ディオファントス的述語について

永　島　　孝

一般帰納的でない Diophantos 的述語が存在するか，と云う未解決の問題に関連して最近提出された Hirose の予想 [5] について考えるのがこの論文の目的である．自然数の Diophantos 的述語の中に一般帰納的でないものが存在する——それは Hilbert の第 10 問題の否定的解決を意味する——であろう，と云うことは以前から予想されていて，それを証明しようとする試みがいろいろあった．それがいずれも不成功に終ったことの原因について，Hirose はそのような試みが常に‘全ての Σ_1^0-述語は Diophantos 的である’ことの証明を目標としていたと云う共通点を指摘し，Diophantos 的でない Σ_1^0-述語が存在するであろうと云う予想を述べている．かつては，Σ_1^0 を含むことを示すのが決定問題を否定的に解くための殆ど唯一の方法であったと思われる．然し，自然数の函数族・述語族の構造を算術的階層よりも精細に調べる degree (決定不可能度，非可解度) の理論 ([4] 参照) が発展し，とくに Friedberg と Мучник によって Post の問題が否定的に解決されてしまった現在においては，前述のような方針が必ずしも適切ではないと考えるのは尤もなことであろう．‘一般帰納的でない Diophantos 的述語の存在’は必ずしも‘全ての Σ_1^0-述語が Diophantos 的であること’と同値ではない．Hirose は，前者は肯定的，後者は否定的であると予想して，前者の証明のために後者を証明しようと試みる従来の方針を批判し，後者によらずに前者を示す新しい方針を提唱している．Hirose の予想はつぎのように三つに分けて述べることができる[1]．

（1） Diophantos 的でない Σ_1^0-述語が存在する．

（2） Degree $\mathbf{0}'$ の Diophantos 的述語は存在しない．

（3） 任意の Diophantos 的述語 D_0 に対して，D_0 で一般帰納的で

ない Diophantos 的述語 D_1 が存在する.

予想 (3) は一般帰納的でない Diophantos 的述語の存在および (2) を含み, (2) は (1) を含む.

Degree 全体のつくる上半束を U とし, Diophantos 的述語のもつ degree の全体から成る U の部分集合を T とする. [5] の定理 3 の証明に用いられている方法によって, T が U の部分上半束となることが証明できる. (3) は '上半束 T は最大元[2]をもたない' と云いかえられる. Hirose の目標は, 有限列の多項式表示を扱う諸函数 ([7], §4) によって帰納函数論の形式的体系を算術化する, と云う方法で (3) を示すことであろう. 然し, 予想 (1) でさえもその証明は容易でないと思われるので, ここでは (1) と同値ないくつかの命題を求めることを考える.

与えられた函数[3] g_0, g_1, h から

$$\begin{cases} f(0, a_2, \cdots, a_n) = g_0(a_2, \cdots, a_n) \\ f(a', a_2, \cdots, a_n) = g_1(a, f(a, a_2, \cdots, a_n), a_2, \cdots, a_n) \\ f(a_1, a_2, \cdots, a_n) \leq h(a_1, a_2, \cdots, a_n) \end{cases}$$

によって函数 f を得る演算 (但し $n=1$ の場合は g_0 を定数とし, g_1 と h から f を得る演算と考える) を limited primitive recursion (LPR と略す) と呼ぶ. $a_1, \cdots, a_n, b$ の述語

$$f(a_1, \cdots, a_n) = b$$

が Diophantos 的であるとき, f を Diophantos 的函数と呼ぶ. Diophantos 的函数は一般帰納的である. つぎに

$$f_0(a, b) = b',$$

$$f_1(a, b) = a + b,$$

$$f_2(a, b) = a'b',$$

および $n \geqq 2$ のとき

$$\begin{cases} f_{n+1}(0, b) = f_n(b', b') \\ f_{n+1}(a', b) = f_{n+1}(a, f_{n+1}(a, b)) \end{cases}$$

によって原始帰納函数の列 $f_0, f_1, f_2, \cdots$ をつくる. 函数 S, C_q^m, U_i^m および f_n から函数の合成と LPR とを有限回適用して得られる函数の

全体を $\mathcal{E}^n$ と記す (Grzegorczyk [3]). すべての $\mathcal{E}^n$ を合併したものは原始帰納函数の全体と一致し，$\mathcal{E}^3$ は初等函数[4]の全体と一致する.

定理 1. (1) が成立つための必要十分条件は Diophantos 的函数の全体が LPR について閉じていないことである.

