統計的システム論III

片岡信二

序

われわれは先の論文I，IIにおいて統計的システム論の一般的な骨組みおよびその応用としての所得分布曲線論を展開した．また論文IIでは，相互作用を及ぼし合う2つのシステムを取り上げ，これを2層系とよび2つの経済社会システムの統計的システム論について述べた．本論文ではこの2層系の理論を一般化することにより，いわゆる抽象的熱力学ともいうべき，統計的システムのマクロ的性質を導出することを試みる．

定式化に入るまえに，前論文に加えて新しく用いる用語およびこれまでの理論の概略を説明する．システムはミクロ状態変数ベクトル x（確率変数）ないし，それを含むミクロ状態関数 $f_1(x,\lambda), f_2(x,\lambda), \cdots\cdots, f_m(x,\lambda)$ によってミクロ状態が記述され，それらの期待値としてマクロ状態変数 $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_m$ を持つ．これらの $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_m$ の表わすもの，例えば物質システムであればエネルギー，経済社会システムであれば所得ないし厚生などであり，これまではそれらに名前をつけなかったが，今後これらをシステムのマクロ状態量（ないしは単に状態量）$S_1, S_2, \cdots\cdots, S_m$ とよび，1システム当りの平均の状態量を表わす φ を状態量密度とよぶこともある．

添字 $1, \cdots\cdots, m$ の集合を M とし，これを2つの部分集合 M', M'' に分け，それらに対応する φ, β を $\varphi_{M'}, \varphi_{M''}, \beta_{M'}, \beta_{M''}$ とすると，論文Iの p. 40 で述べたように $\varphi_{M'}, \beta_{M''}$ を独立変数（所与の量）として選んだとき，特性状態関数 $R(\varphi_{M'}, \beta_{M''}, \lambda)$ を

$$R(\varphi_{M'}, \beta_{M''}, \lambda) = \log Z(\beta, \lambda) + \sum_{k\in M'} \beta_k \varphi_k$$

とすれば，システム全体のマクロ状態変数 $\varphi_{M'}, \varphi_{M''}, \beta_{M'}, \beta_{M''}$ が決定される．このとき制約となる $\varphi_{M'}$ に対応する $S_{M'}$ を制約状態量，$\beta_{M''}$ は所与であるが $\varphi_{M'}$ を変えることによって従属的に変動する $\varphi_{M''}$ に対応する $S_{M''}$ を自由状態量とよぶことにする．

次にエントロピーであるが，最近は物理学のみならず，情報理論，経済理論（エネルギー経済に関連してであるから元来は物理学であるが）に散見するようになった．しかし依然としてその理解は必ずしも統一されているとは思われない．われわれのシステム論の考え方からすればシステムは状態量の制約を受けつつ最も確からしい状態，最尤状態をとるものであり，これはエントロピー最大に対応することが証明されている．従ってあえてエントロピーという用語の使用を一時止めて，「確率自由度」という言葉を用いてこの論文を記述してみようと思う．さらに φ_k の共役変数 β_k は，その物理的な意味から考えると，最尤状態においての状態量 S_k の単位当りのエントロピー（確率自由度）であるから，ここでは β_k を S_k の確率自由度係数（ないしは単に自由度係数）とよぶことにする．

最後に孤立システムを次のように定義する．すなわち，すべての状態量を制約状態量とするシステムを孤立システムとよぶ．すなわち孤立システムは外部システムと状態量の交換は行わず，それ自身で閉じたシステムで所与の制約状態変数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots\cdots, \varphi_m$ のもとで確率自由度（エントロピー）最大となるように行動し，その制約内で最終的に均衡状態に達する．

I　一般の２層系

(i)　定式化

２つの孤立システム $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ を考え，これらを接触させて一部の状態量を交流させて均衡状態にし，新しく１つの２層系（孤立システム）をつくる．まず $\mathfrak{S}_1$ のシステム集団 $\mathfrak{E}_1$ を考え，要素システムの数を N_1，ミクロ状態 i にある数を n_{1i}，ミクロ状態関数 $f_k(x^i, \lambda)$ $(=f_k^i)$，全状態量を表わす状態変数を Φ_{1k} とすると，状態数 W_1 は

$$W_1=\frac{N_1!}{\prod_i n_{1i}!} \tag{2.1}$$

となり，条件式は

$$\sum_i n_{1i}=N_1 \tag{2.2}$$

$$\sum n_{1i}f_k{}^i=\Phi_{1k} \tag{2.3}$$

となる．そこで，(2.1), (2.2), (2.3) を平均的システム $\mathfrak{S}_1$ 1つの最尤問題に直すと，論文 I により

$$\max\theta_1=-\sum\pi_{1i}\log\pi_{1i} \tag{2.4}$$

$$\sum\pi_{1i}=1 \tag{2.5}$$

$$\sum\pi_{1i}f_k{}^i=\varphi_{1k} \tag{2.6}$$

となる．そしてこの解の分配関数 Z_1，確率自由度 s_1 はそれぞれ

$$Z_1=\sum_i\exp\left\{-\sum_k\beta_{1k}f_k{}^i\right\} \tag{2.7}$$

$$s_1=\varphi_1\beta_1{}^T+\log Z_1 \tag{2.8}$$

となる．同様にして $\mathfrak{S}_2$ に対しても計算すれば，(2.1)～(2.8) の添字1を2とした式が得られる．ただし1, 2ともミクロ状態関数 $f_k{}^i$ は同じであるとする．

