ディオファントス述語の枚挙

永　島　孝

自然数上のディオファントス述語についての決定問題は，否定的であろうと予想されてはいるが，未解決である．これを否定的に解くには，帰納可算述語（Σ_1^0-述語）についての決定問題がディオファントス述語についてのそれに帰せられることを示せば十分である．即ち，任意の帰納可算述語があるディオファントス述語で相対的に帰納的であること，あるいは，任意の帰納可算述語がディオファントス的であることを証明すればよいのであり，従来の研究はこの方針に沿ってすすめられてきたように思われる．これに対して，この決定問題の解決のためにはより精密な方法によらねばならないのであって従来の方針では成功しないであろうと云う批判にもとづいて Hirose は次の三予想を提出した [H].

第1予想．ディオファントス的でない帰納可算述語が存在する．

第2予想．ディオファントス述語の degree は $\mathbf{0}'$ より小さい．

第3予想．任意のディオファントス述語Pに対して，Pで帰納的でないディオファントス述語Qが存在する．

この第3予想はディオファントス述語の決定問題が否定的であることと第2予想とを含み，第2予想は第1予想を含む．第3予想はディオファントス述語の degree の無限上昇列の存在と同値であり，またディオファントス述語の degree 全体の成す上半束が最大元をもたないこととも同値である．さて，これらの予想は正しいものと思われるが，第1予想でさえ証明することは容易でない．Kurata, Hirai は Hirose の予想を強く支持しながらも，その証明のむづかしさをいくつかの事実にもとづいて指摘している [K-H]．ここでは Hirose の予想が成り立つためのいくつかの条件をみちびくことを目標として，ディオファントス述語についての枚挙定理などを証明する．

帰納的であることの定義と同値な多くの条件が知られているのに反し，ディオファントス的であることについて知られているのは‘多項式述語にいくつかの存在記号を前置した形に表わされる’と云う定義だけであるように思われる．さらに，帰納述語にいくつかの存在記号を前置した形の任意の述語はある帰納述語に1つの存在記号を前置した形の述語に同値であるのに対して，ディオファントス述語の場合はこのように存在記号を1つにまとめて1つの存在記号を多項式述語に前置した形に表わすことはできない．このことが，ディオファントス述語を帰納述語や帰納可算述語に比べて扱い難いものにしていると考えられるので，初めに述語のある族を定義し，それに属する述語と1個の存在記号によってディオファントス述語を表わすことを考える．

函数 $\psi_1, \psi_2, \ldots$，定数 $q_1, q_2, \ldots$ および変数 $x_1, \ldots, x_n$ のみから成る1つの式によって $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ が表わされるとき，函数 φ は $\psi_1, \psi_2, \ldots, q_1, q_2, \ldots$ で explicit であると云う．つぎに函数 S, C_q^n, U_i^n をそれぞれ

$$S(x)=x',$$

$$C_q^n(x_1, \ldots, x_n)=q \quad (1 \leq n),$$

$$U_i^n(x_1, \ldots, x_n)=x_i \quad (1 \leq i \leq n)$$

と定義する．$S, \lambda xy(x+y), \lambda xy(xy), 0$ で explicit な函数を（自然数係数の）多項式とよび，φ と ψ が多項式のとき

$$P(a_1, \ldots, a_n) \equiv \varphi(a_1, \ldots, a_n)=\psi(a_1, \ldots, a_n)$$

なる述語 P を多項式述語とよぶ．P が多項式述語のとき

$$Q(a_1, \ldots, a_n) \equiv \exists x_1 \ldots \exists x_m P(a_1, \ldots, a_n, x_1, \ldots, x_m)$$

なる述語 Q をディオファントス述語とよぶ．π が2変数の1-1函数で，任意の a, b について $\rho(\pi(a,b))=a, \sigma(\pi(a,b))=b$ が成り立つとき，(π, ρ, σ) を pairing functions とよぶ [G]．帰納函数論でしばしば用いられる $\pi(a,b)=2^a 3^b$ とそれに対応する ρ, σ はいづれも帰納的であり，例えば前述のように帰納述語に前置されたいくつかの存在記号を1つにまとめるときにこれが用いられるのであるが，多項式の範囲で pairing functions を得ることは不可能であり，多項式述語に前置された存在記号を1つにまとめることができないのである．(π, ρ, σ)

