市場統合の数学的モデル

久　武　雅　夫

EEC に見られるような市場統合の経済的効果についてはすでに多くの研究がなされているが，その最初の文献は 1838 年に発刊されたクールノーの著書であろう(1)．彼は数学モデルを用いてこの問題を分析したが，この問題が数学的操作に適するのにかかわらず，その後に現われた数学的な研究は極めて少数である．筆者は昭和 37 年 9 月の一橋論叢にクールノーの方法を多少展開した研究を発表したが(2)，本論はこの論文の続篇ともいうべきものである．前の論文ではクールノーが取り扱った一商品二市場のモデルを三商品三市場に拡張し，その内の二市場が統合した場合の効果を分析した．本論文では二商品二市場のモデルを扱ったが，二つの市場の間に経済発展の程度に差があり，貿易収支が不均衡で，資本の移動が行われる場合を分析することを問題として考えたい．なお二市場に限ったのは一応第三国への影響を除外するためである．前の論文で市場統合が第三国へ及ぼす影響は大きくないことを明らかにしたので，数式の繁雑化を避けるために二市場に限定した．

(1) A. A. Cournot: Recherches sur les principes mathématiques de la théorie des richesses, Paris. 1838 中山伊知郎訳『クールノー数理経済学』昭和 24 年.

(2) 久武雅夫. 市場統合と経済均衡. 一橋論叢 48—3. 昭和 37 年 9 月.

1. 定義および記号

2 市場（以後は国とよぶ）を I, II とし，それぞれ財 A および B を生産しその一部を輸出する．I は A を輸出し，B を輸入する．各財の需要はその財の価格の減少関数であり，供給は価格の増加関数であ

る．利子率はそれぞれの国の資金需要と資本蓄積額との比の関数であるが，短期的には資本蓄積額は一定と見なされるから，資金需要の関数となる．資金需要は財の総供給価額（価格×供給量）に比例するものと考える．したがって利子率は財の総供給価額の増加関数とする．なお外国投資は2国間の利子率の差に依存するものとする．

記号	p_a, p_b	A, B の価格
	$F_1(p_a)$, $F_2(p_a)$	I および II 国における A の需要
	$F_1(p_b)$, $F_2(p_b)$	I および II 国における B の需要
	$Q_1(p_a)$, $Q_2(p_b)$	A および B の供給量
	ϵ_a, ϵ_b	A および B の運賃
	t_a, t_b	II 国における A の輸入税および I 国における B の輸入税
	I_b	II 国の輸入超過額
	y	I 国の II 国への投資増加による B の生産増加量
	i_1, i_2	I 国および II 国における利子率

2. 貿易収支が均衡するモデル

簡単のために，対外投資は貿易収支が受取になっている国のみが行なうものとする．対外投資を行なう国の方がより高度に発達している国と仮定すれば，大体同じ程度に発達している国の間の貿易収支は甚だしい不均衡を生じないものと考えてよい．このような場合の典型として，貿易収支が均衡するモデルを考える．上の記号を使用して次の式が得られる．

$$Q_1(p_a)=F_{1a}(p_a)+F_{2a}(p_a+\epsilon_a+t_a) \qquad (1)$$

$$Q_2(p_b)=F_{1b}(p_b+\epsilon_b+t_b)+F_{2b}(p_b) \qquad (2)$$

$$p_aF_{2a}(p_a+\epsilon_a+t_a)=p_bF_{1b}(p_b+\epsilon_b+t_b) \qquad (3)$$

変数は p_a, p_b, t_a, t_b であるから，t_a または t_b の何れかをパラメーターとして与えれば，他の変数の値は上の式によって決定せられる．

いま t_a をパラメーターとすれば，これを操作することにより，他

の変数に如何なる変化を与えうるかは $\frac{dp_a}{dt_a}$, $\frac{dp_b}{dt_a}$, $\frac{dt_b}{dt_a}$ を求めることによって判定できる.（1）（2）（3）を t_a について微分すれば，次の諸式が得られる.