つぎに $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ を合併して2層系をつくることを考える．ここで状態量 S_k，$k=1,\cdots\cdots,m$ の添字集合 M を M', M'' に分け $S_{M'}$ については制約はそのままとし，$S_{M''}$ については両方の制約状態量を合わせて新しく制約とすると考える．

$$\left.\begin{array}{l} N=N_1+N_2,\quad \Phi_{k''}=\Phi_{1k''}+\Phi_{2k''} \\ p_1=\dfrac{N_1}{N},\qquad p_2=\dfrac{N_2}{N},\qquad k'\in M', k''\in M'' \end{array}\right\} \tag{2.9}$$

として，新しくつくられた2層系を記述する最尤問題は

$$\max\ W=W_1\cdot W_2 \tag{2.10}$$

$$\sum n_{1i}f_{k'}{}^i=\Phi_{1k'},\quad \sum n_{2i}f_{k'}{}^i=\Phi_{2k'} \tag{2.11}$$

$$\sum n_{1i}f_{k''}{}^i+\sum n_{2i}f_{k''}{}^i=\Phi_{k''} \tag{2.12}$$

となる．同様にして平均システム $\mathfrak{S}$ 1つ当りに直すと，

$$\max\theta=-p_1\sum\pi_{1i}\log\pi_{1i}-p_2\sum\pi_{2i}\log\pi_{2i} \tag{2.13}$$

$$\sum \pi_{1i}=1(p_1\beta_{01}), \qquad \sum \pi_{2i}=1(p_2\beta_{02}) \tag{2.14}$$

$$\sum \pi_{1i}f_{k'}{}^{i} = \varphi_{1k'}(\beta_{1k'}), \qquad \sum \pi_{2i}f_{k'}{}^{i}=\varphi_{2k'}(\beta_{2k'}) \tag{2.15}$$

$$p_1\sum \pi_{1i}f_{k''}{}^{i}+p_2\sum \pi_{2i}f_{k''}{}^{i}=\varphi_{k''}(\beta_{k''}) \tag{2.16}$$

となる．ここで括弧のなかはラグランジュ乗数（確率自由度係数）を表わす．この最尤問題の解は

$$Z_1=\sum_i \exp\left\{-\sum_{k'}\beta_{1k'}f_{k'}{}^{i}-\sum_{k''}\beta_{k''}f_{k''}{}^{i}\right\} \tag{2.17}$$

$$Z_2=\sum_i \exp\left\{-\sum_{k'}\beta_{2k'}f_{k'}{}^{i}-\sum_{k''}\beta_{k''}f_{k''}{}^{i}\right\} \tag{2.18}$$

$$-\frac{\partial \log Z_1}{\partial \beta_{1k'}}=\varphi_{1k'}, \qquad -\frac{\partial \log Z_2}{\partial \beta_{2k'}}=\varphi_{2k'} \tag{2.19}$$

$$-p_1\frac{\partial \log Z_1}{\partial \beta_{k''}}-p_2\frac{\partial \log Z_2}{\partial \beta_{k''}}=\varphi_{k''} \tag{2.20}$$

$$p_{1i}=\frac{1}{Z_1}\exp\{-\sum \beta_{1k'}f_{k'}{}^{i}-\sum \beta_{k''}f_{k''}{}^{i}\} \tag{2.21}$$

$$p_{2i}=\frac{1}{Z_2}\exp\{-\sum \beta_{2k'}f_{k'}{}^{i}-\sum \beta_{k''}f_{k''}{}^{i}\} \tag{2.22}$$

$$\begin{aligned} s&=-p_1\sum p_{1i}\log p_{1i}-p_2\sum p_{2i}\log p_{2i} \\ &=p_1\sum_{k'}\beta_{1k'}\varphi_{1k'}+p_2\sum_{k'}\beta_{2k'}\varphi_{2k'}+\sum_{k''}\beta_{k''}\varphi_{k''} \\ &\quad +p_1\log Z_1+p_2\log Z_2 \end{aligned} \tag{2.23}$$

となる．

(ii)　自由度係数と状態量の流れ

次に２つのシステム間ではじめ制約をつけられていた状態量が制約が除かれたときどのように流れるかを見てみよう．いま簡単のために１つの状態量 S_l が制約をつけられていたとすると，(2.19) 式より各システムはそれぞれ別々の自由度係数 β_{1l}, β_{2l} をもち，状態量密度 $\varphi_{1l}, \varphi_{2l}$ を保っている．いま $\beta_{1l}<\beta_{2l}$ とすると両方のシステムの構造を表わすミクロ状態関数 $f_k{}^{i}$ は同じであるから，Z_1, Z_2 の違いは φ と β の違いだけである．従って $\partial\varphi_{1l}/\partial\beta_{1l}$ (<0) と $\partial\varphi_{2l}/\partial\beta_{2l}$ (<0)

