Title	「ブール代数での方程式」
Author(s)	山田，欽一
Citation	一橋大学研究年報．自然科学研究，6: 13-40
Issue Date	1964-03-31
Type	Departmental Bulletin Paper
Text Version	publisher
URL	http://doi.org/10.15057/9490
Right	

「ブール代数での方程式」

山　田　欽　一

The subjects of this paper are the establishment of a necessary and sufficient solvability condition for equation in Boolean algebra, the construction of a complete representation of the set of roots and the determination of its cardinal number.

1. 問題と記号

筆者は，ずっと前に，ブール代数での方程式の理論を考察し(1)その実用問題への応用を試みた(2)．すなわち与えられたブール代数での方程式が可解である——このブール代数の元で満たされる——ための必要十分条件を明らかにし，この条件が満されているときの根の一般式を作った．また，この結果を使って，「与えられた一群の命題と同値で，より簡潔な一群の命題を定める」条件整理の問題，「与えられたものの間に成立つ与えられたいくつかの関係から，指定されたいくつかのものだけの間に成立つ関係を明らかにする」関係抽出の問題，また「与えられたいくつかのものと指定された関係に立つようないくつかのものを組み立てる」集団構成の問題を，かなり一般的に処置した．

しかし，これで筆者自身の設けた問題に全部答えたわけでもないし，応用も決して本当に一般的ではなかった．

たとえば，理論的には，無限の場合も含めて，方程式の根の数を決

定するという基本的な問題が残っている．また，根の一般式には任意定項が入って来るが，その過不足のない範囲を明らかにするという技術的な問題も残っている．

なお，応用面では，特称命題の混ざる場合が全く扱ってない．それはブール代数での等式だけを考察して来たことと，等式は大変不完全にしか特称命題を表わさないものであることによる．

特称命題を等式として処理する一つの道具として，擬項という考えを導入してみた(3)．これは，特称命題の混じった関係抽出の問題には役立ったが，他の二つの応用問題には無力のようである．

とにかく，ブール代数では不等式の考察がまだ不十分である．そこで，不等式そのものの理論を整理してみたところ，方程式について残っていた上の二つの問題が解決した．

本稿はブール代数での多元方程式について，今までに明らかになった事項を総合整理することを一応の目標とする．

多元不等式の一般的考察は多元方程式の他の多くの話題につながって(4)はいるがまだ十分整理できていないので後日に譲りたい．応用問題は三つとも実用度が高いし，関係抽出の技術は吉田耕造氏（杉田元宜教授研究室）によってスイッチ回路化され，4 元の機械――シロジスター YY 1 ――も出来ているので(5)，大切な項目であるが，特称命題の混ざった応用問題を処理する理論が整理できてからにしたい．

ブール代数は命題算．集合算，電気回路など多くの解釈をもつ．それらの解釈を離れて本稿では，ブール代数の三つの演算を＋，・(これは省くことが多い）と ′ で表わすことにする．

なお本稿では一つのブール代数を同時にまた環として，これら両代数系の演算を共用する．そこで環の加法である対称減法は＊で表わすことにする．また環の＊にだけ着目して，アーベル群とみることもする．

なお，もう一つ記号を用意する．

集合 M をもととし，命題 $P_1,\cdots\cdots, P_m$，一値函数 $F(x_1,\cdots\cdots, x_n)$ によって定義される集合

$$L=\{F(x_1,\cdots\cdots,\ x_n)|x_1\in M,\cdots\cdots,\ x_n\in M;\ P_1(x_1,\cdots\cdots,\ x_n),\ \cdots\cdots,\ P_m(x_1,\cdots,\ x_n)\}$$

で，F が次の条件を満たすとき，この表示を L の完全表示ということにする．完全表示であることを明示するには〔　〕を使う

条件：$y_1\in M,\cdots\cdots,\ y_n\in M$　$(x_1,\cdots\cdots,\ x_n)\neq(y_1,\cdots\cdots,\ y_m)$ ならば，$F(x_1,\cdots\cdots,\ x_n)\neq F(y_1,\cdots\cdots y_n)$ である．

また，定理は有限ブール代数 $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ を元とする集合の巾集合 T で例示することにする．T の元は次の通り命名する．