が pairing functions ならば ρ, σ は umfangreich (各 y についてその逆像 $\{x|\varphi(x)=y\}$ が無限集合であるとき，函数 φ は umfangreich であると云う [P]) であるから多項式ではない．多項式をすべて含み，少なくとも1組の pairing functions を含むようなディオファントス函数の族で，函数の合成に関して閉じているようなものを考えると，それに属する函数によって表わされる述語に1つの存在記号を前置して任意のディオファントス述語が得られる．ただしディオファントス函数とは $\lambda x_1 \dots x_n y(\varphi(x_1, \dots, x_n)=y)$ がディオファントス述語になる函数 φ を云う．そのような函数族をなるべく簡単な函数から合成によって得るための試みとしてつぎのように定義する．

$S, \lambda xy(x+y), \lambda xy(x \dot{-} y), \lambda xy(xy), \lambda xy([x/y]), \lambda x([\sqrt{x}]), 0$ で explicit な函数の全体を $\mathscr{A}$ で表わし，さらに $\mathscr{A}$ に属する函数 φ によって $\lambda x_1 \dots x_n(\varphi(x_1, \dots, x_n)=0)$ と表わせる述語の全体をも同じく $\mathscr{A}$ と記す．

函数族 $\mathscr{A}$ は S, C_q^n, U_i^n をすべて含み，函数の合成に関して閉じている．$\mathscr{A}$ の函数は初等的であり，従ってもちろん原始帰納的でもある．また，多項式はすべて $\mathscr{A}$ に属する．つぎのいくつかの函数が $\mathscr{A}$ に属することは各等式の右辺をみれば明らかであろう．

$$\overline{\mathrm{sg}}(a)=1 \dot{-} a,$$
$$\mathrm{sg}(a)=1 \dot{-} (1 \dot{-} a),$$
$$\min(a, b)=a \dot{-} (a \dot{-} b),$$
$$\max(a, b)=(a \dot{-} b)+b,$$
$$|a-b|=(a \dot{-} b)+(b \dot{-} a),$$
$$\mathrm{rm}(a, b)=a \dot{-} b[a/b].$$

さらに Gödel のベータ函数も

$$\beta(c, d, i)=\mathrm{rm}(c, 1+(i+1)d)$$

により，$\mathscr{A}$ に属する．つぎに pairing functions をつくる．

$$J(a, b)=[(a+b)(a+b+1)/2]+a$$

とおくと $J \in \mathscr{A}$ であり，J は $N \times N$ から N への全単射であるから (J, K, L) が pairing functions となるような K, L が定まる [D].

その K, L が $\mathscr{A}$ に属することを示す.

$$Q_1(a)=[([\sqrt{8a+1}]+1)/2]\dot{-}1,$$

$$Q_2(a)=2a\dot{-}Q_1(a)^2$$

とおくと $Q_1, Q_2\in\mathscr{A}$ であり,

$$K(a)=[(Q_2(a)\dot{-}Q_1(a))/2],$$

$$L(a)=[(3Q_1(a)\dot{-}Q_2(a))/2]$$

が成り立つ [D] から $K, L\in\mathscr{A}$ である.

$\mathscr{A}$ は sg を含むから，述語 P が $\mathscr{A}$ に属するためには

$$\varphi(a_1, \ldots, a_n)=\begin{cases}0, & P(a_1, \ldots, a_n) \text{ のとき};\\ 1, & \text{然らざるとき};\end{cases}$$