証明. 十分性は明らかであるから，必要性だけを帰謬法によって示す. 函数 S, C^m_q, U^m_i, f_2 はいずれも Diophantos 的であるから，もし Diophantos 的函数の全体が LPR について閉じていれば $\mathcal{E}^2$ の函数はすべて Diophantos 的である[5]. P を任意の Σ^0_1-述語とすると [3] の定理 5.1 によって

$$P(a)\equiv(\exists x)(\exists y)(f(a,\ x,\ y)=0)$$

なる $\mathcal{E}^2$ の函数 f が存在する. f は Diophantos 的，故に述語

$$f(a,\ b,\ c)=0$$

も Diophantos 的，従って P が Diophantos 的となって (1) に反する. 故に Diophantos 的函数の全体は LPR について閉じていない.

系. (1) が成立つための必要十分条件は Diophantos 的函数の全体が原始帰納法について閉じていないことである.

定理 2. (1) が成立するための必要十分条件は Diophantos 的函数の全体が演算 Σ, Π について閉じていないことである.

証明. 十分性は明らかであるから必要性を示す. 函数 C^m_q, U^m_i, $a+b$, $a\dot{-}b$, ab, $[a/b]$ はいずれも Diophantos 的であるから，もし Diophantos 的函数の全体が Σ, Π について閉じていれば初等函数はすべて Diophantos 的となり，従ってすべての初等述語が Diophantos 的となる. P を任意の Σ^0_1-述語とすると Kalmár-Bereczki-Kleene の定理[6]によって

$$P(a)\equiv(\exists x)F(a,\ x)$$

をみたす初等述語 F が存在する. 従って P は Diophantos 的となって (1) に反する. 故に Diophantos 的函数の全体は Σ, Π について閉じていない.

更に，[5] に引用されている Davis-Putnam の結果[7]を用いれば，

つぎのことが証明できる.

定理 **3.** (1) が成立つための必要十分条件は Diophantos 的函数の全体が演算 Σ について閉じていないことである.

さて, Diophantos 的述語についてつぎのような枚挙定理が成立する.

定理 **4.** つぎのような 2 変数の Σ_1^0-述語 $F(a,b)$ が存在する: 任意の n について

$$F(a,\ n)$$

は a の Diophantos 的述語であり, 逆に 1 変数の任意の Diophantos 的述語 D に対して

$$D(a)\equiv F(a,\ d)$$

なる数 d が対応する.

証明は別に発表する予定である. 実際, 述語 F は初等述語に存在作用素を前置した形で得られるのであるが, 予想 (3) が正しい限り, F は Diophantos 的ではあり得ない.

(1968 年 11 月 5 日)

注

0) この論文は作行会の援助によって開催された数学基礎論小グループ夏季シンポジウム (1968 年 6 月 30 日より 7 月 3 日まで, 東京都八王子市の大学セミナーハウスにて) における講演の内容をまとめたものである.

1) 上記シンポジウムにおける広瀬氏の講演内容に基づく.

2) 上半束は高々 1 個の極大元をもつ. 従って最大元と極大元とは一致する.

3) 数論的函数すなわち $N\times\cdots\times N$ から N への函数. なお, 特定の函数をあらわす記号などについては [6] 参照.

4) 初等函数については [6] §57, [7], [8].

5) Diophantos 的函数の全体は合成について閉じている.

6) [6] §57 例 1 (D), [7] 定理 9, [8] 定理 10.

7) J. S. L. **23** (1958), 183-187.

文　献

[1] M. Davis: Computability and Unsolvability. New York, 1958.

[2] M. デーヴィス (渡辺　茂, 赤　摂也訳): 計算の理論. 東京, 1966. ([1] の日本語訳).

[3] A. Grzegorczyk: Some Classes of Recursive functions. Rozprawy Matematyczne IV. Warszawa, 1953.

[4] 広瀬　健: Unsolvability の degree について. 数学 **17** (1965), 72–83.

[5] K. Hirose: A Conjecture on Hilbert's 10 th Problem. Comment. Math. Univ. Sancti Pauli **17** (1962), 31–34.

[6] S. C. Kleene: Introduction to Metamathematics. Amsterdam, Groningen, Toronto and New York, 1952.

[7] 永島　孝: 自然数論における初等函数について. 一橋大学研究年報自然科学研究 **10** (1968), 21–37.

[8] T. Nagashima: On Elementary Functions of Natural Numbers. Hitotsubashi J. of Arts and Sci. **9** (1968), 50–58.