$0=\{\ \}$	$1=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta\}$
$a=\{\alpha\}$	$a'=\{\beta,\ \gamma,\ \delta\}$
$b=\{\beta\}$	$b'=\{\alpha,\ \gamma,\ \delta\}$
$c=\{\gamma\}$	$c'=\{\alpha,\ \beta,\ \delta\}$
$d=\{\delta\}$	$d'=\{\alpha,\ \beta,\ \gamma\}$
$e=\{\alpha,\ \beta\}$	$e'=\{\gamma,\ \delta\}$
$f=\{\alpha,\ \gamma\}$	$f'=\{\beta,\ \delta\}$
$g=\{\alpha,\ \delta\}$	$g'=\{\beta,\ \gamma\}$

2. 基本事項

集合 B の元について，反射性，対称性，移行性をもつ相等関係＝と次の諸性質をもつ二つの一意演算・と＋が定義されているとする．

閉　　性

$a,\ b\in B$ ならば

A.　$ab\in B$　　　A_+　　　$a+b\in B$

可　換　性

C.　$ab=ba$　　　C_+　　　$a+b=b+a$

なお，$c\in B$ ならば

分　配　性

D.　$a(b+c)=ab+ac$　　　D_+.　$a+bc=(a+b)(a+c)$

吸　収　性

B.　$a(a+b)=a$　　　B_+　　　$a+ab=a$

恒等元の存在

すべての a に対して

E. $a1=a$　　　　　E_+ $a+0=a$

となる B の元1がある.　となる B の元0がある.

補元の存在

$N._+$ どの a についても

$aa'=0$　　　　　$a+a'=1$

の両立する B の元 a' がある.

このような B と=, ・+を一括してブール代数という.

相等の三性質と演算の一意性によって, $a=b$ ならば $ac=bc$, $a+c=b+c$ となる.

演算についてのこれら6組, 11 の性質はブール代数を定義する公理系に他ならない.

この公理系が調和性をもつことは, 集合 $B=\{1, 2, 5, 10\}$ で, = を通常の相等関係, ・を最大公約数定めること, +を最小公倍数を定めることと見立てれば明らかである.

この公理系は・と+を入替え, それと同時に1と0を入替えても変らない. いわゆる一種の双対性をもつ. この性質は当然, この公理系だけから導くことのできるすべての定理に遺伝してブール代数の双対性となる.

なおこの公理系は双対性を浮き立たせたため, 独立性をもっていない. たとえば, D_+ を D., B., B_+ によって証明することができる.

従来, ブール代数の公理に入れることの多かった結合性を証明しておく(6).

〔定理 1〕 $a(bc)=(ab)c$, $a+(b+c)=(a+b)+c$

証明: B_+ によって $a=a+ac$

右辺の第1項に B. を使って $a=a(a+b)+ac$

右辺に D. を使って $a=a((a+b)+c)$

B. によって　　$a=a(a+(b+c))$

この二式から $a((a+b)+c)=a(a+(b+c))$　　　(1)

D. によって $a'((a+b)+c)=a'(a+b)+a'c$

右辺の第1項に D., C., N., C_+, E_+ を使って

$$a'((a+b)+c)=a'b+a'c \tag{2}$$

D. によって

$$a'(a+(b+c))=a'a+a'(b+c)$$

右辺の第1項に C., N., C_+, E_+ を使って

$$a'(a+(b+c))=a'(b+c)$$

右辺に D. を使って

$$a'(a+(b+c))=a'b+a'c$$

これと（2）から

$$a'((a+b)+c)=a'(a+(b+c))$$

これと（1）を加えて，両辺に C., D. を使うと

$$(a+a')((a+b)+c)=(a+a')(a+(b+c))$$

両辺の第1因数に N_+ を使い，C., E. を使うと

$$(a+b)+c=a+(b+c)$$

これと双対な

$$(ab)c=a(bc)$$

を併せて，証明が終る.（終）

多くの定理の中から，大切なものだけを整理しておく.

〔定理 2〕 $aa=a,\ a+a=a$

証明：B. の b に ab を入れて

$$a(a+ab)=a$$

左辺の第2因数に B_+ を使うと

$$aa=a$$

これと双対に　$a+a=a$　（終）

いわゆる巾等性であり，このためにブール代数には累乗や倍数がないといわれる．しかし，函数の次数を導入することはできる(7).

〔定理 3〕 1と0はそれぞれ唯1つである.

証明：もう一つ0があって，それを n とすれば

$$n+0=n$$

と

$$0+n=0$$

が成立ち，C_+ によって $n=0$ となり，0 が唯1つとなる．これと双対に 1 も唯1つでつある．(終)

1 と 0 がそれぞれ乗法，加法の恒等元となる．

・と＋の逆演算はないが，次の定理が成立つ．

〔定理 4〕 $xy=xz$, $x+y=x+z$ ならば $y=z$.