$$(Q_1'-F_{1a}'-F_{2a}')\frac{dp_a}{dt_a}=F_{2a}' \tag{4}$$

$$(Q_2-F_{1b}'-F_{2b}')\frac{dp_b}{dt_a}-F_{1b}'\frac{dt_b}{dt_a}=0 \tag{5}$$

$$(F_{2a}+p_aF_{2a}')\frac{dp_a}{dt_a}-(F_{1b}+p_bF_{1b}')\frac{dp_b}{dt_a}-p_bF_{1b}'\frac{dt_b}{dt_a}=-p_aF_{2a}' \tag{6}$$

ただし $Q_1'=\frac{dQ_1(p_a)}{dp_a}$

$$F_{1b}'=\frac{dF_{1b}(p_b+\epsilon_b+t_b)}{d(p_b+\epsilon_b+t_b)}$$

その他の記号も同様である.

（4）（5）（6）から

$$\frac{dp_a}{dt_a}=\frac{-F_{2a}'F_{1b}'}{\Delta}\{p_b(Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}')+(F_{1b}+p_bF_{1b}')\} \tag{7}$$

$$\frac{dp_b}{dt_a}=\frac{-F_{2a}'F_{1b}'}{\Delta}\{p_a(Q_1'-F_{1a}'-F_{2a}')+(F_{2a}+p_aF_{2a}')\} \tag{8}$$

$$\frac{dt_b}{dt_a}=\frac{-p_aF_{2a}'}{\Delta}(Q_1'-F_{1a}'-F_{2a}')(Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}') \tag{9}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} Q_1'-F_{1a}'-F_{2a}' & 0 & 0 \\ 0 & Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}' & -F_1b' \\ F_{2a}+p_aF_{2a}' & -(F_{1b}+p_bF_{1b}') & -p_bF_{1b}' \end{vmatrix}$$

供給関数，需要関数の性質から $Q_1'>0$, $Q_2'>0$, $F_{1a}'<0$ $F_{2a}'<0$, $F_{1b}'<0$, $F_{2b}'<0$

また
$$\Delta=-F_{1b}'(Q_1'-F_{1a}'-F_{2a}')\{p_b(Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}')+(F_{1b}+p_bF_{1b}')\} \tag{10}$$

（7）と（10）から

$$\frac{dp_a}{dt_a}<0 \tag{11}$$

II 国において A の需要が非弾力的な場合は

$$0>\frac{p_a}{F_{2a}}\cdot\frac{dF_{2a}}{dp_a}>-1$$

$$\therefore F_{2a}+p_aF'_{2a}>0 \tag{12}$$

同様に I 国において B の需要が非弾力的な場合には

$$F_{1b}+p_bF_1'{}_b>0 \tag{13}$$

したがって $\varDelta>0$ となる.

（12）（13）を（8）に適用すれば

$$\frac{dp_b}{dt_a}<0 \tag{14}$$

また（13）が成立する場合には

$$\frac{dt_b}{dt_a}>0 \tag{15}$$

以上の結論をまとめれば次のようになる.

（1） 一般に II 国が A 財の関税を引き下げれば，I 国における A 財の価格は騰貴する．A の生産量は増加する.

（2） II 国における B 財の価格はもし何れの国においても輸入財の需要が非弾力的である（価格が下落する割合には輸入量が増さない）ならば，A 財の関税の引下げの結果騰貴する．したがって B の生産量も増加する．この前提が成りたたない場合は必らずしも B の価格が騰貴するとはいえない.

（3） I 国において B の需要が非弾力的であるならば，II 国が輸入税を引き下げれば，I 国も輸入税を引き下げる．しかし，この前提が成り立たなければ，I 国が輸入税を引き下げるとは限らない.