は関数形は同じであるから，$\beta_{1l}<\beta_{2l}$ ならば $\varphi_{2l}<\varphi_{1l}$ となっている．

つぎにこの S_l の制限を取ると（2.20）より両者の密度 φ_l が等しくなるまで S_l の移動が起り，従って今の場合 $\mathfrak{S}_1$ より $\mathfrak{S}_2$ へ状態量 S_l が移動することになる．そして最後は両方の自由度係数 β_l および状態量密度 φ_l が一致して S_l についての均衡状態に達する．すなわち状態量 S_l は β_l の小さい方から大きい方へ移動するのである．

II　特性状態関数の性質

(i)　環境システム

Iにおいて述べた2層系 $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ の最尤状態（2.17)～(2.23）を，$\mathfrak{S}_1$ の方から考えてみると，$\mathfrak{S}_1$ の制約状態量 $S_{M'}$ を $\Phi_{M'}$ で制約し，自由状態量 $S_{M''}$ の自由度係数 $\beta_{M''}$ を $\mathfrak{S}_2$ のそれと一致させた上で最尤状態としたときの分配関数が Z_1 であるということになっていることがわかる．ここでとくに $\mathfrak{S}_2$ は十分大きく，自由状態量 $S_{M''}$ が出入しても $\beta_{M''}$ は変化を受けないようなものであるとする．このような $\mathfrak{S}_2$ をとくに環境システム $\mathfrak{G}$ とよび，今後 $\mathfrak{S}_1$ はあらためて $\mathfrak{S}$ と書くことにする．また上のような $\mathfrak{S}_1, \mathfrak{S}_2$ あるいは $\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{G}$ は「自由状態量 $S_{M''}$ について均衡している」という．

さてこのような $\mathfrak{S}$ に対する特性状態関数は前述のように

$$R(\varphi_{M'}, \beta_{M''}, \lambda)=\log Z(\beta, \lambda)+\sum_{k'}\beta_{k'}\varphi_{k'} \quad (2.24)$$
$$=s(\varphi, \lambda)-\sum_{k''}\beta_{k''}\varphi_{k''}$$

となる．ただし λ はミクロ状態関数 $f_k(x^i, \lambda)$ に入っており，この関数形を特定化しないと性質は明確にならないので本論文では除くこととする．

特性状態関数でとくに重要なのは $M'=M$ としたときの $s(\varphi)$ と $M'=\phi$ としたときの $\log Z(\beta)$ である．

(ii)　$\log Z(\beta)$ の β に関する凸性

[定理1]　$\log Z(\beta)$ は β に関して凸関数である．

証明　定義により

$$Z=\sum_i \exp\left(-\sum_j \beta_j f_j{}^i\right)$$

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_k}=-\frac{1}{Z}\sum f_k{}^i \exp(-\sum \beta_j f_j{}^i)=-\varphi_k \quad (2.25)$$

$$\frac{\partial^2 \log Z}{\partial \beta_k \partial \beta_l}=\sum_i p_i f_k{}^i f_l{}^i-\left(\sum_i p_i f_k{}^i\right)\left(\sum_i p_i f_l{}^i\right)$$

$$=\sum_i p_i(f_k{}^i-\varphi_k)(f_l{}^i-\varphi_l). \quad (2.26)$$

すなわち (2.26) は確率変数である $f_j(x^i, \lambda)$ $(j=1, \cdots\cdots, m)$ の分散共分散行列の成分である．従ってこの行列は非負値確定である．念のために以下これを証明しておく．(2.26) の行列を V とする．

いま任意の m 次元ベクトル $z=(z_1, z_2, \cdots\cdots, z_m)$ (ただし $z\neq 0$) をもってきて，V に関する 2 次形式 zVz^T をつくる．

$$zVz^T=\sum_{k,l} z_k z_l \sum_i p_i(f_k{}^i-\varphi_k)(f_l{}^i-\varphi_l)$$

$$=\sum_i p_i \sum_{k,l} z_k(f_k{}^i-\varphi_k) z_l(f_l{}^i-\varphi_l)$$

$$=\sum_i p_i \left\{\sum_j (f_j{}^i-\varphi_j) z_j\right\}^2 \geqq 0.$$

従って V は非負値確定であり，$\log Z$ は β の凸関数である．

(終)

以下の議論では殆んど一般性を失うことなしに，V は正値確定であるとしていくことにする．

[系 1]　$\dfrac{\partial \varphi_k}{\partial \beta_k}<0$ である．

証明

$$\frac{\partial^2 \log Z}{\partial \beta_k{}^2}=-\frac{\partial \varphi_k}{\partial \beta_k}=\text{正値確定行列 } V \text{ の対角要素}$$

$$>0$$

(終)

[**定理 2**]　$s(\varphi)$ は φ について凹関数である．

証明

$$s = \log Z + \beta\varphi^T$$

$$\frac{\partial s}{\partial \beta_k} = \frac{\partial \log Z}{\partial \beta_k} + \varphi_k = -\varphi_k + \varphi_k = 0. \qquad (2.27)$$

さらに（2.27）を φ_l で微分すると，

$$\sum_j \frac{\partial \log Z}{\partial \beta_k \partial \beta_j} \frac{\partial \beta_j}{\partial \varphi_l} + \delta_{kl} = 0. \qquad (2.28)$$