なる函数すなわち P の特徴函数 φ が $\mathscr{A}$ に属することが必要十分である. $\mathscr{A}$ は $\overline{\mathrm{sg}}, \min$ を含むから，述語族 $\mathscr{A}$ は命題論理の命題演算 $\neg$, $\wedge$ について閉ぢている. 故に述語族 $\mathscr{A}$ は命題論理の任意の命題演算について閉ぢている. 述語 $=$, $\leq$, $<$ はそれぞれ

$$a=b\equiv|a-b|=0,$$

$$a\leq b\equiv a\dot{-}b=0,$$

$$a<b\equiv 1\dot{-}(b\dot{-}a)=0$$

が成り立つから $\mathscr{A}$ に属する. $\mathscr{A}$ の函数がすべてディオファントス函数であることを証明するには $\mathscr{A}$ を生成する 6 つの函数がディオファントス的であることを示せば十分である. $S, +, \times$ は明らかにディオファントス函数である. 他の 3 つの函数についてそれぞれ

$$a\dot{-}b=c\equiv a=b+c\vee(a\leq b\wedge c=0),$$

$$[a/b]=c\equiv bc\leq a<bc'\vee(b=0\wedge c=0),$$

$$[\sqrt{a}]=b\equiv b^2\leq a<b'^2$$

が成り立ち，$\leq$ と $<$ はディオファントス述語でありディオファントス述語の全体は命題演算 $\wedge$, $\vee$ について閉ぢている [D] ことから，これらの函数もディオファントス的である. つぎに P を $\mathscr{A}$ の述語とすると P の特徴函数 φ は $\mathscr{A}$ に属するからディオファントス函数である. 従って $\lambda x_1 \ldots x_n y(\varphi(x_1, \ldots, x_n)=y)$ はディオファントス述語，ゆえに $\lambda x_1 \ldots x_n(\varphi(x_1, \ldots, x_n)=0)$ すなわち P もディオファントス述語で

ある．以上のことからつぎの定理を得る．

定理 1. $\mathscr{A}$ に属する函数，述語はすべてディオファントス的である．

定理 2. $\mathscr{A}$ の $n+2$ 変数の任意の述語 P に対して

$$\forall x_1 \dots \forall x_n(\exists y \exists z P(x_1, \dots, x_n, y, z) \equiv \exists u Q(x_1, \dots, x_n, u))$$

なる $Q \in \mathscr{A}$ が存在する．

証明．$Q(a_1, \dots, a_n, b) \equiv P(a_1, \dots, a_n, K(b), L(b))$ とおけばよい．

定理 3. n 変数の述語 P がディオファントス的であるための必要十分条件は

$$\forall x_1 \dots \forall x_n(P(x_1, \dots, x_n) \equiv \exists y Q(x_1, \dots, x_n, y))$$

なる $Q \in \mathscr{A}$ が存在することである．

証明．P をディオファントス述語とすると

$$P(a_1, \dots, a_n) \equiv \exists x_1 \dots \exists x_m R(a_1, \dots, a_n, x_1, \dots, x_m)$$

なる多項式述語 R がある．ここで $m \geqq 1$ としても一般性を失わない．$R \in \mathscr{A}$ であるから定理 2 を $m-1$ 回くりかえして適用すれば

$$P(a_1, \dots, a_n) \equiv \exists x Q(a_1, \dots, a_n, x)$$

なる $Q \in \mathscr{A}$ を得る．逆に $Q \in \mathscr{A}$ ならば定理 1 から明らかに $\exists x Q(a_1, \dots, a_n, x)$ はディオファントス述語である．

定理 4. $P, \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{A}$ のとき，

$$\psi(a_1, \dots, a_n) = \begin{cases} \varphi_1(a_1, \dots, a_n), & P(a_1, \dots, a_n) \text{ のとき；} \\ \varphi_2(a_1, \dots, a_n), & \text{然らざるとき；} \end{cases}$$

によって定められる函数 ψ は $\mathscr{A}$ に属する．

証明．P の特徴函数を χ とすると

$$\psi(a_1, \dots, a_n) = \varphi_1(a_1, \dots, a_n)\overline{\mathrm{sg}}(\chi(a_1, \dots, a_n)) + \varphi_2(a_1, \dots, a_n)\chi(a_1, \dots, a_n)$$

が成り立つから $\psi \in \mathscr{A}$.

