初等帰納函数と帰納法

永島　孝

原始帰納函数の理論において帰納法の形にいろいろな制限をくわえることに関する研究をペーテルやロビンソンがおこなっている．これらの研究と同様なことを初等函数に対してこころみるのがこの論文の目的である．ゲーデルは，決定不能命題を構成してみせた有名な論文のなかで，原始帰納函数という概念を定義した．クリーニは，エルブランとゲーデルの示唆をうけて，原始帰納函数の拡張として（一般）帰納函数の概念を定義した．一方，カルマールは原始帰納函数よりもせまい初等函数という概念を定義して，ゲーデルの結果に相当するものが原始帰納函数のかわりに初等函数をもちいて得られることを示した．カルマールの初等函数は，解析学における初等函数と区別するために，初等帰納函数（elementary recursive function）ともよばれる．グジェゴルチクは原始帰納函数の全体を階層にわけてそのなかで初等函数がしめる位置をあきらかにするとともに，初等函数をカルマールとは異なる方法で定義した．函数が帰納的であることは算法にしたがって任意の点における値を求め得るという計算可能性と同値である．しかし，その計算可能性というのは有限回の操作ののちに必ず結果が得られるという原理的な可能性であって，算法がいかに複雑であろうと，計算にどれほどの手間がかかろうと，帰納函数であることにかわりはない．そこで，実用的な意味での計算可能性への近似として，帰納函数よりも範囲をせばめて‘つよい意味の計算可能性’とでもいうような概念を見出すことは興味のある問題と考えられる．この観点からのほとんど唯一の研究はリッチーによるものである．彼は予測計算可能性の概念を定義し，それが初等函数と同等な概念であることを示した．このように，初等函数というのは帰納函数論において重要な概念である．

自然数の全体を $\boldsymbol{N}$ であらわし，自然数 x のつぎの数 $x+1$ を x' または $S(x)$ であらわす．函数 g, h があたえられたとき

$$\begin{cases} f(0, \boldsymbol{y})=h(\boldsymbol{y}) \\ f(x', \boldsymbol{y})=g(x, f(x, \boldsymbol{y}), \boldsymbol{y}) \end{cases}$$

をみたす函数 f が定まる．これを原始帰納法という．ただし，f を $n+1$ 変数の函数とすれば，g は $n+2$ 変数の函数，h は n 変数の函数で，$\boldsymbol{y}$ は n 個の変数 $y_1, \cdots\cdots, y_n$ の組をあらわす．f が一変数の函数の場合には h は函数でなくて定数となるが，そのような場合をいちいち別に記す手間をはぶくため，定数は零変数の函数とみなし，太字の小文字は零個以上の変数の組をあらわすものと約束する．定値函数と恒等函数と S とを基本として，これらの函数に対して合成と原始帰納法とを有限回だけくりかえして適用することによって得られるような函数を原始帰納函数という．すなわち，原始帰納函数とは基本の函数から合成と原始帰納法とによって生成される函数をいうのである．はじめにのべたペーテルやロビンソンらの研究というのは，原始帰納法のかたちに対してある種の制限を設けても基本の函数にいくつかのものを追加しておけばあらゆる原始帰納函数が生成されるという種類のいくつかの定理の証明である．

函数 g, h, m があたえられて，上記の原始帰納法によって f が定まるとともに，

$$f(x, \boldsymbol{y}) \leq m(x, \boldsymbol{y})$$

がつねになりたっているとする．このようにして f を g, h, m から定めることをグジェゴルチクの帰納法とよぶことにする（グジェゴルチク自身はこれを limited recursion とよんでいる）．グジェゴルチクによれば，恒等函数と定値函数と S と二変数函数 x^y から合成とグジェゴルチクの帰納法で生成される函数の全体は初等函数の全体と一致する．ここでグジェゴルチクの帰納法のかたちに制限をくわえてしかも初等函数がすべて生成されるようにするのがわれわれの目標である．原始帰納法またはグジェゴルチクの帰納法において，$\boldsymbol{y}$ で示した一連の変数を助変数という．また，$g(x, z, \boldsymbol{y})$ が $\boldsymbol{y}$ を含まず x と z

だけの函数であるとき，その帰納法を反復法（iteration）とよぶ．一方，$g(x, z, \boldsymbol{y})$ が x を含まないとき，それぞれ純（pure）帰納法または純反復法とよぶ．