3. 貿易収支が不均衡であるモデル

I 国は II 国よりも高度に開発された国であると仮定する．この場

合は通常I国はII国に対し輸出超過となり，その差額を直ちに決済することは一般に困難であるから，II国に対する投資が行なわれる．もっとも実際にはこの受取超過が全部投資に振り向けられるとは限らず，一部は流動資金の形で保有せられるのが通例である．ここでは簡単のため，流動資金も投資の中に含ませる．投資の結果としてII国のBの生産量が増加する，この場合の数学モデルは次の通りである．

$$Q_1(p_a)=F_{1a}(p_a)+F_{2a}(p_a+\epsilon_a+t_a) \qquad (16)$$

$$Q_2(p_b)+y=F_{1b}(p_b+\epsilon_b+t_b)+F_{2b}(p_b) \qquad (17)$$

$$p_aF_{2a}(p_a+\epsilon_a+t_a)=p_bF_{1b}(p_b+\epsilon_b+t_b)+I_b \qquad (18)$$

$$y=f(I_b) \qquad (19)$$

(19) 式は投資による生産増加を表わす．なおこの場合，投資はII国およびI国における利子率にも影響されるから，次の諸式が得られる．

$$i_1=\phi_1(p_aQ_1) \qquad (20)$$

$$i_2=\phi_2(p_bQ_2) \qquad (21)$$

$$I_b=\phi(i_2-i_1) \qquad (22)$$

(16) ～ (22) の7式から t_a を与えた場合の変数値 p_a, p_b, t_b, I_b, y, i_1, i_2 を決定することができる．

前と同様にこれらの諸式を t_a について微分することにより，t_a の変化に対する各変数値の反応を調べることができる．ただし7個の式を一度に解くことは計算が困難であるから，便宜上 (16) ～ (19) の4式と (20) ～ (22) の3式の二つのグループに分けて計算し，それぞれの結果についての判断が相互に矛盾しない場合はこれを二つのグループに共通な結論と考える．

さらにこの場合にもう一つの操作を行なう．式の形かう見て第一グループの4式は，$\frac{dp_a}{dt_a}$, $\frac{dp_b}{dt_a}$, $\frac{dt_b}{dt_a}$, $\frac{dy}{dt_a}$, $\frac{dI_a}{dt_a}$ の5変数を含むことになるから，この内の一つを与えなければ，各変数の値が決定しない．そこで各変数を $\frac{dt_b}{dt_a}$ について解くことにすれば

$$(Q_1'-F_{1a}'-F_{2a}')\frac{dp_a}{dt_a}=F_{2a}' \qquad (23)$$

$$(Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}')\frac{dp_b}{dt_a}+\frac{dy}{dt_a}=F_{1b}'\frac{dt_b}{dt_a} \tag{24}$$

$$(F_{2a}+p_aF_{2a}')\frac{dp_a}{dt_a}-(F_{1b}+p_bF_{1b}')\frac{dp_b}{dt_a}-\frac{dI_b}{dt_a}$$

$$=-p_aF_{2a}'+p_bF_{1b}'\frac{dt_b}{dt_a} \tag{25}$$

$$f'\frac{dI_a}{dt_a}-\frac{dy}{dt_a}=0 \tag{26}$$

これを解いて次の結果を得る.

$$\frac{dp_a}{dt_a}=\frac{F_{2a}'}{\Delta}\{(Q_1'-F_{1b}'-F_{2b}')-f'(F_{1b}+p_bF_{1b}')\} \tag{27}$$

$$\frac{dp_b}{dt_a}=\frac{1}{\Delta}\Big[(Q_1'-F_{1b}'-F_{:b}')\Big\{F_{1b}'\frac{pt_b}{dt_a}+f'\Big(-p_aF_{2a}'$$

$$+p_bF_{1b}'\frac{dt_b}{dt_a}\Big)\Big\}-f'F_{2a}'(F_{2a}+p_aF_{2a}')\Big] \tag{28}$$

$$\frac{dI_b}{dt_a}=\frac{-1}{\Delta}\Big[(O_1'-F_{1a}'-F_{2a}')\Big\{(Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}')$$

