! \prod_{i < j} (2k_i - 2k_j - i + j) / \prod_{i=1}^p (2k_i + p - i)$$

と表現され, p は分割成分の数である.

係数は直交条件

$$(1.1.9) \quad \sum_{\nu} z_{\nu} c_{\lambda \nu} / z_{(k)\nu} = \delta_{\lambda l}$$

$$(1.1.10) \quad \sum_{\kappa} z_{\kappa} c_{\kappa \rho} = \delta_{\nu \rho} z_{(k)\rho}$$

をみたし

$$z_{(k)\nu} = \frac{2^k k!}{\nu_1! \dots \nu_k! 2^{\nu_1 4^{\nu_2}} \dots (2k)^{\nu_k}}$$

である.

Parkharst and James (1975) は Zonal 多項式を 12 次まで求めている. また van der Westhuyzen A. W. G. and Nagel (1979), McLaren (1979) は Zonal 多項式を求める program を与えている.

以下で Zonal 多項式の基本的性質を証明なしで与える.

(i) $X: m \times m, H \in O(m)$ とするとき,

$$(1.1.11) \quad \int_{O(m)} (\text{tr} XH)^{2k} d(H) = \sum_{\epsilon} \left(\frac{1}{2} \right)_{\epsilon}^k C_{\epsilon}(XX')$$

ここで,

$$(a)_{\epsilon} = \prod_{i=1}^m \left(a - \frac{i-1}{2} \right)_{k_i}, \quad (a)_k = a(a+1) \cdots (a+k-1)$$

$d(H)$ は直交群 $O(m)$ 上の不変測度

である.

(ii) $A > 0, B > 0$ とするとき,

$$(1.1.12) \quad \int_{O(m)} C_{\epsilon}(AHBH') d(H) = \frac{C_{\epsilon}(A)C_{\epsilon}(B)}{C_{\epsilon}(I_m)}$$

(iii) $R: m \times m$ は複素対称行列とし, $\text{Re}(R) > 0$.

$T: m \times m$ は任意の複素対称行列.

$$t + k_m > \frac{1}{2}(m-1), \quad u > \frac{1}{2}(m-1) + k_1$$

このとき,

$$(1.1.13) \quad \int_{S>0} \text{etr}(-RS) |S|^{t-(m+1)/2} C_{\epsilon}(TS) dS \\ = \Gamma_m(t; \kappa) |R|^{-t} C_{\epsilon}(TR^{-1})$$

$$(1.1.14) \quad \int_{S>0} \text{etr}(-RS) |S|^{u-(m+1)/2} C_{\epsilon}(TS^{-1}) dS \\ = \Gamma_m(u; -\kappa) |R|^{-u} C_{\epsilon}(RT)$$

ここで,

$$(1.1.15) \quad \Gamma_m(t; \kappa) = \pi^{m(m-1)/4} \prod_{i=1}^m \Gamma\left(t + k_i - \frac{i-1}{2}\right)$$

$$(1.1.16) \quad \Gamma_m(u; -\kappa) = \pi^{m(m-1)/4} \prod_{i=1}^m \Gamma\left(u - k_i - \frac{m-i}{2}\right)$$

である.

(1.1.11), (1.1.12) は James (1960, 1961) によって求められた. (1.1.12) は Saw (1977) による別証がある. (1.1.13) は Constantine (1963) による. また (1.1.14) は Constantine (1966), Khatri (1966) による.

(1.1.13) を $|S|^{t-(m+1)/2} C_\star(S)$ の Laplace 変換と考え, $|Z|^{-t} C_\star(Z^{-1})$ の逆 Laplace 変換は

$$(1.1.17) \quad \frac{2^{m(m-1)/2}}{(2\pi i)^{m(m+1)/2}} \int_{\operatorname{Re}(Z) > 0} \operatorname{etr}(SZ) |Z|^{-t} C_\star(Z^{-1}) dZ \\ = \frac{1}{\Gamma_m(t; \kappa)} |S|^{t-(m+1)/2} C_\star(S).$$

となる.

Constantine (1963) は Zonal 多項式を用いて超幾何級数を定義している. R, S を対称行列とし,

$$(1.1.18) \quad {}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; S) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{(a_1)_{\epsilon} \cdots (a_p)_{\epsilon}}{(b_1)_{\epsilon} \cdots (b_q)_{\epsilon}} \frac{C_{\star}(S)}{k!}$$

$$(1.1.19) \quad {}_pF_q^{(m)}(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; S, R)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{(a_1)_{\epsilon} \cdots (a_p)_{\epsilon}}{(b_1)_{\epsilon} \cdots (b_q)_{\epsilon}} \frac{C_{\epsilon}(R) C_{\epsilon}(S)}{k! C_{\epsilon}(I_m)}.$$

とすると、次の様な超幾何級数に関する諸公式が成立する.

$$(1.1.20) \quad {}_0F_0(S) = \text{etr}(S)$$

$$(1.1.21) \quad {}_1F_0(a; S) = |I - S|^{-a}$$

$$(1.1.22) \quad {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; XX'\right) = \int_{O(n)} \text{etr}(2XH) d(H)$$

Kummer の公式

$$(1.1.23) \quad \text{etr}(-S) {}_1F_1(a; b; S) = {}_1F_1(b-a; b; -S)$$

Euler の公式

$$(1.1.24) \quad {}_2F_1(a_1, a_2; b; S) = |I - S|^{b-a_1-a_2} {}_2F_1(b-a_1, b-a_2; b; S)$$

1.2 Zonal 多項式の和の公式

Sugiura and Fujikoshi (1969) は統計量の漸近分布関数の導出に於いて必要となる Zonal 多項式の加重和を求めている, Fujikoshi (1970, 1973) はこれらの結果を拡張している.

k の分割 $\kappa = (k_1, k_2, \dots, k_m)$, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m$, $\sum_{i=1}^m k_i = k$ に対して,

$$a_1(\kappa) = \sum_{a=1}^m k_a(k_a - \alpha), \quad a_2(\kappa) = \sum_{a=1}^m k_a(4k_a^2 - 6\alpha k_a + 3\alpha^2)$$

とおく.

公式 1.1

$$(1.2.1) \quad \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{C_{\epsilon}(Z)}{(k-l)!} = s_1^l \exp(s_1), \quad l=1, 2, \dots$$

$$(1.2.2) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{a_1(\kappa) C_{\epsilon}(Z)}{k!} = s_2 \exp(s_1)$$

$$(1.2.3) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{a_1^2(\kappa) C_{\epsilon}(Z)}{k!} = \{s_2^2 + 4s_3 + s_2 + s_1^2\} \exp(s_1)$$

$$(1.2.4) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{a_2(\kappa) C_{\epsilon}(Z)}{k!} = \{4s_3 + 3s_2 + 3s_1^2 + s_1\} \exp(s_1)$$

ここで, $s_j = \text{tr } Z^j$, $j=1, 2, \dots$ である.

(証明) Gamma 関数の漸近展開式

$$(1.2.5) \quad \log \Gamma(x+h) = \log \sqrt{2\pi} + \left(x+h-\frac{1}{2}\right) \log x - x \\ - \sum_{r=1}^m \frac{(-1)^r B_{r+1}(h)}{r(r+1)x^r} + O(|x|^{-m-1})$$

は h を固定したとき十分大きい $|x|$ に対して成立する. $B_r(h)$

は r 次の Bernoulli 多項式である.

(1.2.5) を用いて,

$$(1.2.6) \quad (n)_{\epsilon} = \Gamma_m(n; \kappa) / \Gamma_m(n) \\ = n^k \left\{ 1 + \frac{a_1(\kappa)}{2n} + \frac{1}{24n^2} \{3a_1^2(\kappa) - a_2(\kappa) + k\} + O(1/n^3) \right\}$$

である. (1.1.21) より

$$\left| I - \frac{x}{n} Z \right|^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{(n)_{\epsilon} x^k}{k! n^k} C_{\epsilon}(Z)$$

であるから上式を $1/n$ の巾級数に展開すると,

$$\text{左辺} = \exp(x s_1) \left[1 + \frac{x^2}{2n} s_2 + \frac{1}{24n^2} \{8x^3 s_3 + 3x^4 s_2^2\} + O(1/n^3) \right]$$

$$\text{右辺} = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{x^k}{k!} C_{\epsilon}(Z) + \frac{1}{2n} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{x^k a_1(\kappa)}{k!} C_{\epsilon}(Z)$$

$$+\frac{1}{24n^2}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{x^k}{k!}\{3a_1^2(\kappa)-a_2(\kappa)+k\}C_{\kappa}(Z)+O(1/n^3).$$

両辺を比較して,

$$(1.2.7) \quad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{x^k}{k!}C_{\kappa}(Z)=\exp(xs_1)$$

$$(1.2.8) \quad \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{x^ka_1(\kappa)}{k!}C_{\kappa}(Z)=x^2s_2\exp(xs_1)$$

$$(1.2.9)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{x^k\{3a_1(\kappa)^2-a_2(\kappa)+k\}}{k!}C_{\kappa}(Z)=(8x^3s_3+3x^4s_2^2)\exp(xs_1).$$

(1.2.7) を x について l 回微分して $x=1$ とすれば (1.2.1).

$x=1$ とした (1.2.8) の両辺に

$$\frac{n^{mn}}{\Gamma_m(n)|R|^n}\text{etr}(-nR^{-1}Z)|Z|^{n-(m+1)/2}$$

を乗じて $Z>0$ について積分すると, $\text{tr } Z^2=\frac{1}{2}\{2C_{(2)}(Z)-C_{(1^2)}(Z)\}$ であることより,

$$\text{左辺}=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{a_1(\kappa)}{k!}C_{\kappa}(R)+\frac{1}{2n}\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa}\frac{a_1(\kappa)^2}{k!}C_{\kappa}(R)+O(1/n^2)$$

$$\begin{aligned} \text{右辺} &= \left|I-\frac{1}{n}R\right|^{-n} \cdot \frac{1}{2}[2(n)_{(2)}C_{(2)}(\{nR^{-1}-I\}^{-1}) \\ &\quad - (n)_{(1^2)}C_{(1^2)}(\{nR^{-1}-I\}^{-1})] \end{aligned}$$

$$=\exp(s_1)\left\{s_2+\frac{1}{2n}(s_1^2+s_2+4s_3+s_2^2)\right\}+O(1/n^2).$$

両辺を比較して $1/n$ の項より, (1.2.3) を得る.

(1.2.4) は (1.2.9) より (1.2.1), (1.2.7) を用いて求められる.

(注) Sugiura and Fujikoshi (1969), Fujikoshi (1970, 1973)

はこれらの式を示す為に,

$$(1.2.10) \quad a_1(\kappa)C_\epsilon(A) = \text{tr}(A\partial)^2 C_\epsilon(\Sigma)|_{x=A}$$

$$(1.2.11) \quad \{3a_1(\kappa)^2 - a_2(\kappa) + k\}C_\epsilon(A) \\ = [3\{\text{tr}(A\partial)^2\}^2 + 8\text{tr}(A\partial)^3]C_\epsilon(\Sigma)|_{x=A}$$

を用いている。ここで $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m)$ は Σ の固有値であり, ∂ は微分作用素行列で, (i, j) 元は $\frac{1}{2}(1 + \delta_{ij})\frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}}$ である。これらの式は Zonal 多項式が或る微分作用素の固有関数であることを示している。

公式 1.2 (Fujikoshi (1970))

Z は対称行列で, 固有値の絶対値が 1 より小とする。 $V = Z(I - Z)^{-1}$ とする。このとき,

$$(1.2.12) \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{(b)_{\epsilon}}{(k-1)!} C_{\epsilon}(Z) = |I - Z|^{-b} \cdot b v_1$$

$$(1.2.13) \quad \sum_{k=2}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{(b)_{\epsilon}}{(k-2)!} C_{\epsilon}(Z) = |I - Z|^{-b} \cdot b \{b v_1^2 + v_2\}$$

$$(1.2.14) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{a_1(\kappa)(b)_{\epsilon}}{k!} C_{\epsilon}(Z) = |I - Z|^{-b} \cdot \frac{b}{2} \{v_1^2 + (2b+1)v_2\}$$

$$(1.2.15) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{a_2(\kappa)(b)_{\epsilon}}{k!} C_{\epsilon}(Z) = |I - Z|^{-b} \cdot \frac{b}{2} \{2v_1 + 3(2b+1)v_1^2 \\ + 3(2b+3)v_2 + 2v_1^3 + 6(2b+1)v_1 v_2 + 4(2b^2 + 3b + 2)v_3\}$$

$$(1.2.16) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{a_1^2(\kappa)(b)_{\epsilon}}{k!} C_{\epsilon}(Z) = |I - Z|^{-b} \cdot \frac{b}{4} \{2(2b+1)v_1^2 + 2(2b \\ + 3)v_2 + 4v_1^3 + 12(2b+1)v_1 v_2 + 8(2b^2 + 3b + 2)v_3 + b v_1^4\}$$

正值対称行列上の確率分布およびそれに関連する分布 II

$$+2(2b^2+b+2)v_1^2v_2+(2b+1)(2b^2+b+2)v_2^2 \\ +8(2b+1)v_1v_3+2(8b^2+10b+5)v_4\}$$

ここで, $v_j = \text{tr } V^j$, $j=1, 2, \dots$ である.

(証明)

(1. 2. 14) について示す. 他の式も同様に示すことが出来る.

(1. 2. 2) より

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{a_1(\kappa)}{k!} C_{\kappa}(S) = \text{tr } S^2 \text{etr } (S).$$

両辺に $\text{etr } (-Z^{-1}S)|S|^{b-(m+1)/2}/\Gamma_m(b)|Z|^b$ を乗じて, $S>0$ で積分し, $V=Z(I-Z)^{-1}$ とすれば,

$$\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{a_1(\kappa)(b)_{\kappa}}{k!} C_{\kappa}(Z) \\ = \frac{1}{2} |I-Z|^{-b} \{2(b)_{(2)} C_{(2)}(V) - (b)_{(1^2)} C_{(1^2)}(V)\} \\ = \frac{b}{2} \{v_1^2 + (2b+1)v_2\} |I-Z|^{-b}.$$

この導出法は Fujikoshi (1970) とは異なっている.

1.3 二項係数と Bingham の係数

Constantine (1966) は二項係数を拡張し, 新しい二項係数 $\binom{\kappa}{\sigma}$ を次の様にして定義した.

$$(1. 3. 1) \quad C_{\kappa}(I+S)/C_{\kappa}(I) = \sum_{l=0}^k \sum_{\sigma \in P_l} \binom{\kappa}{\sigma} C_{\sigma}(S)/C_{\sigma}(I)$$

ここで, P_l は l の分割 σ の全体を示すとする.

Constantine (1966) は $k=1(1)4$, Pillai and Jouris (1969) は

$k=5(1)8$ について $\binom{\kappa}{\sigma}$ を求めている。

Bingham (1974) は Zonal 多項式の加重和に関連して次式を示した。

$$(1.3.2) \quad \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{\kappa} \binom{\kappa}{\sigma} \frac{C_{\kappa}(S)}{k!} = C_{\sigma}(S) \operatorname{etr}(S)/l!$$

ここで, $\kappa \in P_k, \sigma \in P_l$ である。

また, (1.3.2) の両辺に $\operatorname{etr}(-Z^{-1}S)|S|^{b-(m+1)/2}/|Z|^b \Gamma_m(b)$ を乗じて $S > 0$ について積分すれば,

$$(1.3.3) \quad \sum_{k=l}^{\infty} \sum_{\kappa} \binom{\kappa}{\sigma} \frac{(b)_{\kappa} C_{\kappa}(Z)}{k!} = |I-Z|^{-b} (b)_{\sigma} C_{\sigma}(Z(I-Z)^{-1})/l!$$

となる。

(1.3.2) と (1.2.1)~(1.2.4) とを対比させると二項係数は次の様になる。

$$\begin{aligned} \binom{\kappa}{0} &= 1, & \binom{\kappa}{(1)} &= k \\ \binom{\kappa}{(2)} &= \frac{1}{3} \left\{ \binom{k}{2} + a_1(\kappa) \right\}, & \binom{\kappa}{(1^2)} &= \frac{1}{3} \left\{ 2 \binom{k}{2} - a_1(\kappa) \right\} \\ \binom{\kappa}{(3)} &= \frac{1}{15} \left[\binom{k}{3} - 2 \binom{k}{2} - \frac{1}{3} k + k a_1(\kappa) - 3 a_1(\kappa) + \frac{1}{3} a_2(\kappa) \right] \\ \binom{\kappa}{(21)} &= \frac{1}{15} \left[9 \binom{k}{3} + \frac{9}{2} \binom{k}{2} + \frac{3}{4} k + \frac{3}{2} k a_1(\kappa) \right. \\ &\quad \left. - \frac{3}{4} a_1(\kappa) - \frac{3}{4} a_2(\kappa) \right] \end{aligned}$$

$$\binom{\kappa}{(1^3)} = \frac{1}{15} \left[5 \binom{k}{3} - \frac{5}{2} \binom{k}{2} - \frac{5}{12} k - \frac{5}{2} k a_1(\kappa) + \frac{15}{4} a_1(\kappa) + \frac{5}{12} a_2(\kappa) \right].$$

Muirhead (1974) は特殊な分割に対する $\binom{\kappa}{\sigma}$ の表現を与えている.

$\kappa = (k-j, j)$, $k \geq 2j$ とし, $\kappa_1 = (k-j+1, j)$, $\kappa_2 = (k-j, j+1)$, $\kappa_3 = (k-j, j, 1)$ とするとき,

$$\binom{\kappa_1}{\kappa} = \frac{(2k-2j+3)(k-2j+1)}{(2k-4j+3)}$$

$$\binom{\kappa_2}{\kappa} = \frac{2(j+1)(k-2j)}{(2k-4j-1)}, \quad \binom{\kappa_3}{\kappa} = \frac{j(2k-2j+1)}{(k-j)(2j-1)}.$$

また, $\kappa = (k-j, 1^j)$, $k-j \geq 1$ とし, $\kappa_4 = (k-j+1, 1^j)$, $\kappa_5 = (k-j, 2, 1^{j-1})$, $\kappa_{j+2} = (k-j, 1^{j+1})$ とするとき,

$$\binom{\kappa_4}{\kappa} = \frac{(k-j)(2k-j+2)}{2k-j}$$

$$\binom{\kappa_5}{\kappa} = \frac{2(j+3)(k-j-1)}{(2k-2j-3)(j+1)}$$

$$\binom{\kappa_{j+2}}{\kappa} = \frac{(2k-j)(j+1)}{(2k-j-1)}.$$

$P(Z)$ を Z の l 次の同次対称多項式とする. Bingham (1974) は (1.3.2) に対応する形で新しい係数 $\binom{\kappa}{P}$ を定義した.

$$(1.3.4) \quad P(Z) \text{etr}(Z)/l! = \sum_{k=l}^{\infty} \sum_i \binom{\kappa}{P} C_i(Z)/k!$$

(1. 2. 1)~(1. 2. 4) 及び (1. 3. 2) を用いることにより次の様な関係が得られる.

$$\begin{aligned} \binom{\kappa}{c_\sigma(s)} &= \binom{\kappa}{\sigma}, & \binom{\kappa}{s_1^l} &= \binom{k}{k-l} \\ \binom{\kappa}{s_2} &= \frac{1}{2} a_1(\kappa) \\ \binom{\kappa}{s_1 s_2} &= \frac{1}{6} (k-2) a_1(\kappa) \\ \binom{\kappa}{s_3} &= \frac{1}{24} (a_2(\kappa) - k) - \frac{1}{8} a_1(\kappa) - \frac{1}{4} \binom{k}{2}. \end{aligned}$$

なお Bingham (1974) は P の 5 次までの対応する係数を求めている.

Bingham の係数 $\binom{\sigma}{P}$ については次式が成立する.

$$(1. 3. 5) \quad s_1^r P(Z) = \binom{k+r}{r}^{-1} \sum_{\sigma \in P_{k+r}} \binom{\sigma}{P} C_\sigma(Z)$$

$$(1. 3. 6) \quad \binom{\sigma}{s_1^r P} = \binom{k+r}{r}^{-1} \binom{s-k}{r} \binom{\sigma}{P}, \quad \sigma \in P_s, s \geq k+r.$$

さらに, $\sigma \in P_s, k \leq l \leq s$ に対して,

$$(1. 3. 7) \quad \sum_{i \in P_l} \binom{\sigma}{\lambda} \binom{\lambda}{P} = \binom{s-k}{l-k} \binom{\sigma}{P}$$

これらは (1. 3. 4) 及び $s_1^r P(Z) \text{etr}(Z)/(k+r)!$ の関係より容易に得られる.

特に, $P(Z) = C_*(Z)$ とすれば, (1. 3. 7) は

$$(1. 3. 8) \quad \sum_{i \in P_l} \binom{\sigma}{\lambda} \binom{\lambda}{\kappa} = \binom{s-k}{l-k} \binom{\sigma}{\kappa}$$

となる.

(1.3.8) で, $k=0$ とすれば, $\binom{\lambda}{(0)}=1$ であるから,

$$(1.3.9) \quad \sum_{i \in P_i} \binom{\sigma}{\lambda} = \binom{s}{l}$$

となる.

(1.3.9) は (1.3.1) で $S=xI$ として, x^l の係数を比較しても得られる.