いま，π, ρ, σ をつぎのような初等函数とする：π は $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ から $\boldsymbol{N}$ への全単射で $\pi(x, y)$ は x に関しても y に関しても単調増加，そして $\rho(\pi(x, y))=x, \sigma(\pi(x, y))=y$．このような三つの初等函数の組は具体的にはいろいろあり得るが，具体的な形についてはのちに述べることにして，さしあたりは上に記したような性質だけを仮定しておく．なお，括弧の節約のために $\rho(x)$ を ρx などと記す．まず，グジェゴルチクの帰納法，

$$\begin{cases} f(0, \boldsymbol{y}, u, v)=h(\boldsymbol{y}, u, v) \\ f(x', \boldsymbol{y}, u, v)=g(x, f(x, \boldsymbol{y}, u, v), \boldsymbol{y}, u, v) \\ f(x, \boldsymbol{y}, u, v)\leq m(x, \boldsymbol{y}, u, v) \end{cases}$$

で f が定められている場合を考える．このとき，

$$\begin{cases} f_1(x, \boldsymbol{y}, z)=f(x, \boldsymbol{y}, \rho z, \sigma z), \\ g_1(x, w, \boldsymbol{y}, z)=g(x, w, \boldsymbol{y}, \rho z, \sigma z) \end{cases}$$

と定めれば $f(x, \boldsymbol{y}, u, v)=f_1(x, \boldsymbol{y}, \pi(u, v))$ であって

$$\begin{cases} f_1(0, \boldsymbol{y}, z)=h(\boldsymbol{y}, \rho z, \sigma z) \\ f_1(x', \boldsymbol{y}, z)=g_1(x, f_1(x, \boldsymbol{y}, z), \boldsymbol{y}, z) \\ f_1(x, \boldsymbol{y}, z)\leq m(x, \boldsymbol{y}, \rho z, \sigma z) \end{cases}$$

がなりたつ．すなわち，任意の正の整数 n に対して，助変数 $n+1$ 個のグジェゴルチク帰納法は助変数 n 個のグジェゴルチク帰納法に還元される．したがって，つぎの補題がなりたつ．

補題 1．あらゆる初等函数は，恒等函数，定値函数，$S, x^y, \pi, \rho, \sigma$ から合成と助変数 1 個のグジェゴルチク帰納法で生成される．

つぎに，助変数 1 個のグジェゴルチク帰納法

$$\begin{cases} f(0, y)=h(y) \\ f(x', y)=g(x, f(x, y), y) \\ f(x, y)\leq m(x, y) \end{cases}$$

によって g, h, m から f が定められているとする．ここで

$$\begin{cases} f_1(x, y)=\pi(f(x, y), y), \\ g_1(x, z)=\pi(g(x, \rho z, \sigma z), \sigma z) \end{cases}$$

とおけば $f(x, y)=\rho f_1(x, y)$ であって

$$\begin{cases} f_1(0, y)=\pi(h(y), y) \\ f_1(x', y)=g_1(x, f_1(x, y)) \\ f_1(x, y)\leq\pi(m(x, y), y) \end{cases}$$

がなりたつ．すなわち，f_1 は助変数1個のグジェゴルチク反復法で定まる．ゆえに，つぎの補題が得られる．

補題 2. あらゆる初等函数は，恒等函数，定値函数，$S, x^y, \pi, \rho, \sigma,$ から合成と助変数1個のグジェゴルチク反復法で生成される．

つぎには，助変数1個のグジェゴルチク反復法

$$\begin{cases} f(0, y)=h(y) \\ f(x', y)=g(x, f(x, y)) \\ f(x, y)\leq m(x, y) \end{cases}$$

によって g, h, m から f が定まっているとして，

$$f_1(x, y)=\pi(x, f(x, y)),$$
$$g_1(z)=\pi((\rho z)', g(\rho z, \sigma z))$$

とおく．そのとき $f(x, y)=\rho f_1(x, y)$ であって，f_1 は

$$\begin{cases} f_1(0, y)=\pi(0, h(y)) \\ f_1(x', y)=g_1(f_1(x, y)) \\ f_1(x, y)\leq\pi(x, m(x, y)) \end{cases}$$

をみたす．これは純反復法であるからつぎの補題が得られる．

補題 3. あらゆる初等函数は，恒等函数，定値函数，$S, x^y, \pi, \rho, \sigma$ から合成と助変数1個のグジェゴルチク純反復法で生成される．