1 変数のディオファントス述語の外延をディオファントス集合とよぶ．

定理 5. 空でない集合 D がディオファントス集合であるための必要十分条件は D を値域とする $\mathscr{A}$ の 1 変数函数が存在することである．

証明．D を空でないディオファントス集合，q を D の 1 つの元とす

る．定理3により $a\in D\equiv\exists xP(a,x)$ なる $P\in\mathscr{A}$ がある．

$$\varphi(a)=\begin{cases}K(a), & P(K(a),L(a))\ \text{のとき；}\\ C_0^1(a), & \text{然らざるとき；}\end{cases}$$

とおくと定理4から $\varphi\in\mathscr{A}$ であり，φ の値域は D に一致する．逆に $\varphi\in\mathscr{A}$ ならば述語 $\lambda xy(\varphi(x)=y)$ も $\mathscr{A}$ に属するから ϕ の値域はディオファントス集合である．

系. Hirose の第1予想が成立するための必要十分条件は $\mathscr{A}$ の1変数函数の値域とならない帰納可算集合が存在することである．

$\mathscr{A}$ の n 変数函数の全体を $\mathscr{A}_n$ と記す．$\mathscr{A}_1$ の函数の値域とならないような帰納可算集合を構成することができれば第1予想の証明が得られたことになる．さらに，第1予想が成立するためには2の巾の全体（すなわち原始帰納函数 2^x の値域）が $\mathscr{A}_1$ の函数の値域とならないことが必要十分である．これに対して Kurata, Hirai は‘与えられた $\varphi\in\mathscr{A}_1$ の値域が自然数の全体 N に一致するか？’と云う決定問題の決定不能性を証明し，一般に，単調増加な原始帰函数 ϕ を固定するとき‘与えられた $\varphi\in\mathscr{A}_1$ の値域が ϕ の値域に一致するか？’も決定不能であろうと予想している [K-H]．従って，任意の $\varphi\in\mathscr{A}_1$ の値域を2の巾の全体と比較する一定の手続きを考えるような方法では成功しないであろう，と云う予想をも述べている．この予想は Hirose の予想を証明することのむづかしさを示唆するものではあるが，Hirose の予想を疑う根拠とはなり得ないことは云うまでもない．帰納可算集合で $\mathscr{A}_1$ の函数の値域とならないものの存在を予想することは極めて自然なことと思われる．

つぎに $\mathscr{A}$ の函数を枚挙する原始帰納函数をつくる．

$$\gamma(c,a,b)=\begin{cases}a', & \mathrm{rm}(c,6)=0\ \text{のとき；}\\ a+b, & \mathrm{rm}(c,6)=1\ \text{のとき；}\\ a\dot{-}b, & \mathrm{rm}(c,6)=2\ \text{のとき；}\\ ab, & \mathrm{rm}(c,6)=3\ \text{のとき；}\\ [a/b], & \mathrm{rm}(c,6)=4\ \text{のとき；}\\ [\sqrt{a}], & \mathrm{rm}(c,6)=5\ \text{のとき；}\end{cases}$$

と定義すると定理4によって $\gamma\in\mathscr{A}_3$, ゆえに γ は原始帰納的である．原始帰納函数 $\tau_1, \tau, \chi_1, \chi_2, \xi, \eta, \varphi_n$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ をそれぞれ次のように定義する．

$$\begin{cases}\tau_1(0, b)=b,\\ \tau_1(a', b)=L(\tau_1(a, b)),\end{cases}$$
$$\tau(a, b)=K(\tau_1(a, b)),$$
$$\chi_1(a, b)=\tau(a \dot{-} K([a'/6]), b),$$
$$\chi_2(a, b)=\tau(a \dot{-} L([a'/6]), b),$$
$$\xi(a, b)=J(\gamma(a', \chi_1(a, b), \chi_2(a, b)), b),$$
$$\begin{cases}\eta(0, b)=J(b, 0),\\ \eta(a', b)=\xi(a, \eta(a, b)),\end{cases}$$
$$\varphi_1(c, a)=K(\eta(c, a)),$$
$$\varphi_{n+1}(c, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1})=\varphi_n(c, a_1, \ldots, a_{n-1}, J(a_n, a_{n+1}))$$
$$(n=1, 2, 3, \ldots).$$