他方

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi_l} = \beta_l, \qquad \frac{\partial^2 s}{\partial \varphi_l \partial \varphi_k} = \frac{\partial \beta_l}{\partial \varphi_k} = \frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_l} \qquad (2.29)$$

であるから，この行列を B とおくと（2.28）は

$$\sum_j V_{kj} B_{jl} = -\delta_{kl}.$$

すなわち

$$V \cdot B = -I, \qquad B = -V^{-1} \qquad (2.30)$$

となる．V が正値確定であるから V^{-1} が存在しそれも正値確定である．従って B は負値確定となる．故に $s(\varphi)$ は φ の凹関数となる．

（終）

［定理 3］ 最尤状態における $\log Z, s$ をあらためて φ, β の関数と考えるものとする．最尤状態における値を φ_0, β_0 として，

（i） β を β_0 に固定したとき $\log Z$ は $\varphi = \varphi_0$ において最大値をとる．

（ii） φ を φ_0 に固定したとき s は $\beta = \beta_0$ において最小値をとる．

証明 最尤問題の解 $\varphi_0, \beta_0, Z_0, s_0$ は次の式を満たすものである．

$$Z = \sum \exp(-\beta (f^i)^T) \qquad (2.31)$$

$$\frac{\partial \log Z}{\partial \beta} = -\varphi \qquad (2.32)$$

$$s = \beta\varphi^T + \log Z \qquad (2.33)$$

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi} = \beta. \qquad (2.34)$$

ここで，（2.31），（2.33）はスカラー方程式であり，（2.32），（2.34）はそれぞれ m 次のベクトル方程式である．（2.32），（2.34）より β_k, φ_k （$k \in M$）は互いに独立として

$$\frac{\partial(\log Z+\beta\varphi^T)}{\partial\beta}=0 \tag{2.35}$$

$$\frac{\partial(s-\beta\varphi^T)}{\partial\varphi}=0. \tag{2.36}$$

ここで (2.33) および定理1の結果を用いると，$s=\log Z+\beta\varphi^T$ は凸であるから，β^0, φ^0 で最小値を与え，定理2から $\log Z=s-\beta\varphi^T$ は凹であるから，β^0, φ^0 で最大値を与えることがわかる．しかも (2.31)～(2.34) は β_0 ないしは φ_0 のいずれかを与えればすべて定まるから，(i), (ii) は互いに表裏の関係にあり，最尤解を与えるにはいずれか一方だけで十分である．

（終）

［**定理 4**］　定理3において m 個の添字の集合 M を M', M'' に分け $\varphi_{M'}, \beta_{M''}$ を $\varphi_{0M'}, \beta_{0M''}$ にそれぞれ固定したときの最尤解を $\varphi_{0M''}$, $\beta_{0M'}$ とすると，その点で，特性状態関数 $R(\varphi_{M'}, \beta_{M''})$ は $\beta_{M'}$ について最小となり，$\varphi_{M''}$ に対し最大となる．

証明　$\varphi_{M'}, \beta_{M''}$ を与えて $\varphi_{M''}, \beta_{M'}$ を解く方程式は (2.32) および (2.34) から

$$\frac{\partial\log Z}{\partial\beta_{M'}}=-\varphi_{M'} \tag{2.37}$$

$$\frac{\partial s}{\partial\varphi_{M''}}=\beta_{M''} \tag{2.38}$$

となる．そこで (2.37) より

$$\frac{\partial(\log Z+\beta_{M'}\varphi_{M'}{}^T)}{\partial\beta_{M'}}=0 \tag{2.39}$$

$$\frac{\partial(s-\beta_{M''}\varphi_{M''}{}^T)}{\partial\varphi_{M''}}=0. \tag{2.40}$$

しかるに (2.33) より

$$\log Z+\beta_{M'}\varphi_{M'}{}^T=s-\beta_{M''}\varphi_{M''}{}^T=R(\varphi_{M'}, \beta_{M''})$$

となるから，$\log Z$ が $\beta_{M'}$ について凸，s が $\varphi_{M''}$ について凹という性質から，結局 $\varphi_{M'}, \beta_{M''}$ を独立変数に選んだときの特性状態関数 $R(\varphi_{M'}, \beta_{M''})$ は $\varphi_{0M'}, \beta_{0M'}, \varphi_{0M''}, \beta_{0M''}$ において鞍点を持つこと

になる.

（終）

III　ルシャトリエの法則

マクロ状態変数 φ, 共役変数 β のなかから任意の2組 (φ_k, β_k), (φ_l, β_l) をとり出す. これらに対しては

$$\frac{\partial s}{\partial \varphi_k}=\beta_k, \quad \frac{\partial s}{\partial \varphi_l}=\beta_l \tag{3.1}$$

という関係がある. そこで次のような2つの変化率を考える.

$$\text{(i)}\ \left(\frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_k}\right)_{\varphi_l} \qquad \text{(ii)}\ \left(\frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_k}\right)_{\beta_l}.$$