(1.3.5) に於いて, $P(Z)=s_2, s_1 s_2, s_3$ と置くことにより Sugiura (1971) の結果が得られる.

二項係数の重要な適用は, Zonal 多項式 (変数行列の固有値の関数である) の偏微分操作を行うときに用いられる.

k の分割 $\kappa=(k_1, k_2, \dots, k_i, \dots, k_m)$, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 0$ に対して, $\kappa_i \equiv (k_1, k_2, \dots, k_i+1, \dots, k_m)$, $\kappa^{(i)} \equiv (k_1, k_2, \dots, k_i-1, \dots, k_m)$ とし, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_i+1 \geq \dots \geq k_m$, $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_i-1 \geq \dots \geq k_m$ をみたすとする.

$R=\text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_m)$, $\varepsilon = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial R_i}$ とおく. このとき, James and Constantine (1974), Muirhead (1970) は

$$(1.3.10) \quad \varepsilon C_\kappa(R)/C_\kappa(I) = \sum_{i=1}^m \binom{\kappa}{\kappa^{(i)}} C_{\kappa^{(i)}}(R)/C_{\kappa^{(i)}}(I)$$

を示している.

$$\varepsilon_s = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial S_i} \text{ を}$$

$$\int_{O(m)} \text{etr}(RH'SH) d(H) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{C_\kappa(R) C_\kappa(S)}{C_\kappa(I) k!}$$

の両辺に適用して, $C_*(S)$ の係数を比較して,

$$(1.3.11) \quad \sum_{i=1}^m \binom{\kappa_i}{\kappa} C_i(R) = (k+1) \operatorname{tr} R C_*(R)$$

となる.

Zonal 多項式の偏微分については 1.5 節であつかう.

1.4 Zonal 多項式の積

Hayakawa (1967), Khatri and Pillai (1968) は二つの Zonal 多項式の積を高次の多項式で表現する為の係数を導入した.

$C_*(S)$ は k 次, $C_i(S)$ は l 次の Zonal 多項式とし

$$(1.4.1) \quad C_*(S)C_i(S) = \sum_{\phi} a_{*,i}^{\phi} C_{\phi}(S)$$

$$(1.4.2) \quad Z_*(S)Z_i(S) = \sum_{\phi} \tilde{a}_{*,i}^{\phi} Z_{\phi}(S)$$

とする. このとき, ϕ は $f=k+l$ の分割である.

$a_{*,i}^{\phi}$ の一般表現は Richards (1982) により求められた. Davis (1979) は別の視点から一般表現を求めているが, これは後で取り扱う.

k の分割の方法として,

$$\kappa = (k_1, k_2, \dots, k_m), k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_m \geq 0, \sum_{i=1}^m k_i = k$$

$$\nu = \langle 1^{\nu_1} 2^{\nu_2} \dots k^{\nu_k} \rangle, \nu_1 + 2\nu_2 + \dots + k\nu_k = k.$$

同様にして, l の分割を.

$$\rho = \langle 1^{\rho_1} 2^{\rho_2} \dots l^{\rho_l} \rangle, \rho_1 + 2\rho_2 + \dots + l\rho_l = l$$

とする.

記号の簡略化として、次を用いる。

$$\begin{aligned} \nu! &= \nu_1! \nu_2! \cdots \nu_k! & |\nu| &= \nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_k \\ \nu + \rho &= \langle 1^{\nu_1+\rho_1}, 2^{\nu_2+\rho_2}, \dots \rangle \end{aligned}$$

k の分割 κ と ν に対して、微分作用素 ∂_κ を

$$(1.4.3) \quad \partial_\kappa = \sum_\nu \frac{z_{\kappa\nu}}{\nu! z_{(\kappa)} \nu} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial s_1^{\nu_1} \partial s_2^{\nu_2} \cdots \partial s_k^{\nu_k}}$$

とする。ここで $s_j = \text{tr } S^j$, $j=1, 2, \dots, k$ であり, $z_{\kappa\nu}$ は (1.1.7) の係数である。

係数の直交条件 (1.1.9) より, k 次の $C_i(S)$ に対し

$$(1.4.4) \quad \partial_\kappa C_i(S) = \delta_{\kappa i}$$

となる。

$C_\kappa(S) C_i(S) = \sum_\phi a_{\kappa, i}^\phi C_\phi(S)$ の両辺に f 次の ∂_ϕ を作用させれば,

$$a_{\kappa, i}^\phi = \partial_\phi (C_\kappa(S) C_i(S))$$

$$= \sum_\mu \frac{z_{\phi\mu}}{\mu! z_{(\phi)} \mu} \frac{\partial^{|\mu|}}{\partial s_1^{\mu_1} \cdots \partial s_f^{\mu_f}} \left\{ \sum_\nu c_{\kappa\nu} s_1^{\nu_1} \cdots s_k^{\nu_k} \right\} \cdot \left\{ \sum_\rho c_{i\rho} s_1^{\rho_1} \cdots s_l^{\rho_l} \right\}$$

$s_1^{\nu_1+\rho_1} s_2^{\nu_2+\rho_2} \cdots$ に $\partial^{|\mu|} / \partial s_1^{\mu_1} \cdots \partial s_f^{\mu_f}$ を作用させて,

$$(1.4.5) \quad a_{\kappa, i}^\phi = \sum_\mu \frac{z_{\phi\mu}}{z_{(\phi)} \mu} \sum_\nu \sum_{\rho} c_{\kappa\nu} c_{i\rho}$$

$\nu + \rho = \mu$

となる。

Hayakawa (1967) は

$$(1.4.6) \quad C_\phi(S \oplus T) = \sum_{k=0}^f \sum_\kappa \sum_i b_{\kappa, i}^\phi C_\kappa(S) C_i(T)$$

とする係数を導入した。ここで ϕ は f の分割, κ は k の, i は

$f-k$ の分割とする. $S \oplus T$ は S, T の直和である.

S, T に対する微分作用素を各々 $\partial_s^s, \partial_t^t$ とするとき,

$$\begin{aligned} b_{s,\lambda}^{\phi} &= \partial_s^s \partial_t^t C_{\phi}(S \oplus T) \\ &= \left\{ \sum_{\nu} \frac{z_{s\nu}}{\nu! z_{(k)\nu}} \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial s_1^{\nu_1} \cdots \partial s_k^{\nu_k}} \right\} \cdot \left\{ \sum_{\rho} \frac{z_{t\rho}}{\rho! z_{(f-k)\rho}} \frac{\partial^{|\rho|}}{\partial t_1^{\rho_1} \cdots \partial t_{f-k}^{\rho_{f-k}}} \right\} \\ &\quad \cdot (\sum_{\mu} c_{\phi\mu}(s_1+t_1)^{\mu_1} \cdots (s_f+t_f)^{\mu_f}) \end{aligned}$$

(1.4.5) と同様にして,

$$(1.4.7) \quad b_{s,\lambda}^{\phi} = \sum_{\mu} \sum_{\nu} \sum_{\rho} z_{s\nu} z_{t\rho} c_{\phi\mu} \mu! / z_{(k)\nu} z_{(f-k)\rho} \nu! \rho!$$

これらは Richards (1982) による.

1.5 偏微分方程式

James (1968) は Zonal 多項式 $C_i(R)$ が Riemann 計量を持つ空間への Laplace-Beltrami 作用素 Δ の固有関数であることに着目して,

$$(1.5.1) \quad \Delta = \sum_{i=1}^m \left\{ R_i^2 \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} + \sum_{j=1}^m \frac{R_i^2}{R_i - R_j} \frac{\partial}{\partial R_i} - \frac{1}{2}(m-3) R_i \frac{\partial}{\partial R_i} \right\}$$

を求めた.

$C_i(R)$ が固有値 $R_1, R_2, \dots, R_m$ の k 次同次多項式であることより,

$$(1.5.2) \quad \Delta C_i(R) = \left\{ a_1(\kappa) + k(m-1) - \frac{1}{2}(m-3)k \right\} C_i(R)$$

となる.

Sugiura (1973) は Σ の固有値を $R = \text{diag}(R_1, R_2, \dots, R_m)$ と

したとき, R_a の σ_{ij} に関する偏微分係数を $\Sigma=R$ の所で求めている (これは R_a の Taylor 展開でもあり, 後で用いられる).

これを用いて,

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \sigma_{ij}^2} C_i(\Sigma) \right|_{\Sigma=R} = \left\{ \frac{2}{R_i - R_j} \frac{\partial}{\partial R_i} + \frac{2}{R_j - R_i} \frac{\partial}{\partial R_j} \right\} C_i(R), i \neq j$$

$$\left. \frac{\partial^2}{\partial \sigma_{ii}^2} C_i(\Sigma) \right|_{\Sigma=R} = \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} C_i(R)$$

となることを示し, (1.2.10) が

$$(1.5.3) \quad \left\{ \sum_{i=1}^m R_i^2 \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} + \sum_{i \neq j} \frac{R_i R_j}{R_i - R_j} \frac{\partial}{\partial R_i} \right\} C_i(R) = a_1(\kappa) C_i(R)$$

であることを示している. また Sugiura (1973) は (1.2.11) に対応する偏微分作用素 G を求めた.

Muirhead (1970) は行列変数の超幾何関数 ${}_2F_1(a_1, a_2; b; S)$ のみならず偏微分方程式を求めた. Constantine and Muirhead (1972) は二行列変数の ${}_2F_1^{(m)}(a_1, a_2; b; R, S)$ のみならず偏微分方程式も求めている. Fujikoshi (1975) はこれらを拡張して ${}_3F_2^{(m)}(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; S, R)$ のみならず偏微分方程式を与えている. ${}_3F_2$ より適当な極限操作を行うことにより ${}_2F_2, {}_2F_1$, etc が得られるので, これらに対応して偏微分方程式が得られることになる.

ここで,

$$E = \sum_{i=1}^m R_i \frac{\partial}{\partial R_i}, \quad \varepsilon = \sum_{i=1}^m \frac{\partial}{\partial R_i}, \quad \gamma = \sum_{i=1}^m R_i^2 \frac{\partial}{\partial R_i}$$

$$D = \sum_{i=1}^m R_i^2 \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} + \sum_{i \neq j} \frac{R_i^2}{R_i - R_j} \frac{\partial}{\partial R_i}$$

$$\begin{aligned}
 \delta &= \sum_{i=1}^m R_i \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} + \sum_{i \neq j} \frac{R_i}{R_i - R_j} \frac{\partial}{\partial R_i} \\
 \eta &= \sum_{i=1}^m R_i^3 \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} + \sum_{i \neq j} \frac{R_i^3}{R_i - R_j} \frac{\partial}{\partial R_i} - \frac{1}{2} (m-1) \sum_{i=1}^m R_i^3 \frac{\partial}{\partial R_i} \\
 \xi &= \sum_{i=1}^m R_i^2 \frac{\partial^3}{\partial R_i^3} - \frac{1}{2} (m-1) \sum_{i=1}^m R_i \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} + \frac{3}{2} \sum_{i \neq j} \frac{R_i^2}{R_i - R_j} \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} \\
 &\quad - \frac{m}{2} \sum_{i \neq j} \frac{R_i}{R_i - R_j} \frac{\partial}{\partial R_i} + \frac{1}{2} \sum_{i \neq j \neq l} \left\{ \frac{R_i}{R_i - R_l} + \frac{R_j}{R_j - R_l} \right\} \frac{R_i}{R_i - R_j} \frac{\partial}{\partial R_i} \\
 \zeta &= 4 \sum_{i=1}^m R_i^3 \frac{\partial^3}{\partial R_i^3} + 6 \sum_{i \neq j} \frac{R_i^3}{R_i - R_j} \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} - 6(m-2) \sum_{i=1}^m R_i^3 \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} \\
 &\quad + 3 \sum_{i \neq j \neq l} \frac{R_i R_j R_l}{(R_i - R_j)(R_i - R_l)} \frac{\partial}{\partial R_i} - 3 \sum_{i \neq j} \frac{R_i^2}{R_i - R_j} \frac{\partial}{\partial R_i} \\
 &\quad + (3m-2) \sum_{i=1}^m R_i \frac{\partial}{\partial R_i} \\
 G &= 3 \sum_{i,j=1}^m R_i^2 R_j^2 \frac{\partial^4}{\partial R_i^2 \partial R_j^2} + 8 \sum_{i=1}^m R_i^3 \frac{\partial^3}{\partial R_i^3} + 6 \sum_{i \neq j} \frac{R_i^3 R_j}{R_i - R_j} \left\{ \frac{\partial^3}{\partial R_i^3} - \frac{\partial^3}{\partial R_i^2 \partial R_j} \right\} \\
 &\quad + 6 \sum_{i \neq j \neq l} \frac{R_i^2 R_j R_l}{R_j - R_l} \frac{\partial^3}{\partial R_i^2 \partial R_j} - 3 \sum_{i \neq j} \frac{R_i^2 R_j^2}{(R_i - R_j)^2} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} - \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} \right\} \\
 &\quad + 3 \sum_{i \neq j \neq l} \frac{R_i^3 R_j R_l}{(R_i - R_j)(R_i - R_l)} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} - 2 \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_j} + \frac{\partial^2}{\partial R_j \partial R_l} \right\} \\
 &\quad + 3 \sum_{i \neq j \neq k \neq l} \frac{R_i R_j R_k R_l}{(R_i - R_j)(R_k - R_l)} \frac{\partial^2}{\partial R_i \partial R_k} + 6 \sum_{i \neq j} \frac{R_i^2 R_j^2}{(R_i - R_j)^3} \frac{\partial}{\partial R_i} \\
 \sigma &= \zeta + (4m-11)D + E^2 - 2(m^2-m+1)E
 \end{aligned}$$

と置く。

これら偏微分作用素の関係は

$$\delta = \frac{1}{2}(\varepsilon \mathbf{D} - \mathbf{D} \varepsilon)$$

$$\eta = \frac{1}{2}(\mathbf{D} \gamma - \gamma \mathbf{D})$$

$$\xi = \frac{1}{2}(\delta \mathbf{D} - \mathbf{D} \delta) - \frac{1}{2}(m+1)\delta$$

$$\zeta = 3\{\mathbf{D} - (m-1)\mathbf{E}\}^2 - \mathbf{G} + \mathbf{E}$$

となり, $\mathbf{G}$ は (1. 2. 11) の固有値による表現 (Sugiura (1973))
である.

公式 1. 3

$$(1. 5. 4) \quad \mathbf{E}C_{\varepsilon}(R) = kC_{\varepsilon}(R)$$

$$(1. 5. 5) \quad \mathbf{D}C_{\varepsilon}(R) = \{a_1(\kappa) + k(m-1)\}C_{\varepsilon}(R)$$

$$(1. 5. 6) \quad \varepsilon C_{\varepsilon}(R)/C_{\varepsilon}(I) = \sum_{i=1}^m \binom{\kappa}{\kappa^{(i)}} C_{\varepsilon^{(i)}}(R)/C_{\varepsilon^{(i)}}(I)$$

$$(1. 5. 7) \quad \begin{aligned} \delta C_{\varepsilon}(R)/C_{\varepsilon}(I) \\ = \sum_{i=1}^m \binom{\kappa}{\kappa^{(i)}} \left(k_i - 1 + \frac{1}{2}(m-i) \right) C_{\varepsilon^{(i)}}(R)/C_{\varepsilon^{(i)}}(I) \end{aligned}$$

$$(1. 5. 8) \quad \gamma C_{\varepsilon}(R) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^m \binom{\kappa}{\kappa} \left(k_i - \frac{1}{2}(i-1) \right) C_{\varepsilon^{(i)}}(R)$$

$$(1. 5. 9) \quad \eta C_{\varepsilon}(R) = \frac{1}{k+1} \sum_{i=1}^m \binom{\kappa}{\kappa} \left(k_i - \frac{1}{2}(i-1) \right) \left(k_i - \frac{1}{2}(i-m) - 1 \right) C_{\varepsilon^{(i)}}(R)$$

$$(1. 5. 10) \quad \mathbf{G}C_{\varepsilon}(R) = \{3a_1(\kappa)^2 - a_2(\kappa) + k\}C_{\varepsilon}(R)$$

$$(1. 5. 11) \quad \begin{aligned} \xi C_{\varepsilon}(R)/C_{\varepsilon}(I) \\ = \sum_{i=1}^m \binom{\kappa}{\kappa^{(i)}} \left(k_i - 1 + \frac{1}{2}(m-i) \right) \left(k_i - 1 - \frac{1}{2}(i+1) \right) C_{\varepsilon^{(i)}}(R)/C_{\varepsilon^{(i)}}(I) \end{aligned}$$

$$(1.5.12) \quad \zeta C_{\kappa}(R) = a_2(\kappa) C_{\kappa}(R)$$

$$(1.5.13) \quad \delta C_{\kappa}(R) = \{a_2(\kappa) + (4m-11)a_1(\kappa) \\ + k^2 + (2m^2 - 13m + 9)k\} C_{\kappa}(R)$$

(証明) (1.5.4) は E が Euler 作用素であることより明らか. (1.5.5) は (1.5.3), (1.5.6) は (1.3.10), (1.5.7) は ϵ と D の関係より得られる. (1.5.8) は (1.3.11) に D を作用させ, (1.3.11) をくりかえして得られる. (1.5.9) は D と γ の関係より得られる. (1.5.10) は (1.2.11) による. (1.5.11), (1.5.12), (1.5.13) は容易に得られる.

(1.5.4), (1.5.5) は James (1968), (1.5.6) は Muirhead (1970), James (1974), (1.5.7) は Muirhead (1970), (1.5.8), (1.5.9) は Constantine and Muirhead (1972), (1.5.10) は Sugiura (1973), (1.5.11), (1.5.12), (1.5.13) は Fujikoshi (1975) による.

公式 1.4

$$(1.5.14) \quad \sum_{i=1}^m \binom{\kappa_i}{\kappa} C_{\kappa_i}(I) = m(k+1) C_{\kappa}(I)$$

$$(1.5.15) \quad \sum_{i=1}^m \binom{\kappa_i}{\kappa} \left(k_i - \frac{1}{2}(i-1) \right) C_{\kappa_i}(I) = k(k+1) C_{\kappa}(I)$$

$$(1.5.16) \quad \sum_{i=1}^m \binom{\kappa_i}{\kappa} \left(k_i - \frac{1}{2}(i-1) \right)^2 C_{\kappa_i}(I) \\ = (k+1) \left\{ a_1(\kappa) + \frac{1}{2}k(m+1) \right\} C_{\kappa}(I)$$

(1. 5. 17)

$$\sum_{i=1}^m \binom{\kappa_i}{\kappa} \left(k_i - \frac{1}{2}(i-1) \right)^3 C_{\kappa_i}(I) \\ = \frac{1}{4}(k+1) \{ a_2(\kappa) + (2m+3)a_1(\kappa) + k^2 + (m+1)k \} C_{\kappa}(I)$$

(証明) $\text{etr}(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} C_{\kappa}(R)/k!$ の両辺に ε を作用させ、 $C_{\kappa}(R)$ の係数を比較して (1. 5. 14) を得る. $s_1 \text{etr}(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} C_{\kappa}(R)/(k-1)!$ の両辺に δ を作用させ、 $C_{\kappa}(R)$ の係数を比較して、(1. 5. 15) を得る. $s_2 \text{etr}(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} a_1(\kappa) C_{\kappa}(R)/k!$ の両辺に δ を作用させ、 $s_1 s_2 \text{etr}(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} (k-2)a_1(\kappa) C_{\kappa}(R)/k!$ に注意して

$$\sum_{i=1}^m \binom{\kappa_i}{\kappa} \left(k_i + \frac{1}{2}(m-i) \right) a_1(\kappa_i) C_{\kappa_i}(I) \\ = (k+1) \left[2mk + a_1(\kappa) \left(k + 2 + \frac{1}{2}m(m-1) \right) \right] C_{\kappa}(I)$$

を得る. $a_1(\kappa_i) = a_1(\kappa) + 2k_i - i + 1$ であることより (1. 5. 16) を得る. (1. 2. 3) に δ を作用させ、同様の操作をして (1. 5. 17) を得る.