定義から明らかに $\varphi_1(0, a)=a$ が成り立つ．$d\leq c$ のとき，$\tau_1(c\dot{-}d, \eta(c, a))=\eta(d, a)$, 故に $\tau(c\dot{-}d, \eta(c, a))=\varphi_1(d, a)$ である．$K([c'/6])\leq c, L([c'/6])\leq c$ であるから $\chi_1(c, \eta(c, a))=\varphi_1(K([c'/6]), a)$ および $\chi_2(c, \eta(c, a))=\varphi_1(L([c'/6]), a)$ を得る．故に

$$\varphi_1(c', a)=\gamma(c', \varphi_1(K([c'/6]), a), \varphi_1(L([c'/6]), a))$$

を得る．従って，$c=6J(k, l)+i, 0\leq i<6$ とすれば

$$\varphi_1(c, a)=\begin{cases}a, & i=k=l=0 \text{ のとき；}\\ \gamma(i, \varphi_1(k, a), \varphi_1(l, a)), & i<6\wedge(i>0\vee k>0\vee l>0)\\ & \text{のとき；}\end{cases}$$

が成り立つ．函数族 $\mathscr{A}_1$ は φ_1 によって枚挙される．すなわち，

定理 6. $\varphi\in\mathscr{A}_1$ のための必要十分条件は $\exists c\forall x(\varphi(x)=\varphi_1(c, x))$ が成り立つことである．

証明．十分なることは明らかであるから必要性のみ証明する．すなわち任意の $\varphi\in\mathscr{A}_1$ に対して

$$\forall x(\varphi(x)=\varphi_1(c, x))$$

なる c が存在することを，φ の構成についての帰納法によって示す．

$\varphi(a)=a$ のときは $c=0$ とすれば上式は成り立つ．また，

$$\varphi_1(2,a)=\varphi_1(6J(0,0)+2,a)=\gamma(2,a,a)=a\dot{-}a=0$$

であるから，$\varphi(a)=0$ に対しては $c=2$ とすればよい．φ が $\varphi_1,\varphi_2\in\mathscr{A}_1$ から $S,+,\dot{-},\times,[\,/\,],[\sqrt{\ }]$ のいづれかによって作られているとき，

$$\varphi_1(a)=\varphi_1(k,a),\quad \varphi_2(a)=\varphi_1(l,a)$$

なる k,l の存在を帰納法の仮定とする．ある $i<6$ について φ は $\varphi(a)=\gamma(i,\psi_1(a),\psi_2(a))$ と表わすことができるから，

$$\varphi(a)=\varphi_1(6J(k,l)+i,a)$$

が成り立つ．

定理 7. φ_n は $\mathscr{A}_n$ を枚挙する．すなわち，$\varphi\in\mathscr{A}_n$ のための必要十分条件は

$$\exists c\,\forall x_1\ldots\forall x_n(\varphi(x_1,\ldots,x_n)=\varphi_n(c,x_1,\ldots,x_n))$$

が成り立つことである．

証明．$J_1(a)=a,J_{n+1}(a_1,a_2,\ldots,a_n)=J(a_1,J_n(a_2,\ldots,a_n))$ によって J_n $(n=1,2,3,\ldots)$ を定義すると J_n は N^n から N への全単射であり，

$$\varphi_n(c,a_1,\ldots,a_n)=\varphi_1(c,J_n(a_1,\ldots,a_n))$$

が成り立つ．$\varphi\in\mathscr{A}_n$ のためには

$$\psi(J_n(a_1,\ldots,a_n))=\varphi(a_1,\ldots,a_n)$$

なる $\psi\in\mathscr{A}_1$ の存在することが必要十分であるから，定理は成立する．

述語族 $\mathscr{A}$ についての次のような枚挙定理が定理 7 から直ちに得られる．

定理 8. n 変数の述語 P が $\mathscr{A}$ に属するための必要十分条件は

$$\forall x_1\ldots\forall x_n(P(x_1,\ldots,x_n)\equiv\varphi_n(c,x_1,\ldots,x_n)=0)$$

なる c が存在することである．

さて，$n=1,2,3,\ldots$ について帰納可算述語 D_n を

$$D_n(c,a_1,\ldots,a_n)\equiv\exists x(\varphi_{n+1}(c,a_1,\ldots,a_n,x)=0)$$

と定義すると D_n によってディオファントス述語が枚挙される．すな

わち,

定理 9. n 変数の述語 P がディオファントス的であるための必要十分条件は

$$\forall x_1 \ldots \forall x_n (P(x_1, \ldots, x_n) \equiv D_n(c, x_1 \ldots, x_n))$$

なる c が存在することである.