ここまでは pairing functions π, ρ, σ を一般的に考えてきたが，つぎに具体的にそれを定めてみよう．[2] でも用いたゲーデルの函数 $P: \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}\to\boldsymbol{N}$ を考える．$\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ につぎのような全順序を入れる．まず $\max(x, y)$ の大きさによって順序をつけ，$\max(x, y)$ の値が等しいような対の間には辞書式順序（左優先）を入れる．$\boldsymbol{N}$ の自然な順序から P によって $\boldsymbol{N}\times\boldsymbol{N}$ に誘導される順序がこのような順序にな

るものとして，P が定まる．この P に対して

$$RP(x, y)=x, \quad QP(x, y)=y$$

をみたす函数 Q, R の間には $Q'=R, R'=Q$ という関係がある．ただし $f'(x)$ は $f(y)=f(x)$ なる $y<x$ の個数をあらわす（マルコフの演算）．$Ex=x\dot{-}[\sqrt{x}]^2$ とおけば．P, Q', Q はつぎの式であらわせる．

$$P(x, y)=\begin{cases} x+y^2 & (x<y \text{ のとき}), \\ x^2+x+y & (x\geq y \text{ のとき}), \end{cases}$$

$$Q'x=\min([\sqrt{x}], Ex),$$

$$Qx=\begin{cases} [\sqrt{x}] & ([\sqrt{x}]>Ex \text{ のとき}), \\ Ex\dot{-}[\sqrt{x}] & ([\sqrt{x}]\leq Ex \text{ のとき}), \end{cases}$$

さらに，$\min(x, y)=x\dot{-}(x\dot{-}y)$ であり，また

$$y=\begin{cases} u & (r<s \text{ のとき}) \\ v & (r\geq s \text{ のとき}) \end{cases}$$

なる y は $\mathrm{sg}\, x=1\dot{-}(1\dot{-}x), \overline{\mathrm{sg}}\, x=1\dot{-}x$ をもちいて

$$y=u\, \mathrm{sg}(s\dot{-}r)+v\, \overline{\mathrm{sg}}\,(s\dot{-}r)$$

とあらわせるから，P, Q', Q はいずれも定値函数と函数 $+, \dot{-}, \times, [\sqrt{\ }]$ から合成だけをくりかえして得られる．さらに

$$x+y=x'y'\dot{-}(xy)'$$

をもちいて，$+$ のかわりに S をとればよいことがわかる．この結果と補題 3 からただちにつぎの定理を得る．

定理　恒等函数，定値函数，$S, \dot{-}, \times, [\sqrt{\ }], x^y$ から合成と助変数 1 個のグジェゴルチク純反復法で生成される函数の全体は，カルマールの初等帰納函数の全体と一致する．

このささやかな定理の意義は初等函数の本質を解明することよりも，むしろ，初等函数のすべてがある性質をもつことを証明するときに有効な手段となることであろう．なお，この論文では初等函数すなわちグジェゴルチクの第 3 階層についてもっぱら考察したが，第 2 階層以上の各階層についても同様な議論は成立するであろう．一方，第 0 階層と第 1 階層については上にのべたような議論は通用せず，帰納法のかたちに関して制限をくわえ得るか否か予想しがたい．なぜなら，ま

えにのべた条件をみたす函数 π については $\pi(y,z)<\pi(x,x)$ をみたす対 (y,z) はすくなくとも $(x+1)^2-1$ 個あるから

$$\pi(x,x)\geq x^2+2x,$$

ゆえに [1, p. 36] の結果によって π は第1階層には（もちろん第0階層にも）属さないのである．

適当ないくつかの函数から合成と助変数なしのグジェゴルチク帰納法によって初等函数をすべて生成することができるか否かは今後研究すべき問題である．その場合には，この論文の議論では pairing function がほとんど唯一の手段であったのに反して，累積函数や累積帰納法のとりあつかいが必要となるであろう．そのような研究にも，入れ子帰納法や累積帰納法などに関するペーテルの研究が参考になると思われる．

文　献

[1] Grzegorczyk, Andrzej: Some Classes of Recursive Functions. Rozprawy Matematyczne **4**. Warszawa, 1953.

[2] Nagashima, Takashi: On a Certain Class of Recursive Functions. Hitotsubashi J. Arts Sci. **16** (1975), 72–81.

[3] Péter, Rózsa: Über den Zusammenhang der verschiedenen Begriffe der rekursiven Funktion. Math. Ann. **110** (1934), 612–632.

（昭和 54 年 5 月 4 日　受理）