Fujikoshi (1975) は (1. 5. 14)~(1. 5. 17) を用いて、Muirhead (1970) と同様な方法で次の結果を与えた.

g_{κ} を行列の次数 m に無関係な係数とし、関数

$$F(R) = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} g_{\kappa} C_{\kappa}(R)$$

が

$$\begin{aligned}
 (1.5.18) \quad & \xi F + \left(b_1 + b_2 + 1 - \frac{1}{2}(m-1) \right) \delta F \\
 & + \left(b_1 - \frac{1}{2}(m-1) \right) \left(b_2 - \frac{1}{2}(m-1) \right) \varepsilon F \\
 & - \left\{ \alpha_1 \left(1 - \frac{1}{2}(m-1) \right) + \alpha_2 + 1 - \frac{1}{2}(m-1) \right\} \mathbf{E} F \\
 & - \left(\alpha_1 + 3 - \frac{1}{2}(m-1) \right) \mathbf{D} F - \frac{1}{4} \sigma F = m \alpha_3 F
 \end{aligned}$$

をみたすとき、唯一つの解は ${}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; R)$ である。ここで、

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= a_1 + a_2 + a_3, & \alpha_2 &= a_1 a_2 + a_2 a_3 + a_3 a_1 \\
 \alpha_3 &= a_1 a_2 a_3
 \end{aligned}$$

である。

Fujikoshi (1975) は二変数の ${}_3F_2^{(m)}(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; R, S)$ に対しても同種の結果を得ている。

$$(1.5.19) \quad \lim_{a_3 \rightarrow \infty} {}_3F_2(a_1, a_2, a_3; b_1, b_2; R/a_3) = {}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; R)$$

であるから、(1.5.18) で R_i/a_3 , $i=1, 2, \dots, m$ として $a_3 \rightarrow \infty$ とすれば ${}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; R)$ のみたす偏微分作用素が得られる。

$$\begin{aligned}
 (1.5.20) \quad & \xi F + \left(b_1 + b_2 + 1 - \frac{1}{2}(m-1) \right) \delta F \\
 & + \left(b_1 - \frac{1}{2}(m-1) \right) \left(b_2 - \frac{1}{2}(m-1) \right) \varepsilon F \\
 & - \left(a_1 + a_2 + 1 - \frac{1}{2}(m-1) \right) \mathbf{E} F - \mathbf{D} F = m a_1 a_2 F
 \end{aligned}$$

また,

$$(1.5.21) \quad \lim_{b_1 \rightarrow \infty} {}_2F_2(a_1, a_2; b_1, b_2; b_2 R) = {}_2F_1(a_1, a_2; b_1; R)$$

であるから, $b_2 R_i, i=1, 2, \dots, m$ と (1.5.20) でして, $b_2 \rightarrow \infty$ とすれば,

$$(1.5.22) \quad (\delta - D)F + \left(b_1 - \frac{1}{2}(m-1)\right)\epsilon F \\ - \left(a_1 + a_2 + 1 - \frac{1}{2}(m-1)\right)EF = ma_1 a_2 F$$

となる.

同様の方法により, ${}_1F_1(a; b; R)$ は

$$(1.5.23) \quad \delta F + \left(b - \frac{1}{2}(m-1)\right)\epsilon F - EF = maF$$

をみたし, ${}_0F_1(b; R)$ は

$$(1.5.24) \quad \delta F + \left(b - \frac{1}{2}(m-1)\right)\epsilon F = mF$$

をみたす.

${}_1F_1(a; c; R)$ は積分表現として

$$(1.5.25)$$

$${}_1F_1(a; c; R) \\ = \frac{\Gamma_m(c)}{\Gamma_m(a)\Gamma_m(c-a)} \int_{0 < S < I} \text{etr}(RS) |S|^{a-(m+1)/2} |I-S|^{c-a-(m+1)/2} dS$$

と書ける.

また,

(1. 5. 26)

$$\Psi(a, c; R) = \frac{1}{\Gamma_m(a)} \int_{S>0} \text{etr}(-RS) |S|^{a-(m+1)/2} |I+S|^{c-a-(m+1)/2} dS$$

とすると,

(1. 5. 27)

$$\lim_{c \rightarrow \infty} {}_2F_1(a, b; c; I - cR^{-1}) = |R|^b \Psi\left(b, b-a + \frac{m+1}{2}; R\right)$$

である.

${}_2F_1(a, b; c; R)$ に対する偏微分作用素 (1. 5. 22) を用いて,
 $|R|^{-b} {}_2F_1(a, b; c; I - cR^{-1})$ は

(1. 5. 28)

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \frac{R_i^2}{c} \left(\frac{c}{R_i} - 1 \right) \frac{\partial^2 y}{\partial R_i^2} + \sum_{i=1}^m \left\{ b - a + 1 + \frac{1}{2} (m-1) - R_i + \frac{R_i}{c} (a-b-1) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{2c} \sum_{j \neq i}^m \frac{R_i R_j (1-c/R_i)}{R_i - R_j} \right\} \frac{\partial y}{\partial R_i} + \frac{1}{2c} \sum_{i=1}^m \sum_{j \neq i}^m \frac{R_j^2 (1-c/R_j)}{R_i - R_j} \frac{\partial y}{\partial R_j} \\ & = m \left(b - \frac{ab}{c} \right) y \end{aligned}$$

をみたさねばならぬ.

$c \rightarrow \infty$ とするとき, (1. 5. 28) は

$$\begin{aligned} (1. 5. 29) \quad & \sum_{i=1}^m R_i \frac{\partial^2 y}{\partial R_i^2} + \sum_{i=1}^m \left\{ b - a + 1 - R_i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^m \frac{R_i}{R_i - R_j} \right\} \frac{\partial y}{\partial R_i} \\ & - \frac{1}{2} \sum_{i \neq j}^m \frac{R_j}{R_i - R_j} \frac{\partial y}{\partial R_j} = mby \end{aligned}$$

となり, これは $\Psi\left(b, b-a + \frac{m+1}{2}; R\right)$ がみたさねばならぬ偏微分作用素である. また (1. 5. 29) は ${}_1F_1\left(b; b-a + \frac{m+1}{2}; R\right)$ の

みたす偏微分作用素でもある。

以上より, ${}_1F_1(a; c; R)$ と $\Psi(a, c; R)$ とは同じ偏微分作用素をみたすことがわかる (Muirhead (1970 b)).

なお全ての偏微分作用素に於いて, Zonal 多項式は固有値の対称関数であるから, 各 R_i についての偏微分作用素に対しても超幾何関数は成立する. 例えば, (1.5.29) は ${}_1F_1\left(b; b-a+\frac{m+1}{2}; R\right)=y$ に対して,

$$(1.5.30) \quad R_i \frac{\partial^2 y}{\partial R_i^2} + \left\{ b-a+1-R_i + \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{R_i}{R_i-R_j} \right\} \frac{\partial y}{\partial R_i} \\ - \frac{1}{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \frac{R_j}{R_i-R_j} \frac{\partial}{\partial R_j} = by, \quad i=1, 2, \dots, m$$

をみたしている。

1.6 特殊関数

1.6.1 Jacobi 多項式

James and Constantine (1974) は Grassmann 多様体上の不変測度が Beta 密度関数

$$(1.6.1) \quad |X|^{a-(m+1)/2} |I-X|^{c-a-(m+1)/2}$$

を構成成分として表現されることに着目し, Beta 関数を Weight 関数とする Jacobi 多項式 $P_\epsilon(X)$ を求めた. $P_\epsilon(X)$ の係数を決定する為に Grassmann 多様体上の Laplace-Beltrami 作用素を

$$(1.6.2) \quad \Delta = D + (c-m+1)E - \delta - \left(a - \frac{1}{2}(m-1)\right)\epsilon$$

として求めた. このとき D と E は同次部分の作用素であり, δ と ε は次数を下げる作用素の部分である. 故に $P_\varepsilon(X)$ が A の固有関数であることより

$$(1.6.3) \quad \Delta P_\varepsilon(X) = (a_1(\kappa) + k\varepsilon) P_\varepsilon(X)$$

となる.

また $P_\varepsilon(X)$ を

$$(1.6.4) \quad P_\varepsilon(X) = \sum_{l=0}^k \sum_{\sigma} \frac{(-1)^l \binom{\kappa}{\sigma} (c)_{(\varepsilon, \sigma)}}{(a)_\sigma} \frac{C_\sigma(X)}{C_\sigma(I)}$$

と置くとき, $P_\varepsilon(X)$ の係数は漸化式

$$(1.6.5) \quad (c)_{(\varepsilon, \sigma)} = \sum_{i=1}^m \frac{\binom{\kappa}{\sigma_i} \binom{\sigma_i}{\sigma} (c)_{(\varepsilon, \sigma_i)}}{(k-l) \binom{\kappa}{\sigma} \left\{ c + \frac{a_1(\kappa) - a_1(\sigma)}{k-l} \right\}}$$

を満す.

James and Constantine (1974) は $k=1(1)3$ までの $P_\varepsilon(X)$ を求めている. $k=2$ までを例示すれば,

$$\begin{aligned} P_{(1)}(X) &= 1 - \frac{c}{a} \frac{C_{(1)}(X)}{C_{(1)}(I)} \\ P_{(2)}(X) &= 1 - \frac{2(c+1)}{a} \frac{C_{(1)}(X)}{C_{(1)}(I)} + \frac{(c+1)(c+2)}{a(a+1)} \frac{C_{(2)}(X)}{C_{(2)}(I)} \\ P_{(1^2)}(X) &= 1 - \frac{2\left(c - \frac{1}{2}\right)}{a} \frac{C_{(1)}(X)}{C_{(1)}(I)} + \frac{\left(c - \frac{1}{2}\right)(c-1)}{a\left(a - \frac{1}{2}\right)} \frac{C_{(1^2)}(X)}{C_{(1^2)}(I)} \end{aligned}$$

である.

Jacobi 多項式の生成母関数とか，また統計への直接の適用例はまだない。

1.6.2 Laguerre 多項式

Constantine (1966) は Laguerre 多項式を

$$(1.6.6) \quad \text{etr}(-X)L_i^{a-p}(X) \\ = \frac{1}{\Gamma_m(a)} \int_{S>0} \text{etr}(-S)|S|^{a-p} C_i(S) {}_0F_1(a; -SX) dS$$

として定義し，

$$(1.6.7) \quad L_i^{a-p}(X) = (a)_i C_i(I_m) \sum_{l=0}^k \sum_{\sigma} \frac{(-1)^l \binom{\kappa}{\sigma} C_{\sigma}(X)}{(a)_{\sigma} C_{\sigma}(I)}$$

を示した。ここで， $p = \frac{m+1}{2}$ である。またこれらは Weight 関数 $\text{etr}(-X)|X|^{a-p}$ に関して，任意の分割 κ, λ について直交関数となる。

Jacobi 多項式の Weight 関数である Beta 密度関数

$$\frac{\Gamma_m(c)}{\Gamma_m(a)\Gamma_m(c-a)} |X|^{a-p} |I-X|^{c-a-p} dX$$

は， X を X/c とし， $c \rightarrow \infty$ とすれば，Laguerre 多項式の Weight 関数である Γ -密度関数 (Wishart 密度関数)

$$(1.6.8) \quad \frac{1}{\Gamma_m(a)} \text{etr}(-X)|X|^{a-p} dX$$

となる。これに対応して，Jacobi 多項式 $P_i(X)$ に於いて $c \rightarrow \infty$ とすれば，

$$P_c(X/c) \rightarrow \sum_{l=0}^k \sum_{\sigma} \frac{(-1)^l \binom{k}{\sigma} C_{\sigma}(X)}{(a)_{\sigma} C_{\sigma}(I)}$$

となり，定数倍を除いて Laguerre 多項式 $L_i^{a-p}(X)$ と一致する．

(1.6.2) で x_i/c , $i=1, 2, \dots, m$ とし， $c \rightarrow \infty$ とすれば，

$$(1.6.9) \quad \left(\delta - \mathbf{E} + \left(a - \frac{1}{2}(m+1) \right) \varepsilon \right) f(X) = 0$$

となる．(James (1975)).

1.6.3 Hermite 多項式

Hayakawa (1969) は長方形行列を変数とする Hermite 多項式を定義し，Laguerre 多項式との関係，生成母関数等を求めている．

しかし，Laguerre 多項式の極限として Hermite 多項式を定義する方が自然である．

(1.6.8) で， X を $aI + \sqrt{a} X$ とし， $a \rightarrow \infty$ とすれば

$$(1.6.10) \quad \frac{1}{2^{m/2} \pi^{m(m+1)/4}} \operatorname{etr} \left(-\frac{1}{2} X^2 \right)$$

となり， $\frac{m(m+1)}{2}$ 次元対称正規密度関数となる．

また (1.6.9) で， x_i を $a + \sqrt{a} x_i$ として， $a \rightarrow \infty$ とすれば，Hermite 多項式の満すべき偏微分作用素は

$$(1.6.11) \quad (\delta^* - \mathbf{E} + k) f(x) = 0$$

ここで，

$$\delta^* = \sum_{i=1}^m \frac{\partial^2}{\partial R_i^2} + \sum_{i \neq j} \frac{1}{R_i - R_j} \frac{\partial}{\partial R_i}$$

である.

$H_i(S) = \sum_{l=0}^k \sum_{\lambda} b_{il} C_l(S) / C_i(I)$ とすると, (1. 6. 11) より係数のみ
たす漸化式は

$$(1. 6. 12) \quad b_i = \frac{1}{k-l} \left\{ \sum_{i=1}^m \begin{pmatrix} \lambda_{ii} \\ \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda \end{pmatrix} b_{i,i} \right. \\ \left. + \sum_{i < j} \left(k_i - k_j - \frac{1}{2}(i-j) \right) \left[\begin{pmatrix} \lambda_{ij} \\ \lambda_j \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_j \\ \lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda_{ij} \\ \lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_i \\ \lambda \end{pmatrix} b_{i,j} \right] \right\}$$

となる. なお, $\lambda_{ii} = (l_1, \dots, l_{i-1}, l_i+2, l_{i+1}, \dots, l_m)$, $\lambda_{ij} = (l_1, \dots, l_i+1, \dots, l_j+1, \dots, l_m)$ である, James (1975)

$H_i(S)$ についてはまだ多くのことが知られていない.

2 二変数不変多項式

Zonal 多項式を用いることにより多くの統計量の分布表現が精密な形で得られたが, なお困難な問題が残されていた. それは 1. 4 で取扱った Zonal 多項式の積, 直和表現, 二個以上の行列を含む場合の表現等についての統一的なものが無く, case by case として扱われて来た. Davis (1979, 1980) は Zonal 多項式の多変数行列への拡張を, 複素対称行列 X, Y の同時直交変換 $X \rightarrow H'XH, Y \rightarrow H'YH, H \in O(m)$ に関して不変な多項式を導入した. 方法は Zonal 多項式の導入方法と基本的には同じであるので簡単なスケッチを与える.

$X=(x_{ij}), Y=(y_{ij})$ を複素対称行列とし, $P_k[X]$ を x_{ij} の k 次同次多項式の族, $P_l[Y]$ を y_{ij} の l 次同次多項式の族, $P_{k,l}[X, Y]$ は x_{ij} の k 次, y_{ij} の l 次の同次多項式の族とする. ξ_k は $\prod_{i \leq j} x_{ij}^{k_{ij}} (\sum_{i \leq j} k_{ij} = k)$ を成分とするベクトルであり, また η_l は $\prod_{i \leq j} y_{ij}^{l_{ij}} (\sum_{i \leq j} l_{ij} = l)$ を成分とするベクトルである. ξ_k, η_l は各々 $P_k[X], P_l[Y]$ の基底ベクトルである. このとき,

$$P_{k,l}[X, Y] = P_k[X] \otimes P_l[Y]$$

である.

同時変換 $X \rightarrow L'XL, Y \rightarrow L'YL, L \in Gl(m, R)$ は $P_k[X], P_l[Y], P_{k,l}[X, Y]$ に線形変換 $T_{2k}(L), T_{2l}(L), T_{2k,2l}(L)$ を誘導する.

$$\xi_k \rightarrow T_{2k}(L)' \xi_k, \eta_l \rightarrow T_{2l}(L)' \eta_l,$$

$$\xi_k \otimes \eta_l \rightarrow T_{2k,2l}(L)' (\xi_k \otimes \eta_l).$$

$Gl(m, R)$ の多項式表現は既約不変部分空間への直和分解とできるので,

$$T_{2k,2l}(L) = \bigoplus_{\kappa} \bigoplus_{\lambda} \{ T_{2\kappa}(L) \otimes T_{2\lambda}(L) \}$$

$$P_{k,l}[X, Y] = \bigoplus_{\kappa} \bigoplus_{\lambda} \{ V_{\kappa}[X] \otimes V_{\lambda}[Y] \}$$

となる. ここで $2\kappa = (2k_1, 2k_2, \dots, 2k_m)$ である.

$T_{2\kappa}(L) \otimes T_{2\lambda}(L)$ は $2f = 2(k+l)$ 次の多項式による表現であって, 一般には既約ではない. 故に $2f$ の順序付けた分割 Φ に対応する $T_{\Phi}(L)$ の直和に分割され, 既約部分空間への分解は

$$P_{k,l}[X, Y] = \bigoplus_{\kappa} \bigoplus_{\lambda} \bigoplus_{\Phi} V_{\Phi}^{\kappa, \lambda}[X, Y]$$

となる. $\Phi = 2\phi = 2(\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_m), \sum_{i=1}^m \phi_i = f$ のとき $V_{\Phi}^{\kappa, \lambda}[X, Y]$ は直交変換で不変な多項式 $\Gamma_{\Phi}^{\kappa, \lambda}(X, Y)$ で生成される一次元部分空

間を含んでいる.

なお, 表現 2ϕ は multiplicity が 1 より大きくなる場合があり, $\Gamma_{\phi}^{\epsilon, \lambda}$ は一意に決まらない. しかし同値部分空間の直和 $\bigoplus_{\phi \equiv \phi'} V_{2\phi}^{\epsilon, \lambda} = U_{2\phi}^{\epsilon, \lambda}$ は一意に決まる.

2.1 基本的性質

公式 2.1

$$(2.1.1) \quad \Gamma_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(X, X) = \{\Gamma_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(I, I)/C_{\phi}(I)\}C_{\phi}(X)$$

$$(2.1.2) \quad \Gamma_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(X, I) = \{\Gamma_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(I, I)/C_{\epsilon}(I)\}C_{\epsilon}(X)$$

$$(2.1.3) \quad \Gamma_{\phi}^{\epsilon, 0}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} C_{\epsilon}(X), \Gamma_{\phi}^{0, \lambda}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} C_{\lambda}(Y)$$

$$(2.1.4) \quad \int_{O(m)} \Gamma_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(A'H'XHA, A'H'YHA)d(H) \\ = \Gamma_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(X, Y)C_{\phi}(AA')/C_{\phi}(I)$$

$$(2.1.5) \quad VV' \sim W_m(\Sigma, n), RR' = \Sigma \text{ とするとき,} \\ E_V[\Gamma_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(V'XV, V'YV)] \\ = 2^f \left(\frac{n}{2} \right)_{\phi} \Gamma_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(R'XR, R'YR)$$

(証明) (2.1.1): $Y=X$ とすれば, $P_{\epsilon, \lambda}[X, Y]$ の $P_f[X]$ への準同型対応を定義するから. 係数は正規化である. (2.1.2): $Y=I$ とすれば, $V_{\epsilon}[X] \otimes V_{\lambda}[Y]$ は $V_{\epsilon}[X]$ に写される. (2.1.3): $T_0(L)$ は恒等表現である. (2.1.4): $\Gamma_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(X, Y)$ を $V_{2\phi}^{\epsilon, \lambda}[X, Y]$ のベクトルの第 1 成分とし, 他は $O(m)$ の非恒等表現のもとでの不変な部分空間に有るとする. James (講義ノート) より, 表現行列 $\tilde{T}_{2\phi}(A)$ の (1.1) 成分は $C_{\phi}(AA')/C_{\phi}(I)$ であり, また

$$\int_{O(m)} \tilde{T}_{2\phi}(H) d(H) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$$

であることより，得られる．

(2.1.5): $W = R^{-1} V V' R^{-1'} \sim W_m(I, n)$. $V = R W^{1/2} H_V$, $H_V \in O(m)$ とすると, $W^{1/2} \rightarrow W^{1/2} H$, $H \in O(m)$ として (2.1.4) を用いて $O(m)$ 上で積分すれば,

$$\begin{aligned} & \Gamma_{\phi}^{\kappa, \lambda}(R' X R, R' Y R) E_{\phi}[C_{\phi}(W)/C_{\phi}(I)] \\ &= 2^f \left(\frac{n}{2} \right)_{\phi} \Gamma_{\phi}^{\kappa, \lambda}(R' X R, R' Y R). \end{aligned}$$

公式 2.2

$$\begin{aligned} (2.1.6) \quad & \int_{O(m)} C_{\kappa}(A H' X H) C_{\lambda}(B H' Y H) d(H) \\ &= \sum_{\phi \in \kappa \cdot \lambda} C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(A, B) C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(X, Y) / C_{\phi}(I) \end{aligned}$$

ここで, $\phi \in \kappa \cdot \lambda$ は $2\phi \in 2\kappa \otimes 2\lambda$ であり,

$$(2.1.7) \quad C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(X, Y) = \sqrt{\frac{C_{\phi}(I)}{2^f (m/2)_{\phi}}} \Gamma_{\phi}^{\kappa, \lambda}(X, Y)$$

とする．

証明は省略．

$C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(X, Y)$ の具体的構成法については Davis (1981) が有る．

$f=2, 3$ に対し, $\text{tr} X = (X)$ とするとき,

$$C_2^{1,1}(X, Y) = \frac{1}{3}[(X)(Y) + 2(XY)],$$

$$C_{11}^{1,1}(X, Y) = \frac{2}{3}[(X)(Y) - (XY)]$$

$$C_3^{2,1}(X, Y) = \frac{1}{15}[(X)^2(Y) + 4(XY)(X) + 2(X^2)(Y) + 8(X^2Y)]$$

$$C_{21}^{2,1}(X, Y) = \frac{2}{5}[(X)^2(Y) - 4(XY)(X) + 2(X^2)(Y) - 2(X^2Y)]$$

$$C_{21}^{1,1,1}(X, Y) = \frac{1}{\sqrt{5}}[(X)^3(Y) + 2(XY)(X) - (X^2)(Y) - 2(X^2Y)]$$

$$C_{11}^{1,1,1}(X, Y) = \frac{1}{3}[(X)^2(Y) - 2(XY)(X) - (X^2)(Y) + 2(X^2Y)]$$

Chikuse (1980) は Davis の方法を多変数の場合に拡張している。また Davis (1981) は三変数の不変多項式の構成のアルゴリズムを与えている。