証明. 定理 3 と定理 8 から明らかである.

述語 D_1 の degree $\boldsymbol{d}_1$ を考えると, 定理 7 の証明の終りに述べたことと定理 3, 定理 9 から, $\boldsymbol{d}_1$ はディオファントス述語の degree 全体の上界となっている. もし D_1 がディオファントス述語であればそれはディオファントス述語のうちで最大の degree をもつものであるが, そのようなものの存在は Hirose の第 3 予想に反する. ゆえに, 第 3 予想が正しければ D_1 はディオファントス述語ではない. D_1 がディオファントス的でなければ明らかに第 1 予想が成立する. また $\boldsymbol{d}_1 < \boldsymbol{0}'$ ならば第 2 予想が成立する. 各 n について D_n が $\mathscr{A}$ の述語でないことは次のようにして証明される. すなわち, ある D_n が $\mathscr{A}$ に属するとすれば定理 9 によって n 変数のすべてのディオファントス述語が $\mathscr{A}$ に属する. 然るにその否定がディオファントス的でないような n 変数ディオファントス述語が存在し, そのような述語は $\mathscr{A}$ に属し得ない. ここで $\mathscr{A}$ の述語についての枚挙述語すなわち $\forall x(P(x) \equiv Q(c, x))$ なる c の存在が $P \in \mathscr{A}$ の必要十分条件となるような Q を考える. そのような Q が $\mathscr{A}$ に属さないことは対角線論法により明らかである. 枚挙述語 Q を原始帰納述語とすることは定理 8 により可能である. Q をディオファントス述語とすることの可能性については次のことが成り立つ. すなわち Hirose の第 2 予想が正しければ $\mathscr{A}$ の述語のディオファントス的枚挙述語は得られず, また $\mathscr{A}$ の述語のディオファントス的枚挙述語が存在しなければ第 1 予想が正しい.

つぎに, ディオファントス述語についての定理 9 とは異なる形の枚挙定理を考える. Kleene の枚挙定理 [K] により, 1 変数の述語 P が帰納可算であるためには $\forall x(P(x) \equiv \exists y T_1(e, x, y))$ なる e の存在が必要十分であるが, この e のうごく範囲をある集合に制限してディオ

ファントス述語のみを得るようにするのである．すなわち，

定理 10. つぎの性質をもつ帰納可算集合Bが存在する：1変数の述語Pがディオファントス的であるための必要十分条件は

$$\forall x(P(x)\equiv \exists y T_1(e,x,y))$$

なる $e\in B$ が存在することである．2変数以上の場合についても同様.

証明. D_1 は帰納可算であるから

$$D_1(c,a)\equiv \exists y T_2(f,c,a,y)$$

なるfをとる．[K] §65 の原始帰納函数 S_1^1 を考えると $\{S_1^1(f,c)\}(a)\simeq\{f\}(c,a)$ が成り立つから両辺の部分帰納函数の定義域を比較して

$$\exists y T_1(S_1^1(f,c),a,y)\equiv \exists y T_2(f,c,a,y)$$

を得る．$\lambda x(S_1^1(f,x))$ の値域をBとおく．Bは帰納可算集合である．P をディオファントス述語とすると $P(a)\equiv D_1(c,a)$ なる c があり，$e=S_1^1(f,c)$ とおけば $e\in B$ であって

$$P(a)\equiv \exists y T_1(e,a,y)$$

が成り立つ．逆に，この式が成り立つような$e\in B$があれば$e=S_1^1(f,c)$なるcがあるから $P(a)\equiv D_1(c,a)$ であり，定理9によってPはディオファントス述語である．なお，定理 10 は $\lambda x\exists y T_1(e,x,y)$ がディオファントス述語となるようなeの全体が帰納可算集合になることを意味するものではない．