証明：第2式，B., D. によって

$$y=y(x+y)=y(x+z)=xy+yz$$

第1式，D.，第2式，B. によって

$$xy+yz=xz+yz=z(x+y)=z(x+z)=z$$

この二式から，$y=z$. (終)

この定理は次の定理の基礎となる．

〔定理 5〕 a' は各 a について，唯1つである．

証明：もう一つ a' があってそれを $\bar{a}$ とすれば

$$a\bar{a}=0 \qquad a+\bar{a}=1$$

これと $N._+$ から

$$a\bar{a}=aa' \qquad a+\bar{a}=a+a'$$

この二式は定理4を使って

$$\bar{a}=a' \qquad \text{(終)}$$

a について唯1つ定まる a' が a の補元である．

〔定理 6〕 $a''=a$

証明：

$$a'a''=0 \qquad a'+a''=1$$

これと $N._+$ から

$$a'a''=a'a \qquad a'+a''=a'+a$$

この二式に定理4を使って

$$a''=a \qquad \text{(終)}$$

〔定理 7〕 $a0=0$ 　　 $a+1=1$

証明：N.，定理 1，定理 2，N. によって，$a0=a.aa'=(aa)a'$

$=aa'=0$ これと双対に $a+1=1$ (終)

この定理は恒等元の計算上，また応用上大切な性質を示す．

〔定理 8〕 $a(a'+b)=ab,\ a+a'b=a+b$

証明：D., N., C_+, E_+ によって，$a(a'+b)=aa'+ab=ab+aa'=ab+0=ab$ これと双対に $a+a'b=a+b$. (終)

この定理は式を整頓するのに使うことが多い．

〔定理 9〕 $(ab)'=a'+b',\ (a+b)'=a'b'$

証明：D. によって

$$ab(a'+b')=aba'+abb'$$

右辺に定理 1, C., 定理 7, E_+ を使って

$$aba'+abb'=baa'+abb'=b0+a0=0+0=0$$

この二式から $ab(a'+b')=0$　(1)

定理 8 で a を a' とみ，定理 6 を使うと $a'+ab=a'+b$

これを使って　$ab+(a'+b')=a'+ab+b'=a+b+b'$

右辺の第 2, 第 3 項に N_+, 定理 7 を使って

$$a+b+b'=a+1=1$$

この二式から　$ab+(a'+b')=1$　(2)

(1), (2) と定理 5 によって

$$(ab)'=a'+b'$$

これと双対に　$(a+b)'=a'b'$　(終)

これは De Morgan の定理といい，理論上応用上大切である．

〔定理 10〕 $a=0,\ b=0$ と $a+b=0$ は同値である．$a=1,\ b=1$ と $ab=1$ は同値である．

証明：$a=0$ と $b=0$ を加えて E_+ により，$a+b=0+0=0$

逆に　$a+b=0$ に a を掛けて $a(a+b)=a0$. 左辺に B., 右辺に定理 7 を使って，$a=0$, 同じように $b=0$. これと双対に，$a=1,\ b=1$ と $ab=1$ は同値である．　(終)

この定理は方程式理論で大切である(8)．

〔定理 11〕 $a=b$ と $ab'+a'b=0,\ (a+b')(a'+b)=1$ はそれぞれ同値である．

証明：$a=b$ に b' を掛けて $ab'=bb'$

右辺に $N.$ を使って $ab'=0$. $a=b$ a' にを掛けて $a'b=0$. この二式を加えて $ab'+a'b=0$.

逆にこの式に a を加えて

$$a+ab'+a'b=0+a$$

左辺第 1, 第2項に B_+, それにまた定理 8, 右辺に E_+ を使って

$$a+b=a$$

b を加えて，同じように変形すると

$$a+b=b$$

この二式から $a=b$.

これと双対に $(a+b')(a+b')=1$ とも同値となる.　　　　(終)

この定理は等式がみな右辺 0, または 1 に同値変形できることを示す.

B の元となる不定元 x と B の定元に・, ＋, $'$ を有限回施して得られる式を x の函数とよび, $f(x)$ と(9)書く.

〔定理 12〕 $f(x)=f(1)x+f(0)x'$

$$f(x)=(f(0)+x)(f(1)+x')$$

証明：$f(x)$ の示す計算の中で括弧の外についている $'$ は De Morgan の定理を使って，定元または不定元につくまで変形することができる．次に D. を使って積の和になおすことができる．積のうち x を因数とするものを D. でかきなおすと Px となる．同じように積のうち x' を因数とするものは Qx' となる．x も x' も因数としない積の和を R として，恒等式

$$f(x)=Px+Qx'+R$$

を得る．

$$R=R1=Rx+Rx'$$

を代入して，恒等式

$$f(x)=(P+R)x+(Q+R)x'$$

が成立つ.