(2.1.7) の正規化により (2.1.1)~(2.1.5) は次の形に書きなおされる。

$$(2.1.8) \quad C_\phi^{\kappa, \lambda}(X, X) = \theta_\phi^{\kappa, \lambda} C_\phi(X), \quad \theta_\phi^{\kappa, \lambda} = C_\phi^{\kappa, \lambda}(I, I) / C_\phi(I)$$

$$(2.1.9) \quad C_\phi^{\kappa, \lambda}(X, I) = \{\theta_\phi^{\kappa, \lambda} C_\phi(I) / C_\kappa(I)\} C_\kappa(X)$$

$$(2.1.10) \quad C_\kappa^{\kappa, 0}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} C_\kappa(X), \quad C_\lambda^{0, \lambda}(X, Y) \stackrel{\text{def}}{=} C_\lambda(Y).$$

$$(2.1.11) \quad \int_{O(m)} C_\phi^{\kappa, \lambda}(AH'XH, AH'YH) d(H) \\ = C_\phi^{\kappa, \lambda}(X, Y) C_\phi(A) / C_\phi(I)$$

$W \sim W_m(\Sigma, n)$ とするとき,

$$(2.1.12) \quad E_W[C_\phi^{\kappa, \lambda}(XW, YW)] = 2^f \left(\frac{n}{2} \right)_\phi C_\phi^{\kappa, \lambda}(X\Sigma, Y\Sigma).$$

(2.1.6) で $A=B=I$, $X \rightarrow XW$, $Y \rightarrow YW$ とし, (2.1.8), (2.1.12) を用いて,

$$(2.1.13) \quad E_W[C_\kappa(XW)C_\lambda(YW)] = \sum_{\phi \in \kappa \times \lambda} 2^f \left(\frac{n}{2} \right)_\phi \theta_\phi^{\kappa, \lambda} C_\phi^{\kappa, \lambda}(X\Sigma, Y\Sigma)$$

また, (2.1.6) で $A=B=I$ として,

$$(2.1.14) \quad C_\kappa(X)C_\lambda(Y) = \sum_{\phi \in \kappa \times \lambda} \theta_\phi^{\kappa, \lambda} C_\phi^{\kappa, \lambda}(X, Y)$$

$$(2.1.15) \quad (\text{tr} X)^k (\text{tr} Y)^l = \sum_{\kappa} \sum_{\lambda} \sum_{\phi \in \kappa \times \lambda} \theta_\phi^{\kappa, \lambda} C_\phi^{\kappa, \lambda}(X, Y)$$

$$(2.1.16) \quad C_\kappa(X)C_\lambda(X) = \sum_{\phi \in \kappa \times \lambda} (\theta_\phi^{\kappa, \lambda})^2 C_\phi(X).$$

ここで, $g_{\kappa, \lambda}^\phi \equiv \sum_{\phi' \equiv \phi} (\theta_{\phi'}^{\kappa, \lambda})^2$ とおく. これは Richards (1982) の $a_{\kappa, \lambda}^\phi$ (1.4.5) である. $a_{\kappa, \lambda}^\phi$ と $g_{\kappa, \lambda}^\phi$ との間の直接の関係については不明である.

$$(2.1.17) \quad \int_{O(m)} \text{etr}(AH'XH + BH'YH) d(H) \\ = \sum_{\kappa, \lambda, \phi} C_\phi^{\kappa, \lambda}(A, B) C_\phi^{\kappa, \lambda}(X, Y) / k! l! C_\phi(I)$$

ここで, $\sum_{\kappa, \lambda, \phi}$ は $\sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \sum_{\lambda} \sum_{\phi \in \kappa \times \lambda}$ の略である.

(2.1.17) と (1.1.12), (2.1.14) を用いて

$$(2.1.18) \quad \int_{O(m)} C_\phi^{\kappa, \lambda}(A'H'XHA, B) d(H) = C_\phi^{\kappa, \lambda}(A'A, B) C_\kappa(X) / C_\lambda(I)$$

となる.

Laplace 変換

$$(2.1.19) \quad \int_{R>0} \text{etr}(-SR) |R|^{t-(m+1)/2} C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(ARA', B) dR \\ = \Gamma_m(t; \kappa) |S|^{-t} C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(AS^{-1}A', B)$$

$$(2.1.20) \quad \int_{R>0} \text{etr}(-SR) |R|^{t-(m+1)/2} C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(XR, YR) dR \\ = \Gamma_m(t; \phi) |S|^{-t} C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(XS^{-1}, YS^{-1}).$$

(2.1.19) は $S^{-1/2}US^{-1/2}=R$ とし, $U \rightarrow HUH'$ として $O(m)$ 上で積分 (2.1.18) を用いれば良い. (2.1.20) は (2.1.12) である.

二項展開

$$(2.1.21) \quad C_{\phi}(X+Y) = \sum_{\kappa, \lambda (\phi \in \kappa \cdot \lambda)} \sum_{\phi' \equiv \phi} \theta_{\phi}^{\kappa, \lambda} \left(\frac{f}{k} \right) C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(X, Y).$$

ここで $\sum_{\kappa, \lambda (\phi \in \kappa \cdot \lambda)}$ は $\phi \in \kappa \cdot \lambda$ をみたす κ, λ についての和である. $\text{etr}(x(X+Y)) = \text{etr}(xX) \text{etr}(xY)$ として, x^f の係数を比較して (2.1.21) を得る. 特に $Y=I$ とすると,

$$C_{\phi}(I+X) = C_{\phi}(I) \sum_{\kappa, \lambda (\phi \in \kappa \cdot \lambda)} \left(\frac{f}{k} \right) \sum_{\phi' \equiv \phi} (\theta_{\phi}^{\kappa, \lambda})^2 C_{\kappa}(X) / C_{\kappa}(I)$$

故に, (1.3.1) と比較して, 二項係数は

$$(2.1.22) \quad \binom{\phi}{\kappa} = \binom{f}{k} \sum_{\lambda (\phi \in \kappa \cdot \lambda)} \sum_{\phi' \equiv \phi} (\theta_{\phi}^{\kappa, \lambda})^2$$

となる.

対称行列の最大固有値に関する積分として有用な行列変数の不完全 Gamma, Beta 関数は次式で与えられる.

不完全 Gamma 関数:

$$(2.1.23) \quad \int_{0 < S < X} \text{etr}(-AS) |S|^{t-(m+1)/2} C_1(BS) dS \\ = \frac{\Gamma_m(t) \Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma_m\left(t + \frac{m+1}{2}\right)} |X|^t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s: \phi \in s, l} \frac{(t)_{\phi} \theta_{\phi}^{s, l} C_{\phi}^{s, l}(-AX, BX)}{k! \left(t + \frac{m+1}{2}\right)_{\phi}}$$

不完全 Beta 関数:

$$(2.1.24) \quad \int_{0 < S < X} |S|^{t-(m+1)/2} |I-S|^{u-(m+1)/2} C_1(AS) dS \\ = \frac{\Gamma_m(t) \Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma_m\left(t + \frac{m+1}{2}\right)} |X|^t \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{s: \phi \in s, l} \frac{(t)_{\phi} \left(-u + \frac{p+1}{2}\right)_{\epsilon} \theta_{\phi}^{s, l} C_{\phi}^{s, l}(X, AX)}{k! \left(t + \frac{m+1}{2}\right)_{\phi}}$$

これらは

$$(2.1.25) \quad \int_{0 < S < \Omega} |S|^{t-(m+1)/2} C_{\epsilon}(TS) dS = \frac{\Gamma_m(t; \kappa) \Gamma_m\left(\frac{m+1}{2}\right)}{\Gamma_m\left(t + \frac{m+1}{2}; \kappa\right)} |\Omega|^t C_{\epsilon}(\Omega T)$$

を用いて得られる.

また

$$\begin{aligned}
 (2.1.26) \quad & \int_{0 < R < I} |R|^{t-(m+1)/2} |I-R|^{u-(m+1)/2} C_{\phi}^{s, \lambda}(R, I-R) dR \\
 &= \frac{\Gamma_m(t; \kappa) \Gamma_m(u; \lambda)}{\Gamma_m(t+u; \phi)} \theta_{\phi}^{s, \lambda} C_{\phi}(I)
 \end{aligned}$$

となる。

2.2 加重和及び二項係数

Hayakawa (1981, 1982) は Zonal 多項式の加重和と同様に不変多項式にも類似の結果が成立することを示した。

二項展開 (2.2.21) を用いて

$$(2.2.1) \quad \text{etr}(xX + yY) = \sum_{s, \lambda: \phi} x^k y^l C_{\phi}^{s, \lambda}(X, Y) / k! l!$$

$$(2.2.2) \quad |I - (xX + yY)|^{-a} = \sum_{s, \lambda: \phi} (a)_{\phi} x^k y^l C_{\phi}^{s, \lambda}(X, Y) / k! l!$$

となる。

公式 1.1, (1.2.1)~(1.2.4), 及び公式 1.2, (1.2.12)~(1.2.16) 等は (2.2.1), (2.2.2) の形で成立するので省略する。なお $W = xX + yY$ として

$$(2.2.3)$$

$$\sum_{s, \lambda: \phi} \theta_{\phi}^{s, \lambda} C_{\phi}^{s, \lambda}(xX, yY) / (k-r)!(l-s)! = (\text{tr } xX)^r (\text{tr } yY)^s \text{etr}(W)$$

$$(2.2.4) \quad \sum_{s, \lambda: \phi} a_1(\kappa) \theta_{\phi}^{s, \lambda} C_{\phi}^{s, \lambda}(xX, yY) / k! l! = x^2 \text{tr } X^2 \text{etr}(W)$$

となる。

Davis (1979) は二種類の二項係数を定義している。

$$(2.2.5) \quad C_{\phi}^{s, \lambda}(I+X, I+Y) / C_{\phi}(I)$$

$$= \sum_{r=0}^k \sum_{s=0}^l \sum_{\rho, \sigma: \tau} \binom{\kappa, \lambda: \phi}{\rho, \sigma: \tau} C_{\tau}^{\rho, \sigma}(X, Y) / C_i(I)$$

$$(2.2.6) \quad C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(I+X, Y) / C_{\phi}(I)$$

$$= \sum_{r=0}^k \sum_{\rho: \tau} \binom{\kappa: \phi | \lambda}{\rho: \tau} C_{\tau}^{\rho, \lambda}(X, Y) / C_i(I)$$

なお (2.2.6) の右辺の和に於いて, λ は左辺の同じ λ で良いことは証明すべきことである. (Davis (1979)). これらの記号で $\binom{\kappa, \lambda: \phi}{\rho, \sigma: \tau}$ は Hayakawa (1982) で用いたが, $\binom{\kappa: \phi | \lambda}{\rho: \tau}$ は本稿で初めて用いるので, 将来より良い記号が与えることを期待する.

Bingham (1974) と同種の結果が $\binom{\rho, \sigma: \tau}{\kappa, \lambda: \phi}$ についても成立する.

$$(2.2.7) \quad {}_0F_0^{(m)}(A, B; X, Y) = \sum_{\kappa, \lambda: \phi} \frac{C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(A, B) C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(X, Y)}{k!l!C_{\phi}(I)}$$

とおくとき

$$\begin{aligned} (2.2.8) \quad & \text{etr}(-AX-BY) {}_0F_0^{(m)}(A, B; X, Y) \\ &= \text{etr} \{ -(aI+A)(xI+X) - (bI+B)(yI+Y) \} \\ & {}_0F_0^{(m)}(aI+A, bI+B; xI+X, yI+Y) \end{aligned}$$

となる.

公式 2.3

$$\begin{aligned} (2.2.9) \quad & \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \sum_{\tau \in \rho, \sigma} \binom{\rho, \sigma: \tau}{\kappa, \lambda: \phi} C_{\tau}^{\rho, \sigma}(X, Y) / r!s! \\ &= C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(X, Y) \text{etr}(X+Y) / k!l! \end{aligned}$$

$$(2.2.10) \quad \sum_{r=k}^{\infty} \sum_{s=l}^{\infty} \sum_{\rho} \sum_{\sigma} \sum_{\tau \in \rho, \sigma} \binom{\rho, \sigma: \tau}{\kappa, \lambda: \phi} (a)_{\tau} C_{\tau}^{\rho, \sigma}(X, Y) / r!s!$$

$$= |I - Z|^{-a} (a)_\phi C_\phi^{a, \lambda} (X(I - Z)^{-1}, Y(I - Z)^{-1}) / k! l!$$

ここで $Z = X + Y$, $\|X + Y\| < 1$ である.

(証明) (2. 2. 8) で $x = y = 0$, $a = b = 1$ とすると,

$$\text{etr}(X + Y) {}_0F_0^{(m)}(A, B; X, Y) = {}_0F_0^{(m)}(I + A, I + B; X, Y)$$

故に二項展開 (2. 1. 21) を用いて $C_\phi^{a, \lambda}(A, B) / C_\phi(I)$ の係数を比較すれば良い.

(2. 2. 9) で, X を XS , Y を YS として $\text{etr}(-S) |S|^{a - (m+1)/2}$ を両辺に乗じて $S > 0$ で積分すれば良い. 但し $\|X + Y\| < 1$ が必要である. なお $\|X\|$ は X の固有値の絶対値の最大値を示す.

公式 2. 4

$$\begin{aligned} (2. 2. 11) \quad & \sum_{\tau} \sum_{\sigma} \sum_{\kappa, \lambda, \phi} \binom{\rho, \sigma : \tau}{\kappa, \lambda : \phi} C_{\tau}^{\rho, \sigma}(X, Y) \\ &= \binom{r}{k} \binom{s}{l} C_{\phi}^{a, \lambda}(X, Y) (\text{tr } X)^{r-k} (\text{tr } Y)^{s-l} \end{aligned}$$

$$(2. 2. 12) \quad \sum_{\tau} \sum_{\lambda} \sum_{\phi \in \rho, \sigma} \theta_{\phi}^{\tau, \lambda} \binom{\rho, \sigma : \tau}{\kappa, \sigma : \phi} = \binom{r}{k} \binom{s}{l} \theta_{\tau}^{\rho, \sigma}$$

(証明) (2. 2. 9) で X を xX , Y を yY として $x^r y^s$ の係数比較をすれば良い. また (2. 2. 11) の両辺に $\theta_{\phi}^{a, \lambda}$ を乗じて κ, λ, ϕ について加え, $C_{\tau}^{\rho, \sigma}(X, Y)$ の係数比較をすれば (2. 2. 12) を得る.

$\binom{\rho, \sigma : \tau}{\kappa, \lambda : \phi}$ の具体的表現は次の様になる.

$$\binom{\rho, \sigma : \tau}{(0), (0) : (0)} = \theta_{\tau}^{\rho, \sigma}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\begin{matrix} \rho, & \sigma : \tau \\ (1), & (0) : (1) \end{matrix} \right) &= r\theta_{\tau}^{\rho, \sigma}, \quad \left(\begin{matrix} \rho, & \sigma : \tau \\ (0), & (1) : (1) \end{matrix} \right) = s\theta_{\tau}^{\rho, \sigma} \\
 \left(\begin{matrix} \rho, & \sigma : \tau \\ (2), & (0) : (2) \end{matrix} \right) &= \frac{1}{3} \left\{ \binom{r}{2} + a_1(\rho) \right\} \theta_{\tau}^{\rho, \sigma}, \quad \left(\begin{matrix} \rho, & \sigma : \tau \\ (2), & (0) : (1^2) \end{matrix} \right) = 0 \\
 \left(\begin{matrix} \rho, & \sigma : \tau \\ (1^2), & (0) : (1^2) \end{matrix} \right) &= \frac{1}{3} \left\{ 2\binom{r}{2} - a_1(\rho) \right\} \theta_{\tau}^{\rho, \sigma}, \quad \left(\begin{matrix} \rho, & \sigma : \tau \\ (1^2), & (0) : (2) \end{matrix} \right) = 0 \\
 \left(\begin{matrix} \rho, & \sigma : \tau \\ (1), & (1) : (2) \end{matrix} \right) &= \frac{1}{3} \{ rs + a_1(\tau) - a_1(\rho) - a_1(\sigma) \} \theta_{\tau}^{\rho, \sigma} \\
 \left(\begin{matrix} \rho, & \sigma : \tau \\ (1), & (1) : (1^2) \end{matrix} \right) &= \frac{1}{3} \{ 2rs - (a_1(\tau) - a_1(\rho) - a_1(\sigma)) \} \theta_{\tau}^{\rho, \sigma}
 \end{aligned}$$

2.3 特殊関数

2.3.1 Laguerre 多項式

Davis (1979) は二種類の Laguerre 多項式を定義している。

$$(2.3.1) \quad L_{\kappa, \lambda}^{t, u; \phi}(X, Y) = \text{etr}(X+Y) \int_{R>0} \int_{S>0} \text{etr}(-R-S) |R|^t |S|^u \\
 \cdot C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(R, S) A_t(RX) A_u(SY) dR dS$$

として $L_{\kappa, \lambda}^{t, u; \phi}(X, Y)$ を定義する。ここで $A_t(RX) = {}_0F_1\left(t + \frac{m+1}{2}; -RX\right) / \Gamma_m\left(t + \frac{1}{2}(m+1)\right)$ である。これは Constantine (1966) の自然な拡張となっている。

Laplace 変換は

(2.3.2)

$$\begin{aligned}
 &\int_{R>0} \int_{S>0} \text{etr}(-RW - SZ) |R|^t |S|^u L_{\kappa, \lambda}^{t, u; \phi}(R, S) dR dS \\
 &= \Gamma_m\left(t + \frac{m+1}{2}; \kappa\right) \Gamma_m\left(u + \frac{m+1}{2}; \lambda\right) |W|^{-t-(m+1)/2} |Z|^{-u-(m+1)/2}
 \end{aligned}$$

$$\cdot C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(I - W^{-1}, I - Z^{-1})$$

となる。

二項係数 $\binom{\kappa, \lambda: \phi}{\rho, \sigma: \tau}$ を用いて $C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(I - W^{-1}, I - Z^{-1})$ を展開し、逆 Laplace 変換をすれば

$$(2.3.3) \quad L_{\kappa, \lambda: \phi}^{t, u}(X, Y) = \left(t + \frac{m+1}{2}\right)_s \left(u + \frac{m+1}{2}\right)_s C_{\phi}(I) \\ \cdot \sum_{\tau=0}^k \sum_{s=0}^l \sum_{\rho, \sigma: \tau} \frac{(-1)^{r+s} \binom{\kappa, \lambda: \phi}{\rho, \sigma: \tau} C_{\tau}^{\rho, \sigma}(X, Y)}{\left(t + \frac{m+1}{2}\right)_s \left(u + \frac{m+1}{2}\right)_s C_{\tau}(I)}$$

となる。

Constantine (1966) の Laguerre 多項式との関係は

$$(2.3.4) \quad L_{\kappa, \lambda: \phi}^{t, u}(X, I) = \theta_{\phi}^{\kappa, \lambda} L_{\kappa}^t(X) C_{\phi}(I) / C_{\kappa}(I)$$

$$(2.3.5) \quad \sum_{\phi \in \kappa + \lambda} \theta_{\phi}^{\kappa, \lambda} L_{\kappa, \lambda: \phi}^{t, u}(X, Y) = L_{\kappa}^t(X) L_{\lambda}^u(Y)$$

である。

生成母関数は

$$(2.3.6)$$

$$|I - W|^{-t - (m+1)/2} |I - Z|^{-u - (m+1)/2} \\ \cdot \int_{O(m)} \text{etr} \{-XH'W(I - W)^{-1}H - YH'Z(I - Z)^{-1}H\} d(H) \\ = \sum_{\kappa, \lambda: \phi} L_{\kappa, \lambda: \phi}^{t, u}(X, Y) C_{\phi}^{\kappa, \lambda}(W, Z) / k! l! C_{\phi}(I).$$

ここで、 $\|W\| < 1, \|Z\| < 1$ とする。

次の形の Laguerre 多項式は、

(2.3.7)

$$L_{\epsilon, \lambda; \phi}^t(X, Y) = \text{etr}(X) \int_{R>0} \text{etr}(-R) |R|^t C_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(R, Y) A_t(RX) dR$$

である.

Laplace 変換は

$$(2.3.8) \quad \int_{X>0} \text{etr}(-XW) |X|^t L_{\epsilon, \lambda; \phi}^t(X, Y) dX \\ = \Gamma_m \left(t + \frac{m+1}{2}; \kappa \right) |W|^{-t-(m+1)/2} C_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(I - W^{-1}, Y)$$

である.