$$\Big(-p_aF_{2a}'+p_bF_{1b}'\frac{dt_b}{dt_a}\Big)+(F_{1b}+p_bF_{1b}')F_{1b}'\frac{dt_b}{dt_a}\Big\}$$

$$-(F_{2a}+p_aF_{2a}')(Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}')F_{2a}'\Big] \tag{29}$$

$$\frac{dy}{dt_a}=\frac{-f'}{\Delta}\Big[(Q_1'-F_{1a}'-F_{2a}')\Big\{(Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}')$$

$$\Big(-p_aF_{2a}'+p_bF_{1b}'\frac{dt_b}{dt_a}\Big)+(F_{1b}+p_bF_{1b}')F_{1b}'\frac{dt_b}{dt_a}\Big\}$$

$$-(F_{2a}+p_aF_{2a}')(Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}')F_2{}'_a\Big] \tag{30}$$

ここに

$$\Delta=\begin{vmatrix} Q_1'-F_{1a}'-F_{2a}' & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}' & 0 & 1 \\ F_{2a}+p_aF_{2a}' & -(F_{1b}+p_bF_{1b}') & -1 & 0 \\ 0 & 0 & f' & -1 \end{vmatrix}$$

$$=(Q_1'-F_{1a}-F_{2a}')\{(Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}')-(F_{1b}+p_bF_{1b}')f'\} \tag{31}$$

$f'>0$ と考えてよい．また I 国は II 国より高度に開発した国であるから，II 国からの輸入品に対しては平均的に弾力的と考えてよい．したがって $F_{1b}+p_bF_{1b}'<0$ である．そこで（31）により

$$\Delta>0 \tag{32}$$

$\frac{dt_b}{dt_a}$については，I 国における B の需要が弾力的であるとすればこれが正であるという保証はないというのが，均衡モデルの結論であった．不均衡モデルでは II 国の関税引上げまたは引下げに対抗して I 国が関税を操作する必要は幾分緩和されるとも考えられるし，反対に対外投資という要因が加わることにより，関税の反応はかえって強くなるとも考えられる．そこで$\frac{dt_b}{dt_a}$については正負あるいは 0 に等しい場合などいろいろの場合が考えられる．

II 国における A 財の需要は非弾力的と見なされているから $F_{2a}+p_aF_{2a}'>0$，また I 国における B 財の需要は弾力的であるから $F_{1b}+p_bF_{1b}'<0$，したがって（27）により

$$\frac{dp_a}{dt_a}<0 \tag{33}$$

（28）においては$\frac{dt_b}{dt_a}=0$ または$\frac{dt_b}{dt_a}<0$ の場合には$\frac{dp_b}{dt_a}>0$ となるが，$\frac{dt_b}{dt_a}>0$ の場合にはこれが負となる可能性もある．次に述べる市場統合のモデルにおいては，同じ前提の下で，この場合 p_b は低下する（関税引下げの場合には上昇する）ということが証明せられるから，この場合には一般には

$$\frac{dp_b}{dt_a}<0 \tag{34}$$

と考えるべきであろう．

（29）においてもし$\frac{dt_b}{dt_a}=0$ とすれば

$$\frac{dI_b}{dt_a}<0 \tag{35}$$

となる．$\dfrac{dt_b}{dt_a}$が正負何れの場合でも（29）は正負何れの値をもとり得るが，負となる見込は大である．$\dfrac{dy}{dt_a}$は$\dfrac{dI_b}{dt_a}$と同じ符号をもつ．

次に（20）（21）（22）について$\dfrac{di_1}{dt_a}$，$\dfrac{di_2}{dt_a}$，$\dfrac{dI_b}{dt_a}$を求める．

$$\frac{di_1}{dt_a}=\phi_1'(Q_1+p_aQ_1')\frac{dp_a}{dt_a} \tag{36}$$

$$\frac{di_2}{dt_a}=\phi_2'(Q_2+p_bQ_2')\frac{dp_b}{dt_a} \tag{37}$$

$$\frac{dI_b}{dt_a}=\psi'\left(\frac{di_2}{dt_a}-\frac{di_1}{dt_a}\right) \tag{38}$$