ここで $\beta_k=\beta_k(\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_k, \cdots\cdots, \varphi_m)$ であり, (i) は φ_k 以外のすべての φ を固定したときの β_k の φ_k に対する変化率を意味し, これは通常の微分学の定義そのものである. (φ_l を付記してあるのは (ii) との対応をとるためである.) これに対し (ii) は $\varphi_1, \cdots\cdots, \varphi_k, \cdots\cdots, \varphi_l, \cdots\cdots, \varphi_m$ のうち φ_k, φ_l 以外のすべてを固定し, さらに φ_l の代りに β_l を固定したときの φ_k に対する β_k の変化率である. すなわち

$$(\Delta\beta_k)_{\beta_l}=\left(\frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_k}\right)_{\beta_l}\Delta\varphi_k=\left(\frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_k}\right)\Delta\varphi_k+\left(\frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_l}\right)\Delta\varphi_l. \tag{3.2}$$

他方 $\Delta\varphi_k, \Delta\varphi_l$ は $\beta_l=$一定 という拘束を受けるから,

$$\Delta\beta_l=\left(\frac{\partial \beta_l}{\partial \varphi_k}\right)\Delta\varphi_k+\left(\frac{\partial \beta_l}{\partial \varphi_l}\right)\Delta\varphi_l=0 \tag{3.3}$$

であり,

$$\Delta\varphi_l=-\frac{\left(\dfrac{\partial \beta_l}{\partial \varphi_k}\right)}{\left(\dfrac{\partial \beta_l}{\partial \varphi_l}\right)}\Delta\varphi_k. \tag{3.4}$$

これを (3.2) に代入すると

$$\left(\frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_k}\right)_{\beta_l}=\left(\frac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_k}\right)_{\varphi_l}-\frac{\left(\dfrac{\partial \beta_k}{\partial \varphi_l}\right)\left(\dfrac{\partial \beta_l}{\partial \varphi_k}\right)}{\left(\dfrac{\partial \beta_l}{\partial \varphi_l}\right)} \tag{3.5}$$

となる．しかるに定理2の（2.29）の B 行列の性質により

$$\frac{\partial\beta_k}{\partial\varphi_l}=\frac{\partial\beta_l}{\partial\varphi_k},\qquad \frac{\partial\beta_l}{\partial\varphi_l}<0$$

であるので（3.5）の第2項は符号も含めて正となる．従って

$$\left(\frac{\partial\beta_k}{\partial\varphi_k}\right)_{\beta_l}>\left(\frac{\partial\beta_k}{\partial\varphi_k}\right)_{\varphi_l} \tag{3.6}$$

となる．また（3.5）を書き直すと，

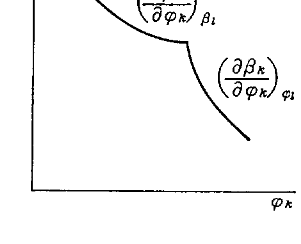
$$\left(\frac{\partial\beta_k}{\partial\varphi_k}\right)_{\beta_l}=\frac{\left(\frac{\partial\beta_k}{\partial\varphi_k}\right)\left(\frac{\partial\beta_l}{\partial\varphi_l}\right)-\left(\frac{\partial\beta_k}{\partial\varphi_l}\right)\left(\frac{\partial\beta_l}{\partial\varphi_k}\right)}{\left(\frac{\partial\beta_l}{\partial\varphi_l}\right)} \tag{3.7}$$

となり，同じく B 行列の負値確定性により，分母は負，分子は正となるので，（3.6）と併せて，

$$\boxed{\left(\frac{\partial\beta_k}{\partial\varphi_k}\right)_{\varphi_l}<\left(\frac{\partial\beta_k}{\partial\varphi_k}\right)_{\beta_l}<0} \tag{3.8}$$

が得られる．図1においてこの意味を説明しよう．システム 𝔖 と環境システム 𝔊 とがあり，はじめ 𝔖 は全部の状態量が制約され孤立システムとなっているとする．そこで任意の2つの状態量 S_k, S_l をとり，これを自由状態量として，φ_l を固定するかわりに β_l を固定したとき，β_k の φ_k に対する変化率はどのように変るか．これがルシャトリエの法則の最も普通の表現である．結果は図1のように状態変数 φ_l そのものに制約を加える方が，自由度係数 β_l に制約を加えるよりもシステムには強い影響があり，カーブは急勾配になる．

図 1



なおより一般的には

$$\left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial\beta_1}\right)<\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial\varphi_1}\right)_{\beta_2}<\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial\varphi_1}\right)_{\beta_2\beta_3}<\cdots\cdots<\left(\frac{\partial\beta_1}{\partial\varphi_1}\right)_{\beta_2\cdots\beta_m}<0 \tag{3.9}$$

という関係があり，すでにサミエル

ソンによって同様な最適化問題に対して証明が与えられている [4].