(2.2.6) を用いて,

(2.3.9)

$$L_{\epsilon, \lambda; \phi}^t(X, Y) = \left(t + \frac{m+1}{2} \right)_{\epsilon} C_{\phi}(I) \sum_{r=0}^k \sum_{\rho: \tau \in \rho, \lambda} (-1)^r \begin{pmatrix} \kappa: \phi \\ \rho: \tau \end{pmatrix} \lambda \\ \cdot C_{\tau}^{\rho, \lambda}(X, Y) / \left(t + \frac{m+1}{2} \right)_{\rho} C_{\tau}(I)$$

となる.

$$(2.3.10) \quad \sum_{\phi} \theta_{\phi}^{\epsilon, \lambda} L_{\epsilon, \lambda; \phi}^t(X, Y) = L_{\epsilon}^t(X) C_{\lambda}(Y).$$

Khatri (1977) は別の形の Laguerre 多項式を定義している.

$$(2.3.11) \quad L_{\phi}^t(X, Y) = \text{etr}(X) \int_{R>0} A_t(RX) |R|^t \text{etr}(-R) C_{\phi}(YR) dR$$

X に関する Laplace 変換は

(2. 3. 12)

$$\begin{aligned}
 & \int_{X>0} \text{etr}(-ZX) |X|^t L_\phi^t(X, A) dX \\
 &= \Gamma_m \left(t + \frac{m+1}{2} : \phi \right) |Z|^{-t-(m+1)/2} C_\phi((I-Z^{-1})A) \\
 &= \Gamma_m \left(t + \frac{m+1}{2} : \phi \right) |Z|^{-t-(m+1)/2} \sum_{\kappa, \lambda (\phi \in \kappa, \lambda)} \sum_{\phi' \equiv \phi} \binom{f}{h} \theta_{\phi'}^{\kappa, \lambda} C_{\phi'}^{\kappa, \lambda}(A, -Z^{-1}A)
 \end{aligned}$$

である。故に,

$$\begin{aligned}
 (2. 3. 13) \quad & L_\phi^t(X, A) \\
 &= \left(t + \frac{m+1}{2} \right) \sum_{\kappa, \lambda (\phi \in \kappa, \lambda)} \sum_{\phi' \equiv \phi} \binom{f}{h} \theta_{\phi'}^{\kappa, \lambda} C_{\phi'}^{\kappa, \lambda}(A, -XA) \Big/ \left(t + \frac{m+1}{2} \right)_\lambda
 \end{aligned}$$

生成母関数は

$$\begin{aligned}
 (2. 3. 14) \quad & |I-Z|^{-a} \text{etr}(-YZ(I-Z)^{-1}) \\
 &= \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\phi} L_\phi^{a-(m+1)/2}(X, Z) / f!
 \end{aligned}$$

となる。この場合直交群上での積分は不用である。

Khatri は, また三変数の Laguerre 多項式も定義している。

(2. 3. 15)

$$\begin{aligned}
 & L_\kappa^{a-(m+1)/2}(S, A, T) \\
 &= \text{etr}(S) \int_{R>0} \text{etr}(-R) |R|^{a-(m+1)/2} P_\kappa(T, -A, R) A_{a-(m+1)/2}(SR) dR
 \end{aligned}$$

ここで $P_\kappa(T, A, R)$ は (2. 4. 6) で定義されている。

$L_\kappa^{a-(m+1)/2}(S, A, T)$ については 2. 4 節でその性質を述べることにする。

なお, $L_{\epsilon, \lambda: \phi}^{\epsilon, \mu}(X, Y)$, $L_{\epsilon, \lambda: \phi}^{\epsilon}(X, Y)$, $L_{\phi}^{\epsilon}(X, Y)$, $L_{\epsilon}^{\epsilon}(X, Y, T)$ 等は直交関数であることが示されている.

Hayakawa (1982) は Hermite 多項式として,

(2. 3. 15)

$$\begin{aligned} & \text{etr}(-TT')H_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(T_1, T_2) \\ &= (-1)^f \pi^{-mn/2} \int_U \text{etr}(-2i TU') \text{etr}(-UU') C_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(U_1 U_1', U_2 U_2') \\ & \quad \cdot dU_1 dU_2 \end{aligned}$$

と定義した. ここで $T=[T_1, T_2]$, $U=[U_1, U_2]_{m \times n}$, T_i, U_i は各々 $m \times n_i$ である, $m=n_1+n_2$.

このとき

$$(2. 3. 17) \quad H_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(T_1, T_2) = (-1)^f L_{\epsilon, \lambda: \phi}^{\epsilon, \lambda}((n_1-m-1)/2, (n_2-m-1)/2)(T_1 T_1', T_2 T_2')$$

となる.

$H_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(T_1, T_2)$ の生成母関数は

(2. 3. 18)

$$\begin{aligned} & \int_{O(m)} \int_{O(n_1)} \int_{O(n_2)} \text{etr}[-SS' - 2H_1 S \tilde{H}_2 T'] d(H_1) d(H_1^{(1)}) d(H_2^{(2)}) \\ &= \sum_{\epsilon, \lambda: \phi} \frac{H_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(T_1, T_2) C_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(S_1 S_1', S_2 S_2')}{k! l! \left(\frac{n_1}{2}\right)_{\epsilon} \left(\frac{n_2}{2}\right)_{\lambda} C_{\phi}(I)} \end{aligned}$$

となる.

ここで, $S=[S_1, S_2]$, $S_i: m \times n_i$, $n=n_1+n_2$, $H_1 \in O(m_1)$, $\tilde{H}_2 = \text{diag}(H_2^{(1)}, H_2^{(2)})$, $H_2^{(1)} \in O(n_1)$, $H_2^{(2)} \in O(n_2)$ である.

(2. 3. 18) は (2. 3. 16) を用い (2. 1. 6) を適用し, (1. 1. 22)

を使用すれば良い.

Mehler の公式

(2. 3. 19)

$$\begin{aligned} & (1-u^2)^{-mn/2} \int_{O(n)} \int_{O(n_1)} \int_{O(n_2)} \text{etr} \left\{ -\frac{u^2}{1-u^2} (TT' + SS') \right. \\ & \quad \left. + \frac{2u}{1-u^2} H_1 T \tilde{H}_2 S' \right\} d(H_1) d(H_2^{(1)}) d(H_2^{(2)}) \\ &= \sum_{\epsilon, \lambda \in \phi} u^{k+l} \frac{H_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(T_1, T_2) H_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(S_1, S_2)}{k! l! \left(\frac{n_1}{2} \right)_{\epsilon} \left(\frac{n_2}{2} \right)_{\lambda} C_{\phi}(I)} \end{aligned}$$

ここで $|u| < 1$ である.

なお 1. 6. 3 の一変数 Hermite 多項式と類似のものが導入されることは興味深い問題である.

2.4 $P_{\phi}(T, A)$, $P_{\phi}(T, A, B)$

Hayakawa (1969) は $T_{m \times n}$, $A_{n \times n}$ に対して,

$$(2. 4. 1) \quad \text{etr}(-TT') P_{\phi}(T, A).$$

$$= (-1)^f \pi^{-mn/2} \int_U \text{etr}(-UU' + 2iTU') C_{\phi}(UAU') dU$$

として $P_{\phi}(T, A)$ を定義した.

$$(2. 4. 2) \quad P_{\phi}(T, I_n) = H_{\phi}(T).$$

$$(2. 4. 3) \quad P_{\phi}(O, A) = (-1)^f \left(\frac{m}{2} \right)_{\phi} C_{\phi}(A).$$

生成母関数は, $\left(\frac{m}{2}\right)_\phi C_\phi(I_n) = \left(\frac{n}{2}\right)_\phi C_\phi(I_m)$ であることより,
(2.4.4)

$$\begin{aligned} & \int_{O(m)} \int_{O(n)} \text{etr}\{-UH_2AH_2'U' + 2H_1UH_2A^{1/2}T'\} d(H_1)d(H_2) \\ &= \int_{O(n)} \text{etr}(-U'UH_2AH_2') {}_0F_1\left(\frac{m}{2}; U'UH_2A^{1/2}T'TA^{1/2}H_2'\right) d(H_2) \\ &= \sum_{\kappa, \lambda: \phi} \frac{C_\phi(U'U) \theta_{\phi'}^{\kappa, \lambda} C_{\phi'}^{\kappa, \lambda}(-A, T'TA)}{k! l! \left(\frac{m}{2}\right)_\lambda C_\phi(I_n)} \\ &= \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\phi} \frac{P_\phi(T, A) C_\phi(UU')}{f! \left(\frac{m}{2}\right)_\phi C_\phi(I_n)} \end{aligned}$$

であるから, $C_\phi(UU')/f! \left(\frac{m}{2}\right)_\phi C_\phi(I_n)$ の両辺の係数を比較して
(2.4.5)

$$P_\phi(T, A) = \left(\frac{m}{2}\right)_\phi \sum_{\kappa, \lambda (\phi \in \kappa, \lambda)} \sum_{\phi' \equiv \phi} \binom{f}{k} \theta_{\phi'}^{\kappa, \lambda} C_{\phi'}^{\kappa, \lambda}(-A, T'TA) / \left(\frac{m}{2}\right)_\lambda,$$

となる (Davis (1979)).

Hayakawa (1972) は $f=4$ まで trace の関数として求めているが, (2.4.5) を用いれば $f \geq 5$ に対しても求められる.

Crowther (1975) は (2.4.1) を拡張して,
(2.4.6)

$$\begin{aligned} & P_\kappa(T, A, B) \\ &= \text{etr}(TT') \frac{1}{\pi^{np/2}} \int_U \text{etr}(-UU' - 2iTU') C_\kappa(-BUAU') dU \\ &= E_U[C_\kappa\{-B(U-iT)A(U-iT)'\}] \end{aligned}$$

を定義している.

$P_*(T, A, B)$ の適当な生成母関数, 及び一般的表現式はまだ得られていないが, $k=3$ まで具体的に求められている.

$P_*(T, A, B)$ を用いた Khatri の Laguerre 多項式 $L_k^*(S, A, T)$ は,

$$(2.4.7) \quad L_k^*(S, A, T) = E_V [L_k^*(S, (V-iT)A(V-iT)')]]$$

となり, 期待値は $V_{m \times n} \sim N(O, I_m)$ に関するものである.

直交変換に関して次式が成立する.

$$(2.4.8)$$

$$\int_{O(m)} L_k^*(HSH', A, T) d(H) = P_*(T, -A) L_k^*(S) / C_*(I_m)$$

$$L_k^*(HSH', A, T) = L_k^*(S, A, HT), \quad H \in O(m).$$

$$L_k^*(S, HAH', T) = L_k^*(S, A, TH), \quad H \in O(n).$$

3 統計量の分布

統計的複合仮説検定問題は次の様に述べられる. 母集団密度関数を $f(x|\theta)$, $\theta' = (\theta_1, \dots, \theta_p)$, $\theta'_1 = (\theta_1, \dots, \theta_q)$, $\theta'_2 = (\theta_{q+1}, \dots, \theta_p)$ とし, $x_1, x_2, \dots, x_n$ を独立な標本とする.

仮 説 $H: \theta_2 = \theta_{20}$ (与えられたベクトル)

対立仮説 $K: \theta_2 \neq \theta_{20}$

とするとき, Neyman-Pearson (1928) による尤度比検定統計量 λ は

$$\lambda = \prod_{a=1}^n \frac{f(x_a | \hat{\theta}_1, \theta_{20})}{f(x_a | \hat{\theta})}$$

である。ここで $\hat{\theta}_1$ は仮説 H のもとでの最尤推定量であり、 $\hat{\theta}$ は対立仮説 K のもとでの最尤推定量である。Wilks (1938) は仮説 H のもとで $-2 \log \lambda$ は極限分布として自由度 $(p-q)$ のカイ自乗分布を持つことを示し、また Wald (1943) は Pitman の対立仮説 $K_n: \theta_2 = \theta_{20} + \varepsilon/\sqrt{n}$ のもとで $-2 \log \lambda$ の極限分布が自由度 $(p-q)$ 、非心母数 $\varepsilon'K_{22,1}\varepsilon/2$ の非心カイ自乗分布となることを示した。この極限定理が多変量解析に於いては 1960 年代まで仮説検定の為の唯一つの拠り所であった。しかし、標本数が少ない時には検定の水準点があいまいなものとなる。その為、統計量の分布の漸近展開が必要となり、また特定の母集団分布に従う時にはその精密標本分布の導出（可能ならば）が必要である。Hayakawa (1977) は $-2 \log \lambda$ の仮説 H のもとでの分布の漸近展開を適当な正則条件のもとで

$$\begin{aligned} P\{-2 \log \lambda \leq x | H\} \\ = P_f + \frac{1}{n} \sum_{l=0}^2 a_l P_{f+2l} + O(1/n^2) \end{aligned}$$

となることを示した。ここで $f=p-q$, $P_f = P\{\chi_f^2 \leq x\}$ である。特に仮説 H が単純仮説 $\theta = \theta_0$ の場合、また母集団分布を Koopman 型の分布族に制限したとき、 $1/n$ の項を消すことが出来る補正項 ρ を求めて

$$P\{-2\rho \log \lambda \leq x | H\} = P_f + O(1/n^2)$$

となることを示している。この事実は多変量解析で母集団分布に多変量正規分布を仮定するとき、尤度比規準の分布の漸近展開は $1/n$ の項を消すことが常に出来て、カイ自乗分布への収束を早め

ることが出来ることを意味する。

また Hayakawa (1975) は Pitman の対立仮説 K_n のもとで

$$P\{-2 \log \lambda \leq x | K_n\} = P_f(\delta^2) + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=0}^2 b_i P_{f+2i}(\delta^2) + O(1/n)$$

を示している。ここで $P_f(\delta^2) = P\{\chi_f^2(\delta^2) \leq x\}$ である。

仮説 H のもとでの $1/n$ の項, K_n のもとでの $1/\sqrt{n}$ 項の導出まで Wilks, Wald から多年かかったが, H のもとでの $1/n^2$, K_n のもとでの $1/n$ の項は手計算では大変ではあるが, 数式処理が出来る計算機を使用すれば近い将来には得られるのではと思う。

仮説検定を行う為の Rao の統計量, Wald の統計量等は基本的である。Peers (1971), Harris and Peers (1980) は λ , Rao, Wald 統計量の検出力の比較を特別の母数構造の場合について行なっている。Nielsen-Cox (1979) は指数分布族の場合に同種の問題を詳しく論じている。

また, これらの漸近展開の一樣収束性については Chandra and Ghosh (1979) が論じており, 多くの統計量の分布関数の漸近展開の妥当性を保障している。

さて, 多変量正規母集団分布に上述の結果をそのまま適用することは, 母数の特定化, 母数に荷せられる制限条件等が複雑である為一般式をそのまま使用しにくい。その為, 正規分布特有の性質を用いて問題の解決をはかる方が有利であり簡便である(但し, 数学的道具立ては複雑であるが)。本章では前章で与えた各種の道具がいかにして分布の導出に用いられるかを概観する。なお統

計的多変量解析に於いて重要と見られる仮説，検定量等が前述の手法を使用しないでその分布の導出が出来る為に本報告の内に含めなかったものも多い。その為，本報告は多分に偏りの有るものであることを断っておく。全体的総合報告（分布論に関するもの）として，Krishnaiah (1978), Pillai (1976, 1977), Muirhead (1978), 塩谷 (1975, 1977), 等有る。なお Zonal 多項式の報告として Subrahmanian (1976) がある。

さて，仮説検定問題に於いて使用される基本的な統計量として，尤度比検定統計量，Lawley-Hotelling の T^2 -統計量，Bartlett-Nanda-Pillai 統計量，Roy の最大（小）固有値統計量等有る。

例として線形仮説検定問題の場合について述べることにする。

本章では特に断りが無いかぎり各種ベクトル，行列は p 次元ベクトル， p 次行列を表すとする。

N 個の独立な p 次元標本ベクトルよりなる標本行列は適当な変換をして次の様な正準形に直すことが出来る。

$$X = [X_1, X_2, X_3], \quad X_1: p \times q, \quad X_2: p \times (N-s), \quad X_3: p \times (s-q), \quad q \leq s.$$

X の各列ベクトルは独立で， $N(\cdot, \Sigma)$ とし，

$$E[X_1] = M: p \times q, \quad E[X_2] = O, \quad E[X_3] = F: p \times (s-q)$$

である。

このとき，

$$\text{仮説 } H: M=O, \quad \text{対立仮説 } K: M \neq O$$

に対する検定統計量として

$$(i) \quad \text{尤度比規準: } \lambda = (|S_2|/|S_1+S_2|)^{N/2}$$

(ii) Lawley-Hotelling 統計量: $T_0^2 = n \operatorname{tr} S_1 S_2^{-1}$

(iii) Bartlett-Nanda-Pillai 統計量:

$$V = m \operatorname{tr} S_1 (S_1 + S_2)^{-1}$$

(iv) Roy の統計量: $S_1 S_2^{-1}, S_1 (S_1 + S_2)^{-1}$ の最大 (小) 固有値等が有る.

ここで,

$$S_1 = X_1 X_1', \quad S_2 = X_2 X_2'$$

$$m = N - s + q = n + q$$

とする. S_1 を仮説行列, S_2 を誤差行列という.

なおこれらの統計量は一般線形仮説問題に拡張され, 興味有る結果が得られている, Fujikoshi (1974), Kariya (1978). また一般共分散分析については Chakravorti (1980) が有益である.

3.1 Non-central Wishart 分布

$X_{p \times n} = [\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n]$, $\mathbf{x}_\alpha \sim N(\boldsymbol{\mu}_\alpha, \boldsymbol{\Sigma})$, $\alpha = 1, 2, \dots, n$ 独立 とするとき, $S = XX'$ を非心 Wishart 行列といい, その $p(p+1)/2$ 個の成分の同時分布を非心 Wishart 分布といい, $S = XX' \sim W(\boldsymbol{\Sigma}, n, \boldsymbol{\Omega})$ と記す. ここで n は自由度, $\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\Sigma}^{-1} MM'$ は非心母数行列という.

Wishart 行列の密度関数を $w(\boldsymbol{\Sigma}, n, \boldsymbol{\Omega})$ と記す.

James (1961) は S の密度関数を

(3.1.1)

$$w(\Sigma, n, \Omega)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\text{etr}(-\Omega) \text{etr}\left(-\frac{1}{2} \Sigma^{-1} S\right) |S|^{(n-p-1)/2}}{\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right) |2\Sigma|^{n/2}} {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{2} \Sigma^{-1} \Omega S\right) \\ &= w(\Sigma, n, 0) \text{etr}(-\Omega) {}_0F_1\left(\frac{n}{2}; \frac{1}{2} \Sigma^{-1} \Omega S\right) \end{aligned}$$

として得た.

(3.1.1) は Khatri による Laguerre 多項式 (2.3.13) を用いて,

$$\begin{aligned} (3.1.2) \quad w(\Sigma, n, 0) & \sum_{\epsilon, \lambda: \phi} \theta_{\phi}^{\epsilon, \lambda} C_{\phi}^{\epsilon, \lambda}(-\Omega, \Sigma^{-1/2} S \Sigma^{-1/2} \Omega / 2) / k! l! \left(\frac{n}{2}\right)_{\phi} \\ &= w(\Sigma, n, 0) \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\phi} L_{\phi}^{(n-p-1)/2}(\Sigma^{-1/2} S \Sigma^{-1/2} / 2, -\Omega) / f! \left(\frac{n}{2}\right)_{\phi} \end{aligned}$$

と表現される.

ここで不完全 Gamma 関数 (2.1.23) を適用して

(3.1.3)

$$\begin{aligned} P\{S < X\} &= \frac{\Gamma_p\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{n+p+1}{2}\right) |2\Sigma|^{n/2}} \text{etr}(-\Omega) |X|^{n/2} \\ & \cdot \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\phi} (-1)^f L_{\phi}^{(n-p-1)/2}(\Omega, \Sigma^{-1/2} X \Sigma^{-1/2} / 2) / f! \left(\frac{n+p+1}{2}\right)_{\phi} \end{aligned}$$

となる.

$X = xI$ とすれば, S の最大固有値の分布関数が得られる.

$L_{\phi}^{(n-p-1)/2}(0, \Sigma^{-1/2} X \Sigma^{-1/2} / 2) = \left(\frac{n}{2}\right)_{\phi} C_{\phi}\left(\frac{1}{2} \Sigma^{-1} X\right)$ であるから, 中心 Wishart 行列に対しては,

(3.1.4)

$$P\{S < X\} = \frac{\Gamma_p\left(\frac{p+1}{2}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{n+p+1}{2}\right) |2\Sigma|^{n/2}} |X|^{n/2} \sum_{f=0}^{\infty} \sum_{\phi} \frac{(-1)^f \left(\frac{n}{2}\right)_{\phi} C_{\phi}\left(\frac{1}{2}\Sigma^{-1}X\right)}{f! \left(\frac{n+p+1}{2}\right)_{\phi}}$$

となり, $X = xI$ として Sugiyama (1967), Constantine (1963) が得たものとなる.

$S_1 \sim W(\Sigma, n_1, \Omega)$, $S_2 \sim W(\Sigma, n_2, 0)$ とし, S_1 と S_2 は独立とする. $B = S_1(S_1 + S_2)^{-1}$ の非心ベータ行列の固有値 $r_1, r_2, \dots, r_p$ の密度関数は

(3.1.5)

$$\frac{\pi^{p^2/2} \Gamma_p\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{n_1}{2}\right) \Gamma_p\left(\frac{n_2}{2}\right) \Gamma_p\left(\frac{p}{2}\right)} \text{etr}(-\Omega) |B|^{(n_1-p-1)/2} |I-B|^{(n_2-p-1)/2} \prod_{i < j} (r_i - r_j) \cdot {}_1F_1^{(p)}\left(\frac{n_1+n_2}{2}; \frac{n_1}{2}; \Omega, B\right).$$

となる.