ここで，$x=1$ とおいて

$$P+R=f(1)$$

$x=0$ とおいて

$$Q+R=f(0)$$

上の式に入れて

$$f(x)=f(1)x+f(0)x'$$

これと双対に　　$f(x)=(f(0)+x)(f(1)+x')$

も成立つ．（終）

これはブール代数での函数の展開公式であるが，これを一般化するため，記号を用意する．

$\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n$，は 0 または 1 だけとなる記号とする．

x^ξ は $\xi=1$ ならば x, $\xi=0$ ならば x' を表わす．

B の元となる不完元 $x_1, \cdots\cdots, x_n$ と B の定元に・，＋，$'$ を有限回施して得られる式を $x_1, \cdots\cdots\cdots, x_n$ の函数とよび，$f(x_1, \cdots\cdots, x_n)$ と書く．

〔定理 13〕 $f(x_1, \cdots\cdots, x_n)=\sum_{\xi_1=0}^{1}\cdots\cdots\sum_{\xi_n=0}^{1}f(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n)x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_n^{\xi_n}$

証明：$n=1$ のとき，定理 12 として成立っている．

$n=r-1$ のとき成立っているとする．

$f(x_1, \cdots\cdots, x_{r-1}, x_r)$ を x_r の函数とみて定理 12 によって展開すれば

$$f(x_1, \cdots\cdots, x_{r-1}, x_r)=f(x_1, \cdots\cdots, x_{r-1}, 1)x_r+f(x_1, \cdots\cdots, x_{r-1}, 0)x_r' \tag{1}$$

$n=r-1$ については成立っているとしたから

$$f(x_1, \cdots\cdots, x_{r-1}, 1)=\sum_{\xi_1=0}^{1}\cdots\cdots\sum_{\xi_{r-1}=0}^{1}f(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_{r-1}, 1)x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_{r-1}^{\xi_{r-1}} \tag{2}$$

$$f(x_1, \cdots\cdots, x_{r-1}, 0)=\sum_{\xi_1=0}^{1}\cdots\cdots\sum_{\xi_{r-1}=0}^{1}f(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_{r-1}, 0)x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_{r-1}^{\xi_{r-1}} \tag{3}$$

が成立っている．（２）と（３）を（１）に入れて，

$$f(x_1,\cdots\cdots,\ x_{r-1},x_r)=\sum_{\xi_1=0}^{1}\cdots\cdots\sum_{\xi_{r-1}=0}^{1}f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_{r-1},1)x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_{r-1}^{\xi_{r-1}}x_r$$
$$+\sum_{\xi_1=0}^{1}\cdots\cdots\sum_{\xi_{r-1}=0}^{1}f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_{r-1},0)x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_{r-1}^{\xi_{r-1}}x_r'$$
$$=\sum_{\xi_1=0}^{1}\cdots\cdots\sum_{\xi_r=0}^{1}f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_r)x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_r^{\xi_r}$$

これは $n=r$ のときも，この定理が成立っていることを示す．（終）

〔定理 14〕

$$f(x_1,\cdots\cdots,\ x_n)=\prod_{\xi_1=0}^{1}\cdots\cdots\prod_{\xi_n=0}^{1}(f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n)+x_1^{\xi'_1}+\cdots\cdots+x_n^{\xi'_n})$$

証明：定理 13 の双対である．（終）

函数の展開定理は方程式の理論と技術で大切である．

$\sum_{\xi_1=0}^{1}$　$\sum_{\xi_n=0}^{1}$ をこれからは $\sum_{\xi}$ と畧記する．その意味は，この記法より右にある ξ_i すべてについて，0 と 1 をすべての組合せで代入して得られる式の和ということである．η,ζ などについても同じ畧記を使う．

3. 不等式と対称差

半順序集合から始めてブール代数を構成するという典型的な考察からみると逆行になるが，ここでブール代数に不等式関係を導入する．

それはブール代数での方程式についての諸問題を考察する道具として使うためであるので，不等式を定義し本稿に必要な限度でその性質を明らかにしておく．

またいわゆる対称差が本稿の話題に活用できるので，それにも触れておきたい．

B の元 a と b について

$$a=ab$$

であるとき，「a は b より大きくない」といい，

$$a\leqq b \qquad\qquad \text{と書く．}$$

このように定義した≦は半順序になっている．まず 2〔定理 2〕によって $a=aa$ であるから

反射性　　$a \leqq a$

次に $a \leqq b,\ b \leqq a$ ならば $a=ab,\ b=ba$ となって $a=b$. すなわち

反対称性　　$a \leqq b,\ b \leqq a$ ならば $a=b$

また $a \leqq b,\ b \leqq c$ ならば $a=ab,\ b=bc$ であり $a=a(bc)=(ab)c=ac$ となって $a \leqq c$. すなわち

移行性　　$a \leqq b,\ b \leqq c$ ならば $a \leqq c$

となる.