$\phi_1>0$, $\phi_2'>0$ であるから，（33），（34）を（36），（37）に適用すれば

$$\frac{di_1}{dt_a}<0 \qquad \frac{di_2}{dt_a}<0 \tag{39}$$

また $\psi'>0$ であるから（35）を（38）に適用すれば

$$\frac{di_2}{dt_a}-\frac{di_1}{dt_a}<0 \tag{39}$$

以上の結果をまとめると次のようになる．

（1）　低開発国が高度開発国に対して関税を引き下げれば，輸入財の価格も輸出財の価格も大体において上昇する．

（2）　低開発国の入超額は増加し，それに伴い低開発国への投資が増大する．

（3）　利子率は何れの国においても上昇し，利子率の隔差は拡大する．

4.　市場統合の効果

まず貿易収支が均衡するモデルにおいて，2 国がお互いに輸入税を撤廃して市場を統合し，貿易の均衡を維持しようとする場合には（1）（2）（3）において $t_a=0$, $t_b=0$ とおかなければならない．これは 3 個の方程式により 2 個の変数 p_a, p_b を決定する問題となり，一般的には不可能な問題となる．すなわち，市場を統合して貿易均衡を維

持することは特別な場合を除いては出来ない相談である．いいかえれば，市場の統合は資本の移動を自由ならしめるという条件の下においてのみ可能である．

次に貿易の不均衡と対外投資が存在する場合に市場を統合した場合，どのような結果が生ずるを吟味しよう．前と同様に I を II よりも開発された国とする．統合後の変数値を $\bar{p}_a$, $\bar{p}_b$, $\bar{I}_b$, $\bar{y}$ とし，統合前の変数値との差を次のように定める．

$$\left.\begin{aligned}\bar{p}_a&=p_a-u\\ \bar{p}_b&=p_b-v\\ \bar{I}_b&=I_b-w\\ \bar{y}&=y-\delta\end{aligned}\right\}\qquad (40$$

統合後の均衡式は次の通りである．

$$Q_1(\bar{p}_a)=F_{1a}(\bar{p}_a)+F_{2a}(\bar{p}_a+\epsilon_a)\qquad(41)$$

$$Q_2(\bar{p}_b)+\bar{y}=F_{1b}(\bar{p}_b+\epsilon_b)+F_{2b}(\bar{p}_b)\qquad(42)$$

$$\bar{p}_aF_{2a}(\bar{p}_a+\epsilon_a)=\bar{p}_bF_{1b}(\bar{p}_b+\epsilon_b)+\bar{I}_b\qquad(43)$$

$$\bar{y}=f(\bar{I}_b)\qquad(44)$$

(41) ～ (44) の 4 式から $\bar{p}_a$, $\bar{p}_b$, $\bar{y}$, $\bar{I}_b$ を決定することができる．

(41) ～ (44) に (40) を代入して

$$Q_1(p_a-u)=F_{1a}(p_a-u)+F_{2a}(p_a-u+\epsilon_a)\qquad(41)'$$

$$O_2(p_b-v)=F_{1b}(p_b-v+\epsilon_b)+F_{2b}(p_b-v)\qquad(42)'$$

$$(p_a-u)F_{2a}(p_a-u+\epsilon_a)=(p_b-v)F_{1b}(p_b-v+\epsilon_b)+I_b-w\qquad(43)'$$

$$y-\delta=f(I_b-w)\qquad(44)'$$

(41)′～ (44)′ にテーラーの展開をほどこし，u, v, w, δ の 2 次以上を含む項を省略し，統合前の方程式 (16) ～ (19) を展開して t_a, t_b などの高次項を省略した式との差を求めれば

$$(16)-(41)'\quad u(Q_1'-F_{1a}'-F_{2a}')=t_aF_{2a}'\qquad(45)$$

$$(17)-(42)'\quad v(Q_2'-F_{1b}'-F_{2b}'=t_bF_{1b}'\qquad(46)$$

$$(18)-(43)'\quad u(p_aF_{2a}'+F_{2a})+p_at_aF_{2a}'=v(p_bF_{1b}'+F_{1b})+p_bt_bF_{1b}'+w\qquad(47)$$