同様にして B の最大固有値 r_1 の分布関数は

(3.1.6)

$$P\{r_1 \leq x\} = \frac{\pi^{p^2/2} \Gamma_p\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{n_1+p+1}{2}\right) \Gamma_p\left(\frac{n_2}{2}\right)} \text{etr}(-\Omega) x^{n_1 p/2}$$

$$\cdot \sum_{s, l: \phi} \frac{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)_i \left(-\frac{n_2}{2} + \frac{p+1}{2}\right)_s \left(\frac{n_1}{2}\right)_\phi}{\left(\frac{n_1}{2}\right)_i \left(\frac{n_1+p+1}{2}\right)_\phi k! l!} (\theta_\phi^{s, l})^2 \frac{C_i(\Omega) C_\phi(I)}{C_i(I)}$$

となる.

Chikuse (1981) は, $S_i \sim W(\Sigma, n_i, \Omega_i), i=0, 1, 2$ 独立 とするとき $D=(S_1+S_2)^{-1/2} S_0 (S_1+S_2)^{-1/2}$ について論じている.

3.2 尤度比規準

Constantine (1963) は

$$(3.2.1) \quad E[\{ |S_2| / |S_1+S_2| \}^h]$$

$$= \frac{\Gamma_p \left(h + \frac{N-s}{2} \right) \Gamma_p \left(\frac{N-s+q}{2} \right)}{\Gamma_p \left(\frac{N-s}{2} \right) \Gamma_p \left(h + \frac{N-s+q}{2} \right)} {}_1F_1 \left(h; h + \frac{N-s+q}{2}; -\Omega \right)$$

を求めた.

これより $-2\rho \log \lambda, \rho N = N-s + \frac{1}{2}(q-p-1)$ の特性関数は

$$(3.2.2)$$

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \frac{\Gamma_p \left(\frac{1}{2}m(1-2it) + \frac{1}{4}(p-q+1) \right) \Gamma_p \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}(p+q+1) \right)}{\Gamma_p \left(\frac{m}{2} + \frac{1}{4}(p-q+1) \right) \Gamma_p \left(\frac{1}{2}m(1-2it) + \frac{1}{4}(p+q+1) \right)} \\ &\quad \cdot {}_1F_1 \left(-itm; \frac{m}{2}(1-2it) + \frac{1}{4}(p+q+1); -\Omega \right) \\ &= C_1(t) C_2(t). \end{aligned}$$

$\Omega=O$ のとき, $\varphi(t)=C_1(t)$ である. Gamma 関数の展開式 (1.

2.5) を用いて,

(3.2.3)

$$C_1(t) = \frac{1}{(1-2it)^{pq/2}} \left[1 + \frac{pq}{48m^2} (p^2 + q^2 - 5) \left\{ \frac{1}{(1-2it)^2} - 1 \right\} \right. \\ \left. + O(1/m^3) \right]$$

となる.

また (1.2.5) を用いて,

(3.2.4)

$${}_1F_1 \left(-itm; \frac{m}{2}(1-2it) + \frac{1}{4}(p+q+1); -\Omega \right) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \left(\frac{2it}{1-2it} \right)^k \frac{C_{\kappa}(\Omega)}{k!} \left\{ 1 - \frac{1}{m} \left[(p+q+1)k \frac{1}{1-2it} + a_1(\kappa) \frac{2it}{1-2it} \right] \right. \\ + \frac{1}{m^2} \left[\frac{(1-4it)k}{24(it)^2(1-2it)^2} + \frac{(p+q+1)^2 k(k+1)}{8(1-2it)^2} \right. \\ + \frac{(p+q+1)a_1(\kappa)}{2(1-2it)^2} \left(1 + \frac{k}{2it} \right) - \frac{(1-4it)a_2(\kappa)}{24(it)^2(1-2it)^2} \\ \left. \left. + \frac{a_1(\kappa)}{8(it)^2(1-2it)^2} \right] + O(1/m^3) \right\}$$

加重和 (1.2.1)~(1.2.4) を適用し, (3.2.2) とまとめると,

$$(3.2.5) \quad \varphi(t) = (1-2it)^{-pq/2} \exp \{ 2its_1(1-2it)^{-1} \}$$

$$\cdot \left[1 + \frac{1}{2m} \sum_{\alpha=1}^3 h_{2\alpha}(\Omega) (1-2it)^{-\alpha} \right. \\ \left. + \frac{1}{m^2} \sum_{\alpha=0}^6 g_{2\alpha}(\Omega) (1-2it)^{-\alpha} \right] + O\left(\frac{1}{m^3} \right)$$

ここで

$$\begin{aligned}
 h_2(\Omega) &= (p+q+1)s_1, \\
 h_4(\Omega) &= -(p+q+1)s_1 + 2s_2, \quad h_6(\Omega) = -2s_2 \\
 g_0(\Omega) &= -\frac{1}{48}pq(p^2+q^2-5), \quad g_2(\Omega) = 0, \\
 g_4(\Omega) &= \frac{1}{8}(p+q+1)^2(s_1^2-2s_1) + \frac{1}{2}(p+q+1)s_2 + \frac{1}{48}pq(p^2+q^2-5) \\
 g_6(\Omega) &= \frac{1}{4}(p+q+1)^2s_1 - (1+2(p+q+1))s_2 \\
 &\quad - \left\{ 1 + \frac{1}{4}(p+q+1)^2 \right\} s_1^2 + \frac{4}{3}s_3 + \frac{1}{2}(p+q+1)s_1s_2 \\
 g_8(\Omega) &= \left\{ 1 + \frac{3}{2}(p+q+1) \right\} s_2 + \left\{ 1 + \frac{1}{8}(p+q+1)^2 \right\} s_1^2 \\
 &\quad - 4s_3 - (p+q+1)s_1s_2 + \frac{1}{2}s_2^2 \\
 g_{10}(\Omega) &= \frac{8}{3}s_3 + \frac{1}{2}(p+q+1)s_1s_2 - s_2^2, \quad g_{12}(\Omega) = \frac{1}{2}s_2^2
 \end{aligned}$$

$$s_j = \text{tr } \Omega^j, \quad j=1, 2, 3.$$

である.

$\varphi(t)$ を反転すれば, $pq=f$ として,

$$\begin{aligned}
 P\{-2\rho \log \lambda \leq x\} &= P_f(\delta^2) + \frac{1}{2m} \sum_{a=1}^3 h_{2a}(\Omega) P_{f+2a}(\delta^2) \\
 &\quad + \frac{1}{m^2} \sum_{a=0}^6 g_{2a}(\Omega) P_{f+2a}(\delta^2) + O(1/m^3).
 \end{aligned}$$

ここで $P_{f+l}(\delta^2) = P\{\chi^2_{f+l}(\delta^2) \leq x\}$, $\chi^2_{f+l}(\delta^2)$ は自由度 $f+l$, 非心母数 δ^2 のカイ自乗変数である.

この結果は Sugiura and Fujikoshi (1969) による. Fujikoshi (1973) はこれを $1/m^3$ まで展開している.

$\Omega=0$ としたとき, Hill and Davis (1969) は λ の $\alpha\%$ 点を自由度 pq の χ^2 分布の $\alpha\%$ 点で表現する式を求めている.

Lee, Krishnaiah and Chang (1976) は仮説 H のもとでの分布展開を $1/m^{14}$ まで求めている. これは Bernoulli 多項式の 15 次までの式が Abramowitz and Segun (Handbook of mathematical functions, Dover pub. 1968) に有るからであろうか, この表現を用いて計算機による分布関数のパーセント点の探索は有益である.

Pillai と Nagarsenker は, 統計量 $L=\lambda^{2/N}$ の積率 $E[L^h]$ が Gamma 関数の積として表現されるので, 逆 Mellin 変換を用いて L の精密密度関数を求める方法を提案している.

$E[L^h]$ は (3.2.1) であるから, L の密度関数は

$$(3.2.6) \quad f(L) = \frac{\Gamma_p\left(\frac{n+b}{2}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{C_{\kappa}(-\Omega)}{k!} p_{\kappa}(L)$$

$$(3.2.7) \quad p_{\kappa}(L) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} L^{-h-1} \left\{ \frac{\Gamma_p(h; \kappa) \Gamma_p\left(h + \frac{n}{2}\right)}{\Gamma_p(h) \Gamma_p\left(h + \frac{n+b}{2}; \kappa\right)} \right\} dh$$

$\frac{1}{2}(n+1-\mu)+h=s$ とするとき,

$$(3.2.8) \quad p_{\kappa}(L) = \frac{1}{2\pi i} L^{(n-\mu-1)/2} \int_{d-i\infty}^{d+i\infty} L^{-s} \phi(s) ds$$

$$\phi(s) = \prod_{i=1}^p \left[\frac{\Gamma\left(s+k_i - \frac{n-\mu+i}{2}\right) \Gamma\left(s + \frac{\mu-i}{2}\right)}{\Gamma\left(s - \frac{n-\mu+i}{2}\right) \Gamma\left(s+k_i + \frac{\mu+b-i}{2}\right)} \right]$$

となる. これより (1.2.5) を用いて展開し,

$$(3.2.9) \quad \phi(s) = s^{-v} \left[1 + \sum_{r=1}^{\infty} l_r / s^r \right]$$

とする. ここで,

$$v = pb/2,$$

$$q_r = (-1)^{r-1} \sum_{i=1}^p [B_{r+1}(N_1) + B_{r+1}(N_2) - B_{r+1}(N_3) - B_{r+1}(N_4)] / r(r+1)$$

$$N_1 = k_i - \frac{n-\mu+i}{2}, \quad N_2 = \frac{\mu-i}{2}, \quad N_3 = -\frac{n-\mu+i}{2}, \quad N_4 = k_i + \frac{\mu+b-i}{2}$$

である. また,

$$l_r = \frac{1}{r} \sum_{k=1}^r k q_k l_{r-k}, \quad l_0 = 1$$

をみだす.

v が整数の場合と半整数の場合に分けて計算を行うが, v が整数の時には, 留数定理より,

$$(3.2.10) \quad p_\epsilon(L) = L^{(n-\mu-1)/2} \sum_{r=0}^{\infty} [(-\log L)^{v+r-1} l_r / \Gamma(v+r)]$$

となり, L の密度関数が求められる. v が半整数の場合は省略する (Nagarsenker (1977)).

$\Omega = 0$ の場合には, この密度関数の表現は計算機を用いることにより容易に分布関数, パーセント点の探索が出来る. しかし,

$\Omega \neq 0$ の時には Zonal 多項式は低次の場合しか得られていないので使用しにくい。

Pillai, Nagarsenker はこの方法を用いて, 多変数正規分布の母数に関する尤度比検定統計量の積率が Gamma 関数で表現されるので, パーセント点の数表をいくつか与えている. Nagarsenker and Pillai (1973 a, b), (1974).

3.3 Lawley-Hotelling の T_0^2

Lawley-Hotelling の T_0^2 -統計量 $T_0^2 = n \operatorname{tr} S_1 S_2^{-1}$ の分布は多くの人によって取り扱われ, そのたびに新しい導出法が提示された。

精密密度関数は Constantine (1966) が行列変数の Laguerre 多項式を用いて $0 < T_0^2 < n$ に対して収束する巾級数展開として求めた。Ito (1956, 1960), Siotani (1957, 1971) は摂動法による方法, Davis (1968, 1971) は $\Omega = 0$ の時に常微分方程式を用いる方法, Fujikoshi (1970), Hayakawa (1972) は Laguerre 多項式の加重和を用いる方法等により求めている。ここでは Muirhead (1972) の偏微分方程式を用いる方法を述べる。Muirhead (1970) は $\Omega = 0$ の場合も同じ手法で求めている。

Muirhead (1970) は ${}_1F_1(a; c; R)$ と $\Psi(a, c; R)$ が同じ偏微分方程式

$$(3.3.1) \quad R_i^2 \frac{\partial^2 y}{\partial R_i^2} + \left\{ c - \frac{p-1}{2} - R_i + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{R_i}{R_i - R_j} \right\} \frac{\partial y}{\partial R_i} - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{R_j}{R_i - R_j} \frac{\partial y}{\partial R_j} = a y, \quad i=1, 2, \dots, p$$

をみたすことを示した (1. 5. 29).

第2種の Bessel 関数

$$(3.3.2) \quad B_s(R) = \int_{s>0} \text{etr}(-RS) \text{etr}(-S^{-1}) |S|^{s-(p+1)/2} dS$$

と $\Psi(a, c; R)$ の関係は,

$$(3.3.3) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \{I'(a) a^{p(p+1)/2 - pc} \Psi(a, c; R/a)\} = B_{c-(p+1)/2}(R)$$

となる.

(1. 5. 29) を (1. 5. 28) の関係より求めたのと同様にして, $B_{c-(p+1)/2}(R)$ は次の偏微分方程式を満す.

$$(3.3.4) \quad R_i \frac{\partial^2 y}{\partial R_i^2} + \left\{ c - \frac{1}{2}(p-1) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{R_i}{R_i - R_j} \right\} \frac{\partial y}{\partial R_i} \\ - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^p \frac{R_j}{R_i - R_j} \frac{\partial y}{\partial R_j} = y, \quad i=1, 2, \dots, p$$

これは ${}_0F_1(c; R)$ に対する偏微分方程式 (1. 5. 24) の R_i に対するものと同じである.

一般性を失うことなく, $\Sigma = I/2$ とするとき, $T_0^2 = n \text{tr} S_1 S_1^{-1}$ の積率母関数は $S_2 > 0$ で積分すると,

$$(3.3.5) \quad g(t, \Omega) = E[\text{etr}(-tn S_1 S_1^{-1})] \\ = \frac{\text{etr}(-\Omega)}{\Gamma_p\left(\frac{q}{2}\right) \Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)} \int_{S_1 > 0} \text{etr}(-S_1) |S_1|^{(q-p-1)/2} {}_0F_1\left(\frac{q}{2}; \frac{1}{2} \Omega S_1\right) \\ \cdot B_{-n/2}(nt S_1) dS_1$$

ここで,

$$(3.3.6) \quad \lim_{R \rightarrow 0} B_{-n/2} \left(\frac{n}{2} R \right) / \Gamma_p \left(\frac{n}{2} \right) = 1$$

$$(3.3.7) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} B_{-n/2} \left(\frac{n}{2} R \right) / \Gamma_p \left(\frac{n}{2} \right) = \text{etr}(-R)$$

であるから,

$$(3.3.8) \quad B_{-n/2} \left(\frac{n}{2} R \right) / \Gamma_p \left(\frac{n}{2} \right) = \text{etr}(-R) \exp(H(R))$$

$$H(R) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_k(R) / n^k, \quad Q_k(O) = 0, \quad k=1, 2, \dots$$

とおく. よって $B_{-n/2} \left(\frac{n}{2} R \right)$ の偏微分方程式より,

(3.3.9)

$$\begin{aligned} R_i \left\{ \frac{\partial^2 H}{\partial R_i^2} + \left(\frac{\partial H}{\partial R_i} \right)^2 \right\} + \left\{ 1 - \frac{n}{2} - 2R_i + \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^p \frac{R_i}{R_i - R_j} \right\} \frac{\partial H}{\partial R_i} \\ - \frac{1}{2} \sum_{j \neq i}^p \frac{R_j}{R_i - R_j} \frac{\partial H}{\partial R_j} = \frac{1}{2} (p+1) - R_i, \quad i=1, 2, \dots, p. \end{aligned}$$

$H(R)$ を上式に代入し, $n^0, n^{-1}, n^{-2}, \dots$ の係数比較して偏微分方程式を解くことにより,

$$Q_1 = s_2 - (p+1)s_1$$

$$Q_2 = -\frac{8}{3}s_3 + (3p+4)s_2 + s_1^2 - (p+1)^2 s_1$$

$$Q_3 = 10s_4 + \frac{8}{3}(5p+8)s_3 - 8s_1s_2 + (6p^2+16p+13)s_2$$

$$+ (4p+5)s_1^2 - (p+1)^3 s_1$$

等となる. なお $s_j = \text{tr} R^j$, $j=1, 2, \dots$ である.

故に

$$(3.3.10) \quad \exp(H(R)) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P_k(R)/n^k$$

とでき,

$$P_1 = Q_1 = C_{(2)}(R) - \frac{1}{2}C_{(1)^2}(R) - (p+1)C_{(1)}(R)$$

$$P_2 = Q_2 + \frac{1}{2}Q_1^2$$

$$P_3 = Q_3 + Q_1Q_2 + \frac{1}{6}Q_1^3$$

⋮

である. 以上まとめて,

$$(3.3.11) \quad \frac{B_{-n/2}(ntS_1)}{\Gamma_p\left(\frac{n}{2}\right)} = \text{etr}(-2tS_1) \left[1 + \frac{P_1}{n} + \frac{P_2}{n^2} + O\left(\frac{1}{n^3}\right) \right].$$

これを (3.3.5) に代入して項別積分を行えば良い.

第1項は,

$$(3.3.12)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\text{etr}(-\Omega)}{\Gamma_p\left(\frac{q}{2}\right)} \int_{S_1 > 0} \text{etr}(-(1+2t)S_1) |S_1|^{(q-p-1)/2} {}_0F_1\left(\frac{q}{2}; \frac{1}{2}\Omega S_1\right) dS_1 \\ &= \text{etr}\left(-\frac{t}{1+2t}\Omega\right) (1+2t)^{-pq/2} \end{aligned}$$

$1/n$ の項は

$$(3.3.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\text{etr}(-\Omega)}{\Gamma_p\left(\frac{q}{2}\right)} \int_{S_1 > 0} \text{etr}(-(1+2t)S_1) |S_1|^{(q-p-1)/2} {}_0F_1\left(\frac{q}{2}; \frac{1}{2}\Omega S_1\right) \\ & \quad \cdot P_1(S_1) dS_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \text{etr} \left(-\frac{t}{1+2t} \Omega \right) (1+2t)^{-pq/2} \left\{ \left(\frac{2t}{1+2t} \right)^2 \left[L_{\binom{q}{3}}^{(q-p-1)/2} \left(-\frac{1}{2(1+2t)} \Omega \right) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. - \frac{1}{2} L_{\binom{q-p-1}{3}}^{(q-p-1)/2} \left(-\frac{1}{2(1+2t)} \Omega \right) \right] \right. \\
 &\quad \left. - \left(\frac{2t}{1+2t} \right) (p+1) L_{\binom{q-p-1}{3}}^{(q-p-1)/2} \left(-\frac{\Omega}{2(1+2t)} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

以下同様に行う。

Laguerre 多項式を $C_*(\Omega)$ で表現し、また $C_*(\Omega)$ を trace の関数で表現することにより、 $\sigma_j = \text{tr} \Omega^j$ として、

(3.3.14)

$$\begin{aligned}
 g(t, \Omega) &= \text{etr} \left(-\frac{t}{1+2t} \Omega \right) (1+2t)^{-pq/2} \left\{ 1 + \frac{T_1}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right\} \\
 T_1 &= \frac{\sigma_2}{4(1+2t)^4} + \frac{1}{2(1+2t)^3} \{ -\sigma_2 + (p+q+1)\sigma_1 \} \\
 &\quad + \frac{1}{4(1+2t)^2} [\sigma_2 - 2(p+2q+1)\sigma_1 + pq(p+q+1)] \\
 &\quad + \frac{q}{2(1+2t)} (\sigma_1 - pq) + \frac{pq}{4} (q-p-1).
 \end{aligned}$$

これを反転することにより T_0^2 の分布関数の漸近展開式を得る。

(3.3.15)

$$P\{T_0^2 \leq x\} = P\{\chi_{pq}^2(\delta^2) \leq x\} + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^4 a_j P_{pq+2j}(\delta^2) + O(1/n^2).$$

ここで

$$\begin{aligned}
 a_1 &= -pq(q-p-1) & a_2 &= -2q\sigma_1 + pq(p+q+1) \\
 a_3 &= -\sigma_2 + 2(p+q+1)\sigma_1 & a_4 &= \sigma_2
 \end{aligned}$$

である。

Muirhead (1972) は $1/n^2$ まで求めている. また Davis (1970) は $\Omega=0$ について $1/n^4$ まで求めている.

Hotelling T^2 に対しては次の様なものが考えられる.

(i) $S_1 \sim W_p(\Sigma_1, n_1, \Omega), S_2 \sim W_p(\Sigma_2, n_2)$. 独立とするとき, $T_1 = \text{tr} S_1 S_2^{-1}$ は仮説 $H: \Sigma_1 = \Sigma_2$ の検定に使用される.

(ii) $S_1 \sim W_p(I, n_1, \Omega_1), S_2 \sim W_p(I, n_2, \Omega_2)$, 独立とするとき, $T_2 = \text{tr} S_1 S_2^{-1}$ を Doubly non-central Hotelling T^2 という.

これらの精密標本分布関数は Davis (1979) により各々次の様に求められている.

(3. 3. 16)

$$f_1(T) = \frac{\Gamma_p\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{n_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_1 p}{2}\right)} \text{etr}(-\Omega) |\Psi|^{-n_1/2} T^{pn_1/2-1} \\ \cdot \sum_{f=0}^{\infty} \frac{(-T)^f}{f! \left(\frac{pn_1}{2}\right)_f} \sum_{\phi} \left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)_{\phi} L_{\phi}^{(n_1-p-1)/2}(\Omega, \Psi^{-1}),$$

ここで, $\Psi = \Sigma_1^{1/2} \Sigma_2^{-1} \Sigma_1^{1/2}$ である.