〔定理 1〕 $a \leqq b$ ならば $ac \leqq bc,\ a+c \leqq b+c$

証明：$ac(bc)=(ab)c,\ a=ab$ によって $ac(bc)=ac$ となり $ac \leqq bc$. $(a+c)(b+c)=ab+c=a+c$ によって, $a+c \leqq b+c$. (終)

・と＋の逆演算はないが, 次の定理が成立つ.

〔定理 2〕 $ac \leqq bc,\ a+c \leqq b+c$ ならば $a \leqq b$

証明：第１式から

$$a+ac \leqq a+bc$$

すなわち　　$a \leqq (a+b)(a+c)$　　(１)

また　　$ac+b \leqq bc+b$

すなわち　　$(a+b)(b+c) \leqq b$　　(２)

第２式から　　$(a+b)(a+c) \leqq (a+b)(b+c)$　　(３)

(１, (２), (３) から≦の移行性によって

$$a \leqq b$$ (終)

〔定理 3〕 $0 \leqq a \leqq 1$

証明：$0=0a$ と $a=a1$ による. (終)

〔定理 4〕 $a \leqq b,\ ab'=0,\ a+b=b,\ b' \leqq a'$ はたがいに同値である.

証明：$a=ab$ から $ab'=abb'=a0=0$. 逆に$a=ab+ab'$ に $ab'=0$ を入れて $a=ab$. $a=ab$ から $a+b=ab+b=b$ 逆に $a+b=b$ から $a(a+b)=ab$ すなわち$a=ab$. $ab'=0$ と $b'a''=0$. 第２式と $b'<a'$ が同値である. (終)

〔定理 5〕 $ab \leqq a \leqq a+b$

証明：$ab=aba,\ a=a(a+b)$ による. (終)

〔定理 6〕 $\prod_{\xi} f(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n) \leqq f(x_1, \cdots\cdots, x_n) \leqq \sum_{\xi} f(\xi_1, \cdots\cdots, \xi_n)$

証明：定理5によって

$$\prod_{\xi} f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n) \leqq f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n) \leqq \sum_{\xi} f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n)$$

定理1によって

$$(\prod_{\xi} f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n))x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_n^{\xi_n} \leqq f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n)x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_n^{\xi_n}$$
$$\leqq (\sum_{\xi} f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n))x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_n^{\xi_n}$$

したがって

$$\sum_{\xi}(\prod_{\xi} f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n))x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_n^{\xi_n} \leqq \sum_{\xi} f(\xi_1,\cdots,\ \xi_n)x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_n^{\xi_n}$$
$$\leqq \sum_{\xi}(\sum_{\xi} f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n))x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_n^{\xi_n}$$

第 1．第3辺に $\sum_{\xi} x_1^{\xi_1}\cdots\cdots x_n^{\xi_n}=1$，第2辺に 2〔定理 13〕を使って

$\prod_{\xi} f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n) \leqq f(x_1,\cdots\cdots,\ x_n) \leqq \sum_{\xi} f(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n)$（終）

$a \leqq b$ で $a \neq b$ であるとき「b は a より大きい」といい，

$$a<b$$

と書く．

この定義によって「$a \leqq b$」は「$a=b$ または $a<b$」と同値になる．

このように定義したくは移行性をもつ．

$a<b,\ b<c$ とすれば $a \leqq b,\ b \leqq c$ によって $a \leqq c$，$a=c$とすれば $a=b$，$b=c$ となって矛盾し，$a \neq c$，よって $a<c$．

この他，通常の不等式と同じ性質を多くもっている．とくに．

〔定理 7〕 $a<b$ ならば $b'<a'$

証明：$a \leqq b$ から定理4によって $b' \leqq a'$，$b'=a'$ とすれば $a=b$ となって矛盾し，$b' \neq a'$．よって $b'<a'$．（終）

集合　$\{x|x \leqq a,\ x \in B\}$

のカージナル数を a の巾数とよび $N(a)$(10)と書く．たとえば $N(0)=1$ である．$0 \leqq x$ により $x \leqq 0$ から $x=0$ だけとなるからである．巾数は方程式の根の個数の決定で大切である．

a と b の対称差をここでは＊で表わすことにする．すなわち

$$a*b=ab'+a'b$$

である.