さて図1のような変化を行ったとき，$\mathfrak{S}$ の状態はどのように変るかを次に調べてみる．まず自由度係数 β_l は環境システムのそれと等しく保ちながら，φ_k を増加させてると (3.8) により共役な自由度係数 β_k は減少することになるが，φ_l の変化を見るために

$$\Delta\beta_l=\frac{\partial\beta_l}{\partial\varphi_k}\Delta\varphi_k+\frac{\partial\beta_l}{\partial\varphi_l}\Delta\varphi_l=0$$

とすると，

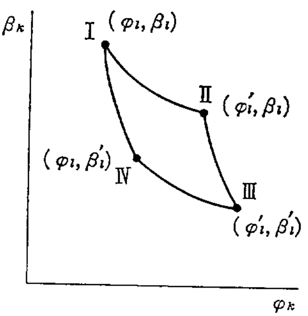
$$\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial\varphi_k}\right)_{\beta_l}=-\left(\frac{\partial\beta_l}{\partial\varphi_k}\right)\bigg/\left(\frac{\partial\beta_l}{\partial\varphi_l}\right) \tag{3.10}$$

となる．また φ_l 一定の変化で β_l は $\partial\beta_l/\partial\varphi_k$ となるから，結局，$\partial\beta_l/\partial\varphi_k>0$ ならば β_l 一定で φ_l は φ_k とともに増加し，φ_l 一定では β_l も増加する．($\partial\beta_l/\partial\varphi_k<0$ ならばその逆となる.) すなわち β_l 一定では φ_k の増加とともに $\mathfrak{S}$ は $\mathfrak{G}$ から状態量 S_l を吸収し S_l の量は増加する．次に φ_l 一定のもとで φ_k を増加すると S_l の出入はないが自由度係数 β_l は増大する．

IV　カルノーのサイクル

いまシステム $\mathfrak{S}$ と2つの環境システム $\mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ があり，状態量 S_l の自由度係数は $\mathfrak{G}$ については β_l，$\mathfrak{G}'$ については β_l' であり，$\beta_l<\beta_l'$ とする．はじめに $\mathfrak{S}$ は $(\varphi_{1k}, \beta_{1k}, \varphi_l, \beta_l)$ によって指定される状態Iにあるものとする．(他の状態変数は不変とする.) まず $\mathfrak{S}$ を $\mathfrak{G}$ に接触させ両者を S_l について均衡させる．そこで β_l を一定に保ちながら φ_k を増加させると β_k は減少し状態IIに達する．このとき $B_{lk}>0$ を仮定すると (3.10) より φ_l は増加するので適当な φ_l' となったところで止める．このとき状態IIは $(\varphi_{2k}, \beta_{2k}, \varphi_l', \beta_l)$ で表わされる．次に φ_l' を一定にして $\mathfrak{S}$ の自由度係数が丁度 β_l' になるまで φ_k を増加させ状態III $(\varphi_{3k}, \beta_{3k}, \varphi_l', \beta_l')$ とする．そこで $\mathfrak{S}$ を $\mathfrak{G}'$ に接触させると今度は $\mathfrak{S}$ と $\mathfrak{G}'$ は S_l について均衡する．次に S_l を用いて β_l' を一定にして φ_k を減少させ φ_l' が φ_l になるようにす

図 2



る．この状態IVは（$\varphi_{4k}, \beta_{4k}, \varphi_l, \beta_l'$）である．最後に S_l を閉じ φ_l を一定にして β_l' が β_l に減るまで φ_k を減少させる．

以上のI，II，III，IV，Iの循環プロセスを通って $\mathfrak{S}$ は全くもとの状態となったわけであるから，このとき $\mathfrak{S}$ の確率自由度（エントロピー）の増加分はゼロとなるはずである（前論文I，p. 42，定理3）．従って，エントロピーの増加分は

$$\Delta s=\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}\beta_k d\varphi_k+\beta_l\int_{\mathrm{I}}^{\mathrm{II}}d\varphi_l+\int_{\mathrm{II}}^{\mathrm{III}}\beta_k d\varphi_k+\int_{\mathrm{III}}^{\mathrm{IV}}\beta_k d\varphi_k+\beta_l'\int_{\mathrm{III}}^{\mathrm{IV}}d\varphi_l$$
$$+\int_{\mathrm{IV}}^{\mathrm{I}}\beta_k d\varphi_k=0$$

$$\Delta s=\oint\beta_k d\varphi_k+\beta_l(\varphi_l'-\varphi_l)+\beta_l'(\varphi_l-\varphi_l')=0$$

$$\oint\beta_k d\varphi_k=(\beta_l'-\beta_l)(\varphi_l'-\varphi_l)>0 \tag{4.1}$$

すなわち，(4.1) の右辺は低自由度係数 β_l の環境システム $\mathfrak{G}$ から状態量 $\varphi_l'-\varphi_l$ による確率自由度（エントロピー）$\beta_l(\varphi_l'-\varphi_l)$ と，高自由度係数 β_l' の $\mathfrak{G}'$ へ $\mathfrak{S}$ から β_l' で送り出した状態量 $\varphi_l'-\varphi_l$ の確率自由度の差であり，この差の分だけ状態量 φ_k およびそれに伴って β_k が動いて全システム $\mathfrak{S}, \mathfrak{G}, \mathfrak{G}'$ の確率自由度を増加したということを意味する．

このようなサイクルをわれわれの統計的システム論におけるカルノーサイクルとよぶことにする．このカルノーサイクルを実際に動力機関として動かすには，$\mathfrak{G}$ と $\mathfrak{S}$ とを接触させるとき $\mathfrak{G}$ の β_l を $\mathfrak{S}$ の β_l より極くわずか小さくしておき，$\mathfrak{G}'$ と $\mathfrak{S}$ を接触させるときは $\mathfrak{G}'$ の β_l' を $\mathfrak{S}$ の β_l' よりわずかに大きくしておく．こうすると先に述べたように状態量 S_l はI→IIのプロセスで $\mathfrak{G}$ から自然に緩か