(3. 3. 17)

$$f_2(T) = \frac{\Gamma_p\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)}{\Gamma_p\left(\frac{n_2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_1 p}{2}\right)} \text{etr}(-\Omega_1 - \Omega_2) T^{pn_1/2-1} \\ \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-T)^k}{k! \left(\frac{pn_1}{2}\right)_k} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{\epsilon, \lambda: \phi} \left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)_{\phi} \theta_{\phi}^{\epsilon, \lambda} L_{\epsilon, \lambda: \phi}^{(n_1-p-1)/2}(\Omega_1, \Omega_2) / l! \left(\frac{n_2}{2}\right)_l,$$

となる。

Hayakawa (1981) は T_2 の密度関数の漸近展開を Hayakawa (1972) と類似の方法で求めている。

偏微分方程式を用いて統計量の分布を求める論文として, Muirhead (1970 b, 1972 a, 1972 b), Muirhead and Chikuse (1975), Constantine and Muirhead (1976), Fujikoshi (1974), Sugiura (1972, 1974), Chikuse (1976, 1977) 等がある。

3.3 Bartlett-Nanda-Pillai 統計量 V

Bartlett (1939), Nanda (1950) により提案され, Pillai (1955) が再定義した。その後 Pillai が V について多くの論文を書いたので, Pillai の統計量という人もいる。

$V = m \text{tr } S_1(S_1 + S_2)^{-1}$, $m = N - s + q = n + q$ ($p \leq q$) のとき, Pillai (1968) は積率母関数が

$$(3.3.1) \quad M(t) = \text{etr}(-\Omega) I \left[\frac{1}{\Gamma_p\left(\frac{m}{2}\right)} \int_{S>0} \text{etr}(-S) |S|^{(m-p-1)/2} \cdot {}_1F_1\left(\frac{q}{2}; \frac{m}{2}; mtI + \Omega^{1/2} S \Omega^{1/2} T^{-1}\right) dS \right]$$

となることを示した。

ここで

$$(3.3.2) \quad I[f] = \Gamma_p\left(\frac{q}{2}\right) \frac{2^{p(p-1)/2}}{(2\pi i)^{p(p+1)/2}} \int_{\text{Re}(Z)>0} \text{etr}(Z) |Z|^{-q/2} f(Z) dZ$$

である。

二項展開式を用いて,

$$(3.3.3) \quad M(t) = \text{etr}(-\Omega) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\kappa} \frac{\left(\frac{q}{2}\right)_{\kappa} \left(\frac{m}{2}\right)_{\kappa}}{\left(\frac{m}{2}\right)_{\kappa} k!} C_{\kappa}(2tI) \\ \cdot \sum_{l=0}^k \sum_{\sigma} \left(\frac{\kappa}{\sigma}\right) \frac{\left(\frac{m}{2}\right)_{\sigma} C_{\sigma}(\Omega/mt)}{\left(\frac{q}{2}\right)_{\sigma} C_{\sigma}(I)}$$

となる。しかし、 $M(t)$ の $1/m$ に関する展開を初等的表現にするには二項係数にともなう加重和の知識が現在不足していて、(3.3.3) より直接には得られない。

一方 Fujikoshi (1970) は (3.3.1) を適当に Taylor 展開をする方法により $M(t)$ の漸近展開を求めた。 $\Omega=0$ の場合には Fujikoshi (1973) は $1/n^3$ の項までの展開を求め、分布関数を求めている。Muirhead (1970) はやはり $\Omega=0$ について偏微分法を用いる方法で $1/n^2$ まで求めている。

得られる結果は類似であるので詳細は省略。

3.4 Roy の最大(小)固有値

Roy (1953) は各種の仮説検定に於いて、対称確率行列の最大(小)固有値を統計量として使用することを提案している。中心 Wishart 行列, Beta, F-行列の最大固有値の分布関数は Zonal 多項式を用いて Sugiyama (1967 a, 1967b), Constantine (1963) に

よって得られている。また最小固有値については Muirhead and Chikuse (1975), Sugiyama (1967 b) によって得られた。 $p=2$ の場合には, Muirhead (1972) が中心 Wishart 行列の最小値の分布を初等関数を用いて表現している。非心 Wishart 行列, Beta 行列に対しては最大固有値の分布は (3.1.3), (3.1.6) で与えられるし, また Hayakawa (1969) は行列変数の Hermite 多項式を用いる表現も与えている。

これらの表現は Zonal 多項式, 不変多項式等による表現であり, 具体的にその分布関数を求めることは $p=2$ 程度のものしか役に立たない。その為, 漸近表現が必要とされる。

Sugiura (1973) は Wishart 行列 S の固有値 $l_1, l_2, \dots, l_p$ について次のことが成立することを示している。

$S \sim W_p(\Sigma, n)$ とし, Σ の固有値を $A = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$, $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots > \lambda_p$ とする。 S の固有値 $L = \text{diag}(l_1, \dots, l_p)$, $l_1 > \dots > l_p$ の $s_{jk} (j \leq k)$ に関する偏微係数は $S=A$ で次の様になる。

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial l_\alpha}{\partial s_{\alpha\alpha}} &= 1, & \frac{\partial l_\alpha}{\partial s_{jk}} &= 0, & (j, k) \neq (\alpha, \alpha) \\
 \frac{\partial^2 l_\alpha}{\partial s_{\alpha j}^2} &= \frac{2}{\lambda_\alpha - \lambda_j}, & j \neq \alpha, & \frac{\partial^2 l_\alpha}{\partial s_{jk} \partial s_{lm}} &= 0 \\
 \frac{\partial^3 l_\alpha}{\partial s_{\alpha\alpha} \partial s_{\alpha j}^2} &= \frac{-2}{(\lambda_\alpha - \lambda_j)^2}, & j \neq \alpha, & \frac{\partial^3 l_\alpha}{\partial s_{jj} \partial s_{\alpha j}^2} &= \frac{2}{(\lambda_\alpha - \lambda_j)^2}, & j \neq \alpha.
 \end{aligned}$$

(3.4.1)

$$\frac{\partial^3 l_\alpha}{\partial s_{\alpha j} \partial s_{\alpha k} \partial s_{jk}} = \frac{2}{(\lambda_\alpha - \lambda_j)(\lambda_\alpha - \lambda_k)}, \quad j \neq k \neq \alpha$$

$$\frac{\partial^3 l_a}{\partial s_{jk} \partial s_{lm} \partial s_{rs}} = 0: \text{他の場合.}$$

これより l_a/n の λ_a の近傍に於ける Taylor 展開が得られる.

(3.4.2)

$$\begin{aligned} \frac{l_a}{n} = & \lambda_a + \left(\frac{s_{aa}}{n} - \lambda_a \right) + \frac{1}{2!} \sum_{j \neq a} \frac{2}{\lambda_a - \lambda_j} \frac{1}{n^2} s_{aj}^2 \\ & + \frac{1}{3!} \left\{ \sum_{j \neq a} \frac{-2 \times 3}{(\lambda_a - \lambda_j)^2} \left(\frac{s_{aa}}{n} - \lambda_a \right) \frac{s_{aj}^2}{n^2} + \sum_{j \neq a} \frac{2 \times 3}{(\lambda_a - \lambda_j)^2} \frac{s_{aj}^2}{n^2} \left(\frac{s_{jj}}{n} - \lambda_j \right) \right. \\ & \left. + \sum_{j < k} \frac{2 \times 6}{(\lambda_a - \lambda_j)(\lambda_a - \lambda_k)} \frac{s_{aj} s_{ak} s_{jk}}{n^3} \right\} + \text{高次の項} \end{aligned}$$

(3.4.1) は (1.5.3) の導出にも使用されている.

Sugiura (1973) は (3.4.2) を用いて, 各固有値の分布関数を次の様に求めている.

(3.2.30)

$$\begin{aligned} P\{\sqrt{m}(l_a/m - \lambda_a)/\tau \leq x\} = & \Phi(x) - \frac{1}{\sqrt{m}} \sum_{j=1}^2 a_{2j-1} \Phi^{(2j-1)}(x)/\tau^{2j-1} \\ & + O(1/m) \end{aligned}$$

ここで,

$$\begin{aligned} a_1 = & 2\Delta\lambda_a + \lambda_a \sum_{j \neq a} \frac{\lambda_j}{\lambda_a - \lambda_j}, \quad a_3 = \frac{4}{3} \lambda_a^2 \\ m = & n - 2\Delta, \quad \tau = \sqrt{2} \lambda_a \end{aligned}$$

である.

Muirhead and Chikuse (1975) は L の同時密度関数が ${}_0F_0$ で表現されることより, ${}_0F_0$ を漸近展開することにより, $\sqrt{n}(l_a/n - \lambda_a)$, $\alpha=1, 2, \dots, p$ の同時密度関数の漸近展開, 及び周辺密度関

数の展開も与えている。これらの結果は Sugiura (1976), Chikuse (1976), Fujikoshi (1977) により Σ が重根を持つ場合に拡張されている。

Sugiura (1976) は $S_1 \sim W_p(\Sigma_1, n_1), S_2 \sim W_p(\Sigma_2, n_2)$ とするとき, $S_1 S_2^{-1}$ の固有値, 固有ベクトルの分布を, $\Sigma_1 \Sigma_2^{-1}$ の固有値が重根を持つ場合について, 摂動法を用いて得ている。Chikuse (1977) も重根が有る場合について, ${}_0F_0$ -型を展開する方法によって得ている。

3.5 二次形式

$X_{:p \times n} \sim N_p(M, \Sigma), A_{:n \times n} > O, M_{:p \times n}$ とするとき, $S = XAX'$ を二次形式統計量という。 $M=O$ の場合には, S の密度関数は Hayakawa (1966), Khatri (1966), Shah (1970) 等により, いろいろな表現が得られた。また $M \neq O$ については, $\Sigma^{-1/2} S \Sigma^{-1/2}$ の固有値の同時密度関数が多項式 $P_*(T, A)$ を用いていろいろと表現されている (Hayakawa (1969), (1972))。また Crowther (1975), Khatri (1977) は $P_*(T, A, B), L_*(S, A, T)$ を用いて表現している。

$$(3.5.1) \quad |qA|^{-p/2} \operatorname{etr} \left(-\frac{1}{2} \Sigma^{-1} M M' \right) w_p(\Sigma/q, n) \\ \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} P_{\epsilon}(W_1, B_1, q \Sigma^{-1/2} S \Sigma^{-1/2} / 2) / \left(\frac{n}{2} \right)_{\epsilon} k!$$

$$(3.5.2) \quad w_p(\Sigma/q, n) \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} L_{\epsilon}^{(n-p-1)/2}(q \Sigma^{-1/2} S \Sigma^{-1/2} / 2 B_2, W_2) / \left(\frac{n}{2} \right)_{\epsilon} k!$$

ここで, $B_1 = (qA)^{-1} - I$, $B_2 = I - qA$, $W_1 = (2\Sigma)^{-1/2}MB_2^{-1/2}$, $W_2 = (2\Sigma)^{-1/2}MB_1^{-1/2}$ である.

これらの表現は Moment 特性関数の計算が容易に出来るものである.

$$(3.5.3) \quad E[|S|^h] = |qA|^{-p/2} \text{etr} \left(-\frac{1}{2} \Sigma^{-1} MM' \right) \\ \cdot \frac{\Gamma_p \left(\frac{n}{2} + h \right)}{\Gamma_p \left(\frac{n}{2} \right)} |\Sigma/q|^h \sum_{k=0}^{\infty} \sum_i \frac{\left(\frac{n}{2} + h \right)_i}{k! \left(\frac{n}{2} \right)_i} P_i(W_1, B_1)$$

$$(3.5.4) \quad E[\text{etr}(tS)] = |qA|^{-p/2} \frac{\text{etr} \left(-\frac{1}{2} \Sigma^{-1} MM' \right)}{|I - 2t\Sigma/q|^{n/2}} \\ \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_i \frac{1}{k!} P_i(W_1, B_1, (I - 2t\Sigma/q)^{-1})$$

$X_{:p \times m} \sim N(M, \Sigma_1)$, $A \sim W_p(\Sigma_2, n)$ とし, X と A は独立とする. このとき $T = \sqrt{n} \Sigma_1^{1/2} A^{-1/2} \Sigma_1^{-1/2} X$ を行列 T -変数という. Marx(1982) は T の分布について論じている.

T の密度関数は

$$(3.5.5) \quad \frac{\Gamma_p \left(\frac{m+n}{2} \right)}{\Gamma_p \left(\frac{n}{2} \right) (n\pi)^{mp/2}} |\Sigma_1^{1/2} \Sigma_2^{-1} \Sigma_1^{1/2}|^{-m/2} \\ \cdot \left| I + \frac{1}{n} \Sigma_1^{-1/2} \Sigma_2 \Sigma_1^{-1/2} (T-M)(T-M)' \right|^{-(m+n)/2}$$

となる (Marx, de Waal, Groenewald, and Nel (1981)).

$R=T'T$ の密度関数は

(3.5.6)

$$\frac{\Gamma_m\left(\frac{m+n}{2}\right)}{\Gamma_m\left(\frac{p}{2}\right)\Gamma_m\left(\frac{n+m-p}{2}\right)} |n\Sigma_1^{1/2}\Sigma_2^{-1}\Sigma_1^{1/2}|^{-m/2} |R|^{(p-m-1)/2} \text{etr}\left(-\frac{1}{2}\Sigma_1^{-1}MM'\right) \\ \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} \frac{\left(\frac{m+n}{2}\right)_{\epsilon}}{\left(\frac{p}{2}\right)_{\epsilon} k!} P_{\epsilon}\left(-\frac{1}{\sqrt{2n}}M'\Sigma_1^{-1/2}, \frac{1}{n}\Sigma_1^{-1/2}\Sigma_2\Sigma_1^{-1/2}, R\right)$$

である。

これより R の固有値の同時密度関数，最大固有値の分布関数が求められる。(Marx (1982)).

de Waal (1979) は von Mises-Fisher 分布と Bingham 分布を一般化して Bingham-von Mises-Fisher 分布の密度関数を

$$(3.5.7) \quad \frac{1}{F(A, B, M)} \text{etr}\{A(X-M)B(X-M)'\},$$

とし，(3.5.7) が密度関数となる為の定数 $F(A, B, M)$ を

$$(3.5.8) \quad F(A, B, M) = \text{etr}(AMB M') \text{etr}(qB)$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\epsilon} P_{\epsilon}(iB^{1/2}M'A^{1/2}(I-qA^{-1})^{-1/2}, A-qI, -B) \left/\left(\frac{p}{2}\right)_{\epsilon} k!\right.$$

と求めた。ここで $X_{:p \times m} (m \leq p)$, $A_{p \times p} > 0$, $B_{:m \times m} > 0$, $M_{:p \times m}$ であり， $X'X = I_m$ をみたま。即ち X は Stiefel 多様体の一点であり，その体積は

$$\int_{X'X=I_m} dX = 2^m \pi^{pm/2} / \Gamma_m\left(\frac{p}{2}\right)$$

である。

$M=O, B=I_m$ のとき Bingham 分布, $A=I_p, B=I_m$ のとき von-Mises 分布, $A=I_p$ のとき von-Mises-Fisher 分布という。

3.6 非正規母集団による分布

母集団分布を非正規としたとき, その標本分布論は, 特殊な分布を除いて精密分布論を展開することは困難であり, 漸近分布の問題が取り扱われる程度である。その中で Davis (1976, 1980) による方法は興味深いものである。

$\mathbf{x}=(x_1, x_2, \dots, x_p)'$ を p 次元確率変数とし, r 次の積率を $\tilde{\mu}_{j_1 j_2 \dots j_r}$ とする。特に平均ベクトルを $E(\mathbf{x})=\boldsymbol{\mu}$, 共分散行列を $\text{Cov}(\mathbf{x})=\boldsymbol{\Sigma}$ とする。また r 次の Cumulant を $\tilde{\kappa}_{j_1 j_2 \dots j_r}$ とする。

ここで, $\mathbf{z}=(z_1, \dots, z_p)'$ は確率変数で, $E(\mathbf{z})=\mathbf{0}, \text{Cov}(\mathbf{z})=\mathbf{0}$, r 次の Cumulant を $\tilde{\kappa}_{j_1 \dots j_r}$ とすると, $\mathbf{x}$ は平均 $\boldsymbol{\mu}$, 共分散 $\boldsymbol{\Sigma}$ を持つ正規変数 $\mathbf{y}$ と $\mathbf{z}$ との和として表現される。 $\varphi(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ を $N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ の密度関数とすれば, $\mathbf{x}$ の密度関数 $f(\mathbf{x})$ は,

$$\begin{aligned} (3.6.1) \quad f(\mathbf{x}) &= E_{\mathbf{z}}[\varphi(\mathbf{x}-\mathbf{z}|\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})] \\ &= E_{\mathbf{z}}[\varphi(\mathbf{x}|\boldsymbol{\mu}+\mathbf{z}, \boldsymbol{\Sigma})] \end{aligned}$$

となるので, $\mathbf{x}|\mathbf{z} \sim N(\boldsymbol{\mu}+\mathbf{z}, \boldsymbol{\Sigma})$ である。即ち $\mathbf{z}$ を固定したとき, $\mathbf{x}$ は正規変数として考えれば良い。

ここで $X=[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_N]$ を pdf $f_a(\mathbf{x}_a)$, 平均 $\boldsymbol{\mu}_a$, 共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_a$, 高次の cumulant $\tilde{\kappa}_{a j_1 \dots j_r}$ を持つ母集団からの random

sample とすれば,

$$(3.6.2) \quad \prod_{\alpha=1}^N f_{\alpha}(\mathbf{x}_{\alpha}) = E_z \left[\prod_{\alpha=1}^N \varphi(\mathbf{x}_{\alpha} | \boldsymbol{\mu}_{\alpha} + \mathbf{z}_{\alpha}, \boldsymbol{\Sigma}_{\alpha}) \right]$$

となる.

これより非正規標本行列 X による統計量 $S(X)$ の密度関数は二段階を経て得られる.

(i) $Z = [\mathbf{z}_1, \dots, \mathbf{z}_N]$ を固定したときの S の密度関数 $g(S|Z)$ を求める. これには, 平均値 $\boldsymbol{\mu}_{\alpha} + \mathbf{z}_{\alpha}$, 共分散行列 $\boldsymbol{\Sigma}_{\alpha}$ の正規標本と考えて, 正規分布理論を適用する.

(ii) S の pdf は

$$(3.6.3) \quad g(S) = E_Z [g(S|Z)]$$

より求められ, $E[\mathbf{z}_{\alpha}] = \mathbf{0}$, $\text{Cov}(\mathbf{z}_{\alpha}) = O$, 高次の Cumulant は $\tilde{\kappa}_{\alpha j_1 \dots j_r}$ とする.

今 $\mathbf{x}_{\alpha} | \mathbf{z}_{\alpha} \sim N(\boldsymbol{\mu} + \mathbf{z}_{\alpha}, \boldsymbol{\Sigma})$, $\alpha = 1, 2, \dots, N$ とすれば, $S = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{x}_{\alpha} - \bar{\mathbf{x}})(\mathbf{x}_{\alpha} - \bar{\mathbf{x}})'$ は, $S|Z \sim NW(\boldsymbol{\Sigma}, n, \boldsymbol{\Omega})$, $n = N - 1$, $\boldsymbol{\Omega} = \sum_{\alpha=1}^N W_{\alpha}$, $W_{\alpha} = \sum_{\alpha=1}^N (\mathbf{z}_{\alpha} - \bar{\mathbf{z}})(\mathbf{z}_{\alpha} - \bar{\mathbf{z}})'$ となる. $\boldsymbol{\Sigma} = I$ とするとき, S の固有値 $L = \text{diag}(l_1, l_2, \dots, l_p)$ の同時密度関数は,

$$(3.6.4) \quad \text{etr}(Z)_0 F_1^{(p)}(\gamma + (p+1)/2; X, -Z) \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\pi} \frac{L_{\pi}^*(X) C_{\pi}(Z)}{(\gamma + (p+1)/2)_{\pi} k! C_{\pi}(I_p)}$$

を用いて,

$$(3.6.5) \quad g(L|Z) \propto \text{etr}(-L/2) |L|^{(n-p-1)^2/2} \prod_{i < j} (l_i - l_j) \\ \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{\pi} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^k C_{\pi}(W_Z)}{k! \left(\frac{n}{2}\right)_{\pi} C_{\pi}(I_p)} L_{\pi}^{(n-p-1)^2/2} (L/2).$$

よって, L の密度関数は (3.6.5) に於いて, $\theta_{\pi} = E_Z[C_{\pi}(W_Z)]$ とすれば良い.

このとき, $1 \leq k \leq 3$ に対して,

$$\begin{aligned} \theta_{(1)} &= 0 \\ \theta_{(2)} &= \frac{(N-1)^2}{N} \sum_{i,j} \tilde{\kappa}_{ijj}, \quad \theta_{(1^2)} = 0 \\ (3.6.6) \quad \theta_{(3)} &= \frac{(N-1)^4}{N^3} \sum_{i,j,k} \tilde{\kappa}_{ijjkk} + \frac{4(N-1)(N-2)}{5N} \\ &\quad \cdot \sum_{i,j,k} (2\tilde{\kappa}_{ijk}^2 + 3\tilde{\kappa}_{ijj}\tilde{\kappa}_{ikk}) \\ \theta_{(21)} &= \frac{12(N-1)(N-2)}{5N} \sum_{i,j,k} (\tilde{\kappa}_{ijk} - \tilde{\kappa}_{ijj}\tilde{\kappa}_{ikk}) \\ \theta_{(1^3)} &= 0 \end{aligned}$$

となる.