周知の通り，ブール代数は＊を加法・を乗法とみて，主単位付可換環になる.

B を＊加法群とみるとき

$$a*0=a$$

によってが 0 加法単位元であり

$$a*a=0$$

によって，すべての元の位数が 2，したがって，すべての元が自己逆元である.

与えられた函数 $f(x)$ について，2 つの元 a と b が

$$f(a)=f(b)$$

を満すとき，「a と b は f について等値である」といい

$$a\sim b(f)$$

と書く.

この関係付けは明らかに同値関係である．したがって，この関係で B が同値級に分かれ

$$B=K_0+K_a+\cdots\cdots$$

となる．ここで K_x は x と同値な元の集合である.

〔定理 8〕 a と b が f について同値であるための必要十分条件は

$$(f(1)*f(0))(a*b)=0$$

証明：$f(a)=f(b)$

から，$$f(a)f'(b)+f'(a)f(b)=0$$

左辺を a, b について展開整頓すれば

$$(f(1)f'(0)+f'(1)f(0))(ab'+a'b)=0$$

すなわち $$(f(1)*f(0))(a*b)=0$$

この計算は逆も利くので，これが必要十分条件となる.（終）

〔定理 9〕 K_0 は B の部分群をなし，同値級は B の K_0 についての剰余級に他ならない.

証明：$p\in K_0$, $q\in K_0$ とすれば，定理 8 によって

$$(f(1)*f(0))p=0 \qquad (f(1)*f(0)q=0$$

よって　$(f(1)*f(0))(p*q)=0$

すなわち　$p*q\in K_0$

ここで，q を q の逆元とみて，K_0 は部分群をなす．

$$p\sim q(f)$$

とすれば定理 8 によって

$$(f(1)*f(0))(p*q)=0$$

よって　$p*q\in K_0$

したがって　$p\in K_0*q$

この計算は逆が利くので，同値級と利余級が一致する．（終）

この定理は $f(x)=a$ を満す x の個数が a とは無関係に $f(x)$ だけで定まることを示す．

4. 一元方程式

ブール代数 B での函数 $f(x)$, $g(x)$ について

$$f(x)=g(x) \tag{1}$$

を満す B の元 x があるとき，一元方程式（1）は B で可解であるという．

B での等式は 2 定理 11 によって，いつでも右辺が 0 である形に同値変形できるし，ここでは方程式が B で可解であるための必要十分条件と根の公式——根の集合の完全表示，また根の個数——根の集合のカージナル数——を問題にするから，方程式はみな右辺が 0 であるとして，話をすすめる．

次に一元連立方程式を

$$f_1(x)=0,\cdots\cdots, f_m(x)=0 \tag{2}$$

とする．

B でのこの形のいくつかの等式は 2 定理 10 によって 1 つにまとめることができるし，ここでは上に述べた通り B での根だけを問題にするから，（2）を 1 つにまとめた