に $\mathfrak{S}$ へ流入して行き，III→IVのプロセスでは $\mathfrak{S}$ から $\mathfrak{S}'$ へ流出して行く．そこでもう1つのカルノーサイクルを組み合わせて状態量 S_k のサイクルをゆっくりと右回りに回転させることができる．

以上のようなカルノーサイクルが，あらゆるサイクルのなかで，2つの自由度係数の異なる環境システム $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ の間の状態量の確率自由度の落差を効率よく利用するものであることは上記の説明でも明らかであるが，サイクルの可逆性等については省略する．

最後にもう一度述べると，カルノー機関を動かす原動力となったのは，2つのシステム $\mathfrak{S}, \mathfrak{S}'$ の間に不均等があり，この不均等を解消しようとする力，すなわち確率自由度（エントロピー）最大化という自然の力である．

付　録

個人的厚生関数が凸関数の場合の所得分布曲線

論文Iでは統計的システム論の応用として個人の集団の所得分布曲線を考察し，個人的厚生関数（効用関数）を対数関数（凹関数）と仮定してガンマ分布曲線が導出されることを示し，これがSalem＝Mountの論文の所得分布曲線に一致することを示した．本論文では，全く数学的興味からだけであるが，個人的厚生関数（効用関数）が convex であるような人々の集団の統計的性質を調べることにする．効用関数の理論から明らかなように，その concavity は，限界効用逓減を意味し財取得に対する保守性，危険に対する安全主義を表わしている．これに対して convex な効用関数は，財獲得に対する積極性，危険に対する投機性を意味すると考えられる．従ってこれらの異なった型の個人的厚生関数をもつ個人の集団の性質を比較してみるのは興味のあることである．

簡単のために所得 y_i に対する個人的厚生関数 $u(y_i)$ を

$$u(y_i)=y_i^2 \tag{A. 1}$$

としよう．こうすると最尤問題の条件式は

$$\sum \pi_i y_i = y, \qquad \sum \pi_i y_i^2 = u$$

となる．更に式を簡略化するために平均所得 y を単位1とすることにより，条件式は

$$\sum_i \pi_i\left(\frac{y_i}{y}\right)=1, \qquad \sum_i \pi_i\left(\frac{y_i}{y}\right)^2=\frac{u}{y^2}$$

となり，$y_i/y,\ u/y^2$ をあらためて y_i, u とかくことにすると，

$$\sum_i \pi_i y_i = 1, \qquad \sum_i \pi_i y_i^2 = u$$

となる．これを用いて最尤問題を解くと，他の仮定や記号は全く論文IのIVと同じものを用いて論文Iの（4.1）に対して

$$Z=c\int_0^\infty e^{-\beta_1 y-\beta_2 y^2}dy \tag{A. 2}$$

$$=c\frac{\exp\left(\beta_1^2/4\beta_2\right)}{\sqrt{\beta_2}}\,\mathrm{Erfc}\left(\frac{\beta_1}{2\sqrt{\beta_2}}\right), \tag{A. 3}$$

ここで

$$\mathrm{Erfc}\,(x)=\int_x^\infty e^{-t^2}dt$$

となる．平均所得 y $(=1)$ と $\log Z$ の関係として

$$y=-\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_1}=-\frac{\beta_1}{2\beta_2}+\frac{1}{2\sqrt{\beta_2}}\frac{1}{\mathrm{Erfc}\,(\beta_1/2\sqrt{\beta_2}\,)}\exp\left(-\frac{\beta_1^2}{4\beta_2}\right) \tag{A. 4}$$

また u と $\log Z$ の関係として

$$u=-\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_2}=\frac{1}{\beta_2}\left(\frac{\beta_1^2}{4\beta_2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\times\frac{\beta_1}{2\sqrt{\beta_2}}\frac{1}{\mathrm{Erfc}\left(\dfrac{\beta_1}{2\sqrt{\beta_2}}\right)}\exp\left(-\frac{\beta_1^2}{4\beta_2}\right)\right) \tag{A. 5}$$

が得られる．そこで $\gamma=\beta_1/2\sqrt{\beta_2}$ とおき，

$$\omega(\gamma)=\frac{\gamma}{\mathrm{Erfc}\,(\gamma)}\exp\left(-\gamma^2\right)-2\gamma^2 \tag{A. 6}$$

とおくと

$$-\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_1}=\frac{1}{\beta_1}\omega(\gamma)=y(=1) \qquad \text{(A. 7)}$$

$$-\frac{\partial \log Z}{\partial \beta_2}=\frac{1}{2\beta_2}(1-\omega(\gamma))=u \qquad \text{(A. 8)}$$

となる．さらに（A. 7)，（A. 8）より u は

$$\frac{{\beta_1}^2}{4\beta_2}=\gamma^2=\frac{u}{2}\frac{\omega^2(\gamma)}{1-\omega(\gamma)}$$

$$u=\frac{2\gamma^2\{1-\omega(\gamma)\}}{\omega^2(\gamma)} \qquad \text{(A. 9)}$$