定理 11. n 変数の述語Rが帰納可算であるための必要十分条件は

$$\forall x_1\dots\forall x_n(R(x_1,\dots,x_n)\equiv \exists y\forall z(z\leq y\rightarrow P(x_1,\dots,x_n,y,z)))$$

なる $P\in\mathscr{A}$ が存在することである．

証明. 2変数以上の場合も証明は同様であるから1変数の場合のみを示す．R を帰納可算述語とすると Davis の定理によって

$$R(a)\equiv \exists x\forall y(y\leq x\rightarrow D(a,x,y))$$

なるディオファントス述語Dがある [D]．定理3によって

$$D(a,b,c)\equiv \exists z Q(a,b,c,z)$$

なる $\mathscr{A}$ の述語Qがある．Gödel のベータ函数をもちいて，

$$\forall y(y \leq b \rightarrow \exists z Q(a, b, y, z)) \equiv$$
$$\exists u \exists v \forall y(y \leq b \rightarrow Q(a, b, y, \beta(u, v, y)))$$

を得る．従って

$$R(a) \equiv \exists z \exists u \exists v \forall y(y \leq z \rightarrow Q(a, z, y, \beta(u, v, y)))$$

が成り立つから，$P(a, b, c) \equiv c \leq K(b) \wedge Q(a, K(b), c, \beta(K(L(b)), L(L(b)), c))$ とおけば $P \in \mathscr{A}$ であって

$$R(a) \equiv \exists x \forall y(y \leq x \rightarrow P(a, x, y))$$

が成り立つ．逆に，$P \in \mathscr{A}$ とすると P は帰納的であるから $\forall y(y \leq b \rightarrow P(a, b, y))$ も帰納述語であり，ゆえに $\exists x \forall y(y \leq x \rightarrow P(a, x, y))$ は帰納可算述語である．

素数の全体，2の巾の全体などの原始帰納的集合は，その補集合がディオファントス的であることが容易に証明されるのに反して，その集合自身がディオファントス的であるか否かは未解決の興味ある問題である．定理4から，これらの集合はディオファントス的でないと予想するのが自然であると思われる．この予想は Hirose の第1予想を含む．然しこの予想が正しいとしてもその証明は容易でないと考えられる．$\mathscr{A}$ の函数の増加の速さに関しては，$\varphi \in \mathscr{A}_1$ に対して

$$\forall z \exists y \forall x(x \geq y \rightarrow z\varphi(x) < z' x^n)$$

なる n の存在することが φ の構成についての帰納法によって得られるので，任意の $\varphi \in \mathscr{A}_1$ に対してある n が対応して $\varphi(x) = O(x^n)$ となる．当然，$\mathscr{A}$ の函数は 2^x などよりもゆるやかに増加するのであるが，このことから直ちには2の巾の全体を値域とする $\mathscr{A}$ の函数が存在しないことは導かれないのである．例えば Grzegorczyk の函数族 $\mathscr{E}^1$ は任意の $\varphi \in \mathscr{E}^1$ に対して $\exists c \forall x(\varphi(x) \leq x + c)$ であるにも拘らず，すべての帰納可算集合がある $\varphi \in \mathscr{E}^1$ の値域となっている．

Hirose の予想を証明する試みは困難な問題であるが，函数族 $\mathscr{A}$ を考えることによってディオファントス述語と云うものがいささかでも扱いやすくなるであろうと思う．

（1970 年 1 月 15 日）

文　献

[D] M. Davis: Computability and Unsolvability. New York, 1958.

[G] A. Grzegorczyk: Some Classes of Recursive Functions. Rozprawy Matematyczne IV. Warszawa, 1953.

[H] K. Hirose: A Conjecture on Hilbert's 10 th Problem. Comm. Math. Univ. St. Pauli **17** (1962), 31—34.

[K] S. C. Kleene: Introduction to Metamathematics. Amsterdam, Groningen, Toronto and New York, 1952.

[K-H] 倉田令二朗，平井孝治：1つの予想——Putnam-永島の理論に関して——（予刷）

[P] R. Péter: Rekursive Funktionen. Budapest, 1951.

（昭和 45 年 1 月 16 日　受理）