$$F(x)=0 \tag{3}$$

について，上の 3 つの問題を考察する．

〔定理〕 1 元方程式 $F(x)=0$

が可解であるための必要十分条件は

$$F(1)F(0)=0$$

であり，根の公式は

$$[F(0)+F'(1)u|u \in B, u \leqq F'(1)F'(0)]$$

根の個数は

$$N(F'(1)F'(0))$$

である．

証明：$F(x)=0$ が可解であるとすれば 2 定理 12 によって，

$$F(1)a+F(0)a'=0$$

となる B の元 a がある．

これに $F(1)F(0)$ を掛けて

$$F(1)F(0)(F(1)a+F(0)a')=0$$

左辺を $D.$, 定理 2, N_+, E. で書直すと

$$F(1)F(0)=0 \qquad (1)$$

これが可解の必要条件である．

逆に（1）が成立つとし，2 定理 12 によって，$F(F(0))$ を計算すると $F(F(0))=F(1)F(0)+F(0)F'(0)$

右辺の第 1 項は（1），第 2 項は N. によって 0 となり

$$F(F(0))=0$$

ここで $F(0) \in B$ によって可解となり，（1）は可解の十分条件となる．

$F(x)=0$ を 2 定理 12 によって

$$F(1)x+F(0)x'=0$$

と書直しておいて，x を加えると

$$x+F(1)x+F(0)x'=x$$

左辺の第 1，第 2 項に B_+, 第 1，第 3 項に 2 定理 8 を使うと

$$x=F(0)+x \qquad (2)$$

$F(x)=0$ を $F'(x)=1$，すなわち 2 定理 12 によって

$$(F'(0)+x)(F'(1)+x')=1$$

と直しておいて，x を掛けると

左辺の第 1，第 2 因数に B.，第 1，第 3 因数に 2 定理 8 を使うと，

$$x=F'(1)x$$

これを（ 2 ）の右辺に入れて

$$x=F(0)+F'(1)x$$

逆に u を B の任意元として，$F(F(0)+F'(1)u)$ を計算すると

$$F(1)(F(0)+F'(1)u)+F(0)(F(0)+F'(1)u)'$$
$$=F(1)F(0)+F(1)F'(1)u+F(0)F'(0)(F(1)+u')$$

第 1 項は（ 1 ）によって，第 2，第 3 項は $N.$ によって 0 となり

$$F(F(0)+F'(1)u)=0$$

ここで　$F(0)+F'(1)u\in B$

により $F(0)+F'(1)u$ は根となる．すなわち

$$\{x|F(x)=0,\ x\in B\}=\{F(0)+F'(1)u|u\in B\}$$

これはまた根の公式にはなっていない．

今 y を未知数とする連立方程式

$$\begin{cases}F(0)+F'(1)y=F(0)+F'(1)u\\ y\leqq F'(1)F'(0)\end{cases}\qquad(3)$$

を考える．

（ 3 ）を書直して 1 つにまとめると．

$$(F(0)+F'(1)y)(F(0)+F'(1)u)'$$
$$+(F(0)+F'(1)y)'(F(0)+F'(1)u)$$
$$+y(F(1)+F(0))=0\qquad(4)$$

となる．

（ 4 ）の左辺を $G(y)$ と書けば

$$G(1)=(F(0)+F'(0))F'(0)(F(1)+u')$$
$$+F'(0)F(1)(F(0)+F'(1)u)+F(1)+F(0)$$
$$=F'(1)F'(0)u'+F(1)+F(0)$$
$$G(0)=F(0)F'(0)(F(1)+u')+F'(0)(F(0)+F'(1)u)$$
$$=F'(1)F'(0)u$$

となり，u の如何によらず

$$G(1)G(0)=0$$

となる．

この定理のすでに証明したところによって，（4）すなわち（3）は可解である．

よって

$$\{F(0)+F'(1)u|u\in B\}=\{F(0)+F'(1)y|y\in B, y\leqq F'(1)F'(0)\} \tag{5}$$

が成立つ．

$$H(y)=F(0)+F'(1)y$$

とおけば，$F(1)F(0)=0$ によって

$$H(1)=F'(1)$$

また

$$H(0)=F(0)$$

この二式によって

$$H(1)*H(0)=F'(1)F'(0)+F(1)F(0)=F'(1)F'(0)$$

となる．

（5）の2つの y_1, y_2 について

$$y_1\sim y_2(H)$$

となる条件は3定理8によって

$$F'(1)F'(0)(y_1*y_2)=0$$

であるが y_1, $y_2\leqq F'(1)F'(0)$ によって

$$y_1*y_2=0$$

となり，

$$y_1=y_2.$$

これは，異る y が異る根を与えることを示す．よって（5）は完全表示である．したがって

$$\{x|F(x)=0,\ x\in B\}=[F(0)+F'(1)u|u\in B,\ u\leqq F'(1)F'(0)]$$

これはまた根の個数が

$$N(F'(1)F'(0))$$

であることをも示す．（終）

例

$$ax+e'x'=0$$

$$ae'=\{\alpha\}\{\gamma,\ \delta\}=\{\quad\}=0$$

によって可解である.

$$F'(1)=a'=\{\beta,\ \gamma,\ \delta\}$$

$$F'(0)=e''=e=\{\alpha,\ \beta\}$$

により $$F'(1)F'(0)=\{\beta\}=b$$

根の公式は

$$[e'+a'u|u\leqq b]$$

$u=\{\quad\}$ のとき，　$e'+a'u=e'$

$u=b$ のとき，$e'+a'b=\{\gamma,\ \delta\}+\{\beta,\ \gamma,\ \delta\}\{\beta\}=\{\beta,\ \gamma,\ \delta\}=a'$

となり，根は a' と e' である.

根の数は $u\leqq b$ となる b が 0 と b だけであるから，2 つである.