線型 Model $Y = \xi A + E$, $Y: p \times N$, $E: p \times N$, $A: q \times N$, $\text{rank } A = q$, $\xi: p \times q$ に於いて, $E = [\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_N]$ の列ベクトル ε_{α} は互に独立とし, 平均 0 , 共分散 Σ とする.

仮説: $\xi C = 0$, $C: q \times t$, $\text{rank } C = t$

に対する統計量は Beta 行列 $B = S_1(S_1 + S_2)^{-1}$ の固有値 $\beta_1 \geq \beta_2 \geq \dots \geq \beta_p \geq 0$ にもとづくものとなる. ここで,

$$(3.6.7) \quad S_1 = YHY', \quad S_2 = YEY'$$

$$H = A(AA')^{-1}C[C'(AA'^{-1}C)]^{-1}C'(AA')^{-1}A'$$

$$E = I - A'(AA')^{-1}A$$

$Z: p \times N = [z_1, z_2, \dots, z_N]$ は前述のダミー変数とすれば線型 Model は

$$(3.6.8) \quad Y = \xi A + Z + E$$

と表現できる.

故に, Z を固定した時の S_1, S_2 は互に独立な non-central Wishart 行列で, 自由度 $n_1 = t, n_2 = N - q$, 非心母数 $\Omega_1 = ZHZ'/2, \Omega_2 = ZEZ'/2$ となる. これより, 仮説を検定する統計量として, Z を固定したとき, Wilks の尤度比規準 $|S_2|/|S_1 + S_2| = |I - B|$, Lawley-Hotelling $T_0^2 = \text{tr } B(I - B)^{-1} = \text{tr } S_1 S_2^{-1}$, Bartlett-Nanda-Pillai 統計量 $\text{tr } B$, Roy の最大固有値 β_1 , 等は全て doubly non-central となり, これらの分布の導出にこそ二変数の不変多項式の導入されねばならぬ理由が有ったとも言える. Lawley-Hotelling T^2 は (3.3.17), Roy の最大固有値 β_1 は (3.1.6) でその密度関数, 分布関数が与えられている. また Beta 行列の固有値 $A = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_p)$ の同時密度関数は,

$$(3.6.9) \quad g(A|Z) = \frac{\pi^{p^2/2}}{\Gamma_p\left(\frac{p}{2}\right)} B_p\left(\frac{n_1}{2}, \frac{n_2}{2}\right) |A|^{(n_1-p-1)/2} |I-A|^{(n_2-p-1)/2} \\ \cdot \prod_{i < j} (\beta_i - \beta_j) \sum_{\substack{\kappa, \lambda: \phi \\ \left(\frac{n_1}{2}\right)_\kappa \left(\frac{n_2}{2}\right)_\lambda}} \frac{\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)_\phi}{\left(\frac{n_1}{2}\right)_\kappa \left(\frac{n_2}{2}\right)_\lambda} \frac{C_\phi^{\kappa, \lambda}(\Omega_1, \Omega_2) C_\phi^{\kappa, \lambda}(A, I-A)}{C_\phi(I_m)}$$

となる.

これより A の密度関数は (3.6.10) で $d_{\phi}^{\alpha, \lambda} = E_Z[C_{\phi}^{\alpha, \lambda}(\Omega_1, \Omega_2)]$ とすれば求められる.

$H=(h_{ij}), E=(e_{ij})$ とすれば, $d_{\phi}^{\alpha, \lambda}$ は次の様になる.

$\kappa \lambda \phi$

$$1 \ 1 \ 2 \quad \frac{1}{4} \gamma_{2,p} \sum_{\alpha} h_{\alpha\alpha} e_{\alpha\alpha}$$

$$1^2 \quad 0$$

$$2 \ 1 \ 3 \quad \frac{1}{4} \left(\beta_{1,p} + \frac{3}{5} \phi_p \right) \sum_{\alpha, \beta} (2h_{\alpha\alpha} h_{\alpha\beta} e_{\beta\beta} + h_{\alpha\alpha} e_{\alpha\beta} h_{\beta\beta} + 2h_{\alpha\beta}^2 e_{\alpha\beta})$$

$$21 \quad \frac{1}{10} \phi_p \sum_{\alpha, \beta} (3h_{\alpha\alpha} h_{\alpha\beta} e_{\beta\beta} - h_{\alpha\alpha} e_{\alpha\beta} h_{\beta\beta} - 2h_{\alpha\beta}^2 e_{\alpha\beta})$$

$$1^2 \ 1 \ 21 \quad (2\sqrt{2})^{-1} \phi_p \sum_{\alpha, \beta} (h_{\alpha\alpha} h_{\beta\beta} - h_{\alpha\beta}^2) e_{\alpha\beta}$$

$$1^3 \quad 0$$

ここで,

$$\beta_{1,p} = \sum_{i,j,k=1}^p \tilde{\kappa}_{ij}^2, \quad \gamma_{2,p} = \sum_{i,j=1}^p \tilde{\kappa}_{ii} \tilde{\kappa}_{jj}, \quad \phi_p = \sum_{i,j,k=1}^p (\tilde{\kappa}_{ij} \tilde{\kappa}_{kk} - \tilde{\kappa}_{ik}^2).$$

参考文献

- Bandorff-Nielsen, O. and Cox, D. R. (1979) Edgeworth and saddle-point approximations with statistical applications. *J. R. Statist. Soc. B*, 41, 279-312.
- Bartlett, M. S. (1939) A note on tests of significance in multivariate

- analysis. *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 35, 180-185.
- Bingham, C. (1974) An identity involving partitionial generalized binomial coefficients. *J. Mult. Anal.*, 4, 210-223.
- Chandra, T. K. and Ghosh, J. K. (1979) Valid asymptotic expansions for the likelihood ratio statistic and other perturbed chi-square variables. *Sankhyā* 41, Series A, 22-47.
- Chakravorti, S. R. (1980) On some tests in MANOCOVA model with different dispersion matrices. *Commun. Statist. Theor.-Meth.*, A9, 291-308.
- Chattopadhyay A. K., Pillai, K. C. S. and Hung C. Li (1976) Minimization of the integral of a matrix function and asymptotic expansions of the distributions of latent roots of two matrices. *Ann. Statist.* 4, 796-806.
- Chikuse, Y. (1976) Asymptotic distributions of the latent roots of covariance matrix with multiple population roots. *J. Mult. Analy.* 6, 237-249.
- Chikuse, Y. (1977) Asymptotic expansions for the joint and marginal distributions of the latent roots of $S_1 S_2^{-1}$. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 29, Part A, 221-233.
- Chikuse, Y. (1980) Invariant polynomials with matrix arguments and their applications. *Multivariate Statistical Analysis*, Ed. Gupta, R. P., North-Holland.
- Chikuse, Y. (1981) Distributions of some matrix variates and latent roots in multivariate Behrens-Fisher discriminant analysis. *Ann. Statist.*, 9, 401-407.
- Constantine, A. G. (1963) Some non-central distribution problems in multivariate analysis. *Ann. Math. Statist.*, 34, 1270-1285.
- Constantine, A. G. (1966) The distribution of Hotelling's generalized T_0^2 . *Ann. Math. Statist.*, 37, 215-225.
- Constantine, A. G. and Muirhead, R. J. (1972) Partial differential equations for hypergeometric functions of two argument matrices. *J. Mult.*

- Anal.*, 2, 332–338.
- Crowther, N. A. S. (1975) The exact non-central distribution of a quadratic form in normal vectors. *S. Afr. Statist. J.*, 9, 27–36.
- Davis, A.W. (1968) A system of linear differential equation for Hotelling's generalized T_0^2 . *Ann. Math. Statist.*, 39, 815–832.
- Davis, A. W. (1970) Further applications of a differential equation for Hotelling's generalized T_0^2 . *Ann. Inst. Statist. Math.*, 22, 77–87.
- Davis, A. W. (1976) Statistical distributions in univariate and multivariate Edgeworth populations. *Biometrika* 63, 661–670.
- Davis, A. W. (1979) Invariant polynomials with two matrix arguments extending the zonal polynomials: Applications to multivariate distribution theory. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 31, Part A, 465–485.
- Davis, A. W. (1980 a) Invariant polynomials with two matrix arguments, extending the zonal polynomials. *Multivariate Analysis V*, Ed. Krishnaiah, P. R., North-Holland.
- Davis, A. W. (1980 b) On the effects of moderate multivariate non-normality on Wilks's likelihood ratio criterion. *Biometrika*, 67, 419–427.
- Davis, A. W. (1981) On the construction of a class of invariant polynomials in several matrices, extending the zonal polynomials. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 33, Part A, 297–313.
- de Waal, D. J. (1979) On the normalizing constant for the Bingham-von Mises-Fisher matrix distribution. *S. Afr. J.*, 13, 103–112.
- Farrel, R. H. (1976) Techniques of multivariate calculation. *Lecture note in Mathematics*, 520, Springer-Verlag, Berlin.
- Fisher, R. A. (1939) The sampling distribution of some statistics obtained from non-linear equations. *Ann. Eugen.*, 9, 238–249.
- Fujikoshi, Y. (1968) Asymptotic expansion of the distribution of the generalized variance in the non-central case. *Jour. Sci. Hiroshima Univ., Ser. A-I*, 32, 293–299.
- Fujikoshi, Y. (1970) Asymptotic expansions of the distributions of test statistics in multivariate analysis. *Jour. Sci. Hiroshima Univ., Ser.*

- A-I*, 34, 73-144.
- Fujikoshi, Y. (1973) Asymptotic formulas for the distributions of three statistics for multivariate linear hypothesis. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 25, 423-437.
- Fujikoshi, Y. (1974) On the asymptotic non-null distributions of the LR criterion in a generalized MANOVA. *Canadian J. Statist., Sec. A & B: Theory & Method*. 2, 1-12.
- Fujikoshi, Y. (1975) Partial differential equations for hypergeometric functions ${}_3F_2$ of matrix argument. *Canadian J. Statist., Sec. A & B: Theory & Method*. 3, 153-163.
- Fujikoshi, Y. (1977) Asymptotic expansions for the distributions of the latent roots of the Wishart matrix with multiple population roots. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 29, Part A, 379-387.
- Fujikoshi, Y. (1978) Asymptotic expansions for the distributions of some functions of the latent roots of matrices in three situations. *J. Mult. Anal.*, 8, 63-72.
- Girshick, M. A. (1939) On the sampling theory of roots of determinantal equations. *Ann. Math. Statist.*, 10, 203-224.
- Gupta, R. D. and Richards, D. (1979) Calculation of zonal polynomials of 3×3 positive definite symmetric matrices. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 31, Part A, 207-213.
- Harris, P. and Peers, H. W. (1980) The local power of the efficient scores test statistic. *Biometrika*, 67, 525-529.
- Hayakawa, T. (1967) On the distribution of the maximum latent root of a positive definite symmetric random matrix. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 19, 1-17.
- Hayakawa, T. (1969) On the distribution of the latent roots of a positive random symmetric matrix I. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 21, 1-21.
- 早川 毅 (1971) 正値対称行列上の確率分布およびそれに関連する分布. 数学, 23, 1-16.
- Hayakawa, T. (1972 a) On the derivation of the asymptotic distribution

- of the generalized Hotelling's T_0^2 . *Ann. Inst. Statist. Math.*, 24, 19–32.
- Hayakawa, T. (1972 b) On the distribution of the multivariate quadratic form in multivariate normal samples. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 24, 205–230.
- Hayakawa, T. (1975) The likelihood ratio criterion for a composite hypothesis under a local alternative. *Biometrika*, 62, 451–460.
- Hayakawa, T. (1977) The likelihood ratio criterion and the asymptotic expansion of its distribution. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 29, Part A, 359–378.
- Hayakawa, T. (1981) Asymptotic distribution of a generalized Hotelling's T_0^2 in the doubly noncentral case. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 33, Part A, 15–25.
- Hayakawa, T. (1982) On some formulas for weighted sum of invariant polynomials of two matrix arguments. *J. Stat. Plan. and Infer.*, 6, 105–114.
- Hsu, P. L. (1939) On the distribution of the roots of certain determinantal equations. *Ann. Eugen.*, 9, 250–258.
- Ito, K. (1956) Asymptotic formulae for the distribution of Hotelling's generalized T_0^2 . *Ann. Math. Statist.*, 27, 1091–1105.
- Ito, K. (1960) Asymptotic formulae for the distribution of Hotelling's generalized T_0^2 statistics II, *Ann. Math. Statist.*, 31, 1148–1153.
- James, A. T. (1960) Distribution of the latent roots of the covariance matrix. *Ann. Math. Statist.*, 31, 151–158.
- James, A. T. (1961a) Zonal polynomials of the real positive definite symmetric matrices. *Ann. Math.*, 74, 456–469.
- James, A. T. (1961b) The distribution of noncentral means with known covariance. *Ann. Math. Statist.*, 32, 874–882.
- James, A. T. (1964) Distributions of matrix variates and the latent roots derived from normal samples. *Ann. Math. Statist.*, 35, 475–501.
- James, A. T. (1968) Calculation of zonal polynomial coefficients by use

- of the Laplace-Bertrami operator. *Ann. Math. Statist.*, **39**, 1711-1718.
- James, A. T. and Constantine, A. G. (1974) Generalized Jacobi polynomials as spherical functions of the Grassmann manifold. *Proc. London Math. Soc.*, **3**, **29**, 174-192.
- James, A. T. (1975) Special functions of matrix and single argument in statistics. *Theory and application of special functions*, 497-520, Academic Press Inc., New York.
- Kariya, T. (1978) The generalized MANOVA problem. *Ann. Statist.*, **6**, 200-214.
- Khatri, C. G. (1966) On certain distribution problems based on positive definite quadratic functions in normal vectors. *Ann. Math. Statist.*, **37**, 468-479.
- Khatri, C. G. (1977) Distribution of a quadratic form in noncentral normal vectors using generalized Laguerre polynomials. *S. Afr. Statist. J.*, **11**, 167-179.
- Krishnaiah, P. R. (1978) Some recent developments on real multivariate distributions. *Developments in statistics 1*, 135-169.
- Lee, J. C., Krishnaiah, P. R. and Chang, T. C. (1976) On the distribution of the likelihood ratio test statistic for compound symmetry. *S. Afr. Statist. J.*, **10**, 49-62.
- Marx, D. G., de Waal, D. J., Groenewald, P. C. N. and Nel, D. G. (1981) On the generalization of the matrix-t distribution. *Tech. Report 71*, Dept. of Math. Statist., Univ. Orange Free State.
- Marx, D. G. (1982) Quadratic forms of a matrix-t variate. To appear in *Ann. Inst. Statist. Math.*
- McLaren, M. L. (1976) Coefficients of the zonal polynomials. *Applied Statistics*, (JRSS Ser. C) **25**, 82-87.
- Muirhead, R. J. (1970 a) Systems of partial differential equations for hypergeometric functions of matrix arguments. *Ann. Math. Statist.*, **41**, 991-1001.
- Muirhead, R. J. (1970 b) Asymptotic distributions of some multivariate

- tests. *Ann. Math. Statist.*, 41, 1002–1010.
- Muirhead, R. J. (1972 a) On the test of independence between two sets of variates. *Ann. Math. Statist.*, 42, 1491–1497.
- Muirhead, R. J. (1972 b) The asymptotic noncentral distribution of Hotelling's generalized T_0^2 . *Ann. Math. Statist.*, 43, 1671–1677.
- Muirhead, R. J. (1974) On the calculation of generalized binomial coefficients. *J. Mult. Anal.*, 4, 341–346.
- Muirhead, R. J. (1975) Expressions for some hypergeometric functions of matrix argument with applications. *J. Mult. Anal.* 5, 283–293.
- Muirhead, R. J. (1978) Latent roots and matrix variates: A review of some asymptotic results. *Ann. Statist.*, 6, 5–33.
- Muirhead, R. J. and Chikuse, Y. (1975) Asymptotic expansions for the joint and marginal distributions of the latent roots of the covariance matrix. *Ann. Statist.*, 3, 1011–1017.
- Nagarsenker, B. N. (1977) On the exact non-null distributions of the LR criterion in a generalized MANOVA model. *Sankhyā*, 39, Ser. A, 251–263.
- Nagarsenker, B. N. and Pillai, K. C. S. (1973 a) Distribution of the likelihood ratio criterion for testing a hypothesis specifying a covariance matrix. *Biometrika*, 60, 359–364.
- Nagarsenker, B. N. and Pillai, K. C. S. (1973 b) The distribution of sphericity test criterion. *J. Mult. Anal.*, 3, 226–235.
- Nagarsenker, B. N. and Pillai, K. C. S. (1974) Distribution of the likelihood ratio criterion for testing $\Sigma = \Sigma_0, \mu = \mu_0$. *J. Mult. Anal.*, 114–122.
- Pillai, K. C. S. (1968) On the moment generating function of Pillai's $V^{(g)}$ criterion. *Ann. Math. Statist.*, 39, 877–880.
- Pillai, K. C. S. and Jouris, G. M. (1969) On the moments of elementary symmetric functions of the roots of two matrices. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 21, 309–320.
- Pillai, K. C. S. (1976) Distributions of characteristic roots in multivariate

- analysis. Part I. Null distributions. *The Canadian Jour. Statist., Section A & B*, 4, 157-184.
- Pillai, K. C. S. (1977) Distributions of characteristic roots in multivariate analysis. Part II. Non-null distributions. *The Canadian Jour. Statist., Section A & B*, 5, 1-62.
- Richards, D. St. P. (1982) Differential operators associated with zonal polynomials I., *Ann. Inst. Statist. Math.*, 34, Part A, 111-117.
- Roy, S. N. (1939) p-statistics or some generalizations in analysis of variance appropriate to multivariate problems. *Sankhyā*, 4, 381-396.
- Saw, J. G. (1977) Zonal polynomials: An alternative approach. *J. Mult. Anal.* 7, 461-467.
- Shah, B. K. (1970) Distribution theory of positive definite quadratic form with matrix argument. *Ann. Math. Statist.*, 41, 692-697.
- Siotani, M. (1957) Note on utilization of the generalized student ratio in the analysis of variance of dispersion. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 9, 157-171.
- Siotani, M. (1971) An asymptotic expansion of the non-null distribution of Hotelling's T_0^2 -statistic. *Ann. Math. Statist.*, 42, 560-571.
- 塩谷 実 (1975) 多変量解析における検定統計量の一般分布に対する漸近展開 I. 日本統計学会誌, 5, 87-104
- 塩谷 実 (1976) 多変量解析における検定統計量の一般分布に対する漸近展開 II. 日本統計学会誌, 6, 63-87. (1977. 7, 56 修正)
- Subrahmaniam, K. (1973) On some functions of matrix argument. *Utilitas, Mathematica*, 3, 83-106.
- Subrahmaniam, K. (1976) Recent trends in multivariate normal distribution theory: On the zonal polynomials and other functions of matrix argument. *Sankhyā, Ser. A*, 221-258.
- Sugiura, N. and Fujikoshi, Y. (1969) Asymptotic expansion of the non-null distributions of the likelihood ratio criteria for multivariate linear hypothesis and independence. *Ann. Math. Statist.*, 40, 942-952.
- Sugiura, N. (1972) Asymptotic solutions of the hypergeometric function

- ${}_1F_1$ of matrix argument, useful in multivariate analysis. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 24, 517-524.
- Sugiura, N. (1973) Derivatives of the characteristic roots of a symmetric or Hermitian matrix with two applications in multivariate analysis. *Comm. Statist.*, 1, 393-417.
- Sugiura, N. (1974) Asymptotic formulas for the hypergeometric function ${}_2F_1$ of matrix argument, useful in multivariate analysis. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 26, 117-125.
- Sugiura, N. (1976) Asymptotic expansion of the distributions of the latent roots and latent vector of the Wishart and multivariate F matrices., *J. Mult. Anal.*, 6, 500-524.
- Sugiyama, T. (1967 a) On the distribution of the largest latent root of the covariance matrix. *Ann. Math. Statist.*, 38, 1148-1151.
- Sugiyama, T. (1967 b) Distribution of the largest latent root and the smallest latent root of the generalized B-statistic and F-statistic in multivariate analysis. *Ann. Math. Statist.*, 38, 1152-1159.
- Thrall, R. M. (1942) On symmetrized Kronecker powers and the structure of the free Lie ring. *Amer. J. Math.*, 64, 371-388.
- van der Westhuizen, A. W. G. and Nagal, P. J. A. (1979) Programs for the evaluation of zonal polynomials. *Research report 79-02, Univ. of South Africa, Pretoria.*
- Wald, A. (1943) Tests of statistical hypothesis concerning several parameters when the number of observations is large. *Trans. Am. Math. Soc.*, 54, 526-582.
- Wilks, S. S. (1938) The large sample distribution of the likelihood ratio for testing composite hypothesis. *Ann. Math. Statist.*, 9, 60-62.
- Wishart, J. (1928) The generalized product moment distribution in samples from normal multivariate population. *Biometrika*, 20 A, 32-52.