(19)−(44)′　$\delta=wf'(I_b)$　(48)

(45) (46) から　$u<0$　$v<0$　(49)

すなわち関税を撤廃することによって p_a, p_b は増加する．輸入市場においては価格はそれぞれ t_a+u, および t_b+v だけ低下することになるが，これが正であるが負であるかは次のようにして判定できる．

(45) から　$u(Q_1'-F_{1a}')=(u+t_a)F_{2a}'$

(46) から　$v(Q_2'-F_{1b}')=(v+t_b)F_{1b}'$

これらの2式から容易に

$u+t_a>0$　$v+t_b>0$　(50)

次に(48)により δ と w とは同符号である．$p_aF_{2a}'+F_{2a}<0$, $p_bF_1{}'_b+F_{1b}<0$ により，(47) の左辺は負，右辺の第1項は正，第2項は負であるから w は正負何れの値もとり得るが，負である見込は大である．

次に市場統合の利子率への影響を考える．

$\bar{i}_1=i_1-\rho_1$

$\bar{i}_2=i_2-\rho_2$

とおいて，(20) (21) に代入する．この場合新変数 $\bar{i}_1$, $\bar{i}_2$ に対して式が3個となり過剰決定となる．したがってこの場合には (22) が不要となり，投資は利子隔差の如何に拘らず行なわれると考えるか，または (22) を生かして，(19) を削除するかの何れかをとらなければならない．いま (22) を捨てることにして (20) (21) を展開した式と (20) (21) との差を求めれば

$\rho_1=u(Q_1+p_aQ_1')\phi_1'$　(51)

$\rho_2=v(Q_2+p_bQ_2')\phi_2'$　(52)

(51) (52) から　$\rho_1<0$, $\rho_2<0$　(53)

以上の結果を要約あれば次のようになる．

(1) 市場統合の結果として，価格は輸出国においては上昇する．
この上昇は関税より小であるから輸入国では価格は下落する．

(2) 貿易差額は拡大する見込が大である．

(3) 利子率は何れの市場においても上昇する．

5. 関税引下げモデルと市場統合モデルの比較

関税を存置しながら次第に引き下げてゆくモデルと関税を全く撤廃して単一市場を形成するモデルとを比較すると次のことが分る.

（1） 一般に統合モデルにおいて関税のあるモデルと同一の均衡条件を課することは不可能である. たとえば統合モデルにおいては, 貿易収支均衡の条件を課することは不可能であり, また不均衡を認める場合も, 利子率隔差と投資とを関係づけることか, あるいは貿易収支差額と投資との関係を確定することの何れかは成立しなくなる.

（2） $\frac{dt_b}{dt_a}>0$ の場合には関税を引き下げていった極限の状態は統合モデルに接近した状態であり, したがって統合モデルと関税のあるモデルとを比較することにより, 関税引下げの効果を判断することができる. しかもこの方法は直接に関税引下げの効果を計算する方法より簡単であり, 後の方法では達し得ない結論を見出し得る場合がある. たとえば, 関税引下げにより輸入国における輸入品の価格が下落することは, 統合モデルによって容易に見出すことができる.

（3） 関税引下げモデルの方がより一般的であり, 統合モデルはその特殊のケースとなる. したがってこれらのモデルの比較によって, 市場統合の問題点を見出すことができる. たとえば$\frac{dt_b}{dt_a}<0$ の場合に二つモデルの結論に矛盾が生ずるとすれば, この矛盾は統合された市場においてどのように処理されるかが問題となり得る.