となる，またエントロピーは

$$\begin{aligned} s&=\log Z+\beta_1 y+\beta_2 u \\ &=\frac{{\beta_1}^2}{4\beta_2}-\frac{1}{2}\log\beta_2+\log \mathrm{Erfc}\,(\gamma)+\beta_1\cdot 1+\beta_2 u \\ &=\gamma^2-\frac{1}{2}\log\beta_2+\log \mathrm{Erfc}\,(\gamma)+\beta_1+\frac{1}{2}(1-\omega(\gamma)) \qquad \text{(A. 10)} \end{aligned}$$

となる．ここで β_1, β_2 は（A. 7)，（A. 8）および（A. 9）から γ の関数として求められる．

次に Theil の不平等度係数 I_γ であるが，分布関数 $f(y)$ に対して

$$I_\gamma=\int\left(\frac{y}{E(y)}\right)\log\left(\frac{y}{E(y)}\right)f(y)dy \qquad \text{(A. 11)}$$

である．ここで $E(y)=1$

$$f(y)dy=\frac{1}{Z}\exp\left(-\beta_1 y-\beta_2 y^2\right)cdy, \qquad \text{(A. 12)}$$

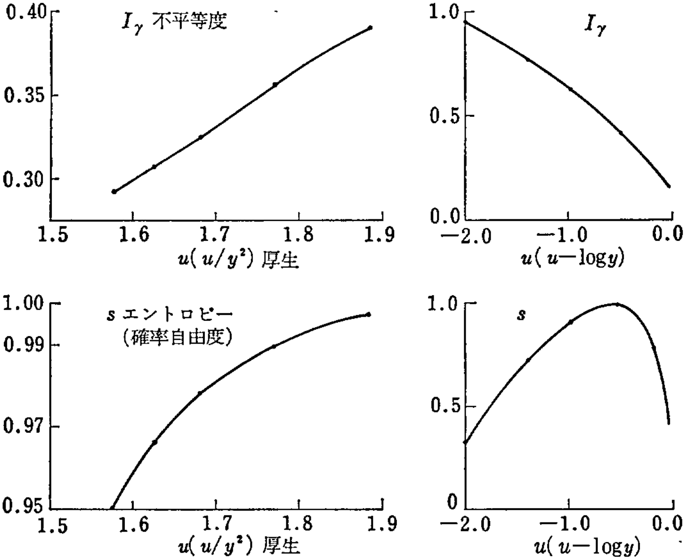
Z に（A. 3)を用いると，

$$I_\gamma=\frac{1}{\mathrm{Erfc}\,(\gamma)}\int_\gamma^\infty\frac{1}{\sqrt{\beta_2}}(z-\gamma)\log\left(\frac{1}{\sqrt{\beta_2}}(z-\gamma)\right)dz \qquad \text{(A. 13)}$$

が得られる．ここで $\beta_2=\omega^2(\gamma)/\gamma^2$ である．

以上により，パラメータ γ の関数として平均厚生 u（本文の呼び方では状態量 S_2 の状態量密度 φ_2)，エントロピー s（確率自由度)，β_1, β_2（y, u の自由度係数)，Theil の不平等度 I_γ を計算でき，これ

図 3



$u(y)=y^2$ の場合　　$u(y)=\log y$ の場合

らの状態変数の間の関係を知ることができる.

以上の計算結果は図3に図示してある. またここには論文Iの $u(y)=\log y$ の場合も比較のために加えてあるが, ただし u や s の値そのものの両者の比較は尺度が違うのでできない. しかし, 傾向だけは明瞭な違いのあることがわかる. すなわち平均所得 y を一定 $(=1)$ としたとき, 厚生を大きくすると, $u(y)$ が concave の場合には不平等度は減少するのに対して, convex の場合には, むしろ不平等度は増加する. またこのことは, 確率自由度 s を高くする (すなわち自然な) 方向と一致する. 他方 concave のときは s の最大値を過ぎた点 (これは現在の経済社会を表わしていることは論文Iで説明した) では, 厚生を大きくすることはむしろ自然に反する方向であったのである. ここに効用関数の互いに逆な社会の特徴がでていて興味のあるところである.

文　献

1. 片岡信二,「統計的システム論 I 」, 一橋大学研究年報『自然科学研究 17』, pp. 31—67, 1977.
2. 片岡信二,「統計的システム論II」, 一橋大学研究年報『自然科学研究 19』, pp. 1—21, 1979.
3. 朝永振一郎,『物理学とは何だろうか　上, 下』, 岩波新書, 1979.
4. P. Samuelson, "The Le Chatelier Principle in Linear Programming", *The Collected Scientific Papers of P. A. Samuelson*, Vol. 1, p. 638, 1949.
5. 深尾毅,『システムの数理』, 筑摩書房, 1975.

(昭和 55 年 5 月 24 日　受理)

訂　正

	誤	正
論文 I (『自然科学研究 17』)		
p. 39 上 12	x^2	x^i
p. 41 下 6	関係ずけ	づけ
p. 43 上 1	${x_i}^i$	x^i
p. 45 上 5	y_1	y_i
論文II (『自然科学研究 19』)		
p. 14 上 7	……所得と……	削除

付　記

なお本原稿を書いた後で次の著書が出版されているのを知った.

R. D. Levine, M. Tribus ed., *The Maximun Entropy Formalism*, MIT Press, 1979.