5. 多元方程式

ブール代数 B での多元函数 $f(x_1,\cdots\cdots,x_n)$, $g(x_1,\cdots\cdots,x_n)$ について

$$f(x_1,\cdots\cdots,\ x_n)=g(x_1,\cdots\cdots,\ x_n)$$

を満す B の元の組 $(x_1,\cdots\cdots,\ x_n)$ があるとき，この多元方程式は B で可解であるという.

一元方程式のときと同じ理由によって

$$F(x_1,\cdots\cdots,\ x_n)=0$$

だけをとり，その可解条件，根の公式，根の数を決定する.

〔補助定理 1〕 $F(x_1,\cdots\cdots,\ x_n)=0$ が可解であるための必要十分条件は

$$\prod_{\xi}F(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n)=0$$

である.

証明：(i) $n=1$ のとき，4〔定理〕として成立っている.

(ii) $n=s$ のとき，この定理が成立っているとして，$s+1$ 元方程式

$$F(x_1,\cdots\cdots,\ x_{s+1})=0 \qquad (1)$$

を考える.

(1) が可解であるとすれば

$$F(a_1,\cdots\cdots,\ a_{s+1})=0 \tag{2}$$

となる B の元の組

$$(a_1,\cdots\cdots,\ a_{s+1})$$

がある.

（2）は

$$F(a_1,\cdots\cdots,\ a_s,1)a_{s+1}+F(a_1,\cdots\cdots,\ a_s,0)a'_{s+1}=0 \tag{3}$$

となり，これは x_{s+1} を未知元とする 1 元方程式

$$F(a_1,\cdots\cdots,\ a_s,1)x_{s+1}+F(a_1,\cdots\cdots,\ a_s,0)x'_{s+1}=0 \tag{4}$$

が可解であることを示す．したがって 4〔定理〕によって

$$F(a_1,\cdots\cdots,\ a_s,1)F(a_1,\cdots\cdots,\ a_s,0)=0 \tag{5}$$

が成立たなくてはならない.

（5）は $x_1,\cdots\cdots,\ x_s$ を未知元とする s 元方程式

$$F(x_1,\cdots\cdots,\ x_s,1)F(x_1,\cdots\cdots,\ x_s,0)=0 \tag{6}$$

が可解であることを示す．s 元方程式については，この定理が成立っているから

$$\prod_{\xi}F(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_s,1)F(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_s,0)=0 \tag{7}$$

であり，書直して

$$\prod_{\xi}F(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_{s+1})=0 \tag{8}$$

が（1）が可解であるための必要条件となる.

逆に（8）が成立っているとする.

書直して（7）となり，これは s 元方程式について，この定理が成立っているから，s 元方程式（6）が可解であることを示す.

したがって，（5）となるような B の元の組 $(a_1,\cdots\cdots,\ a_s)$ がある.（5）は 4〔定理〕によって，1 元方程式（4）が可解であることを示し，（3）となる元 a_{s+1} がある．（3）を書直せば（2）であって（1）が可解となる.

ななわち，（8）は（1）が可解であるための十分条件である.

これで，$n=s$ のときこの定理が成立つとして，$n=s+1$ のときにも成立つことが証明できた.

（i）と（ii）によって任意の元の数について，この定理が成立つ.（終）

$\prod_{\xi}F(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n)=0$ を $F(x_1,\cdots\cdots,\ x_n)=0$ の終結式といい，関係抽出の基礎となる.

〔補助定理 2〕 n 元可解方程式 $F(x,\cdots\cdots,\ x_n)=0$ の根の公式は

$$x_i=x_i(u_1,\cdots\cdots,\ u_i)=\prod_{\xi}F(x_1,\cdots\cdots x_{i-1},0,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)$$

$$+\sum_{\zeta}F'(x_1,\cdots\cdots,\ x_{i-1},1,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)u_i$$

$$u_i\leqq\sum_{\eta}F'(x_1,\cdots\cdots,\ x_{i-1},\ 1,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)$$

$$\sum_{\xi}F'(x_1,\cdots\cdots,\ x_{i-1},0,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)$$

$$i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n$$

である.

証明：この方程式が可解であるから，補助定理１によって

$$\prod_{\xi}F(\xi_1,\cdots\cdots,\ \xi_n)=0$$

が成立っている.

これは x_1 についての１元方程式

$$\prod_{\eta}F(1,\ \xi_2,\cdots\cdots,\ \xi_n)x_1+\prod_{\xi}F(0,\ \xi_2,\cdots\cdots,\ \xi_n)x_1'=0$$

が可解であることを示し，その根は４〔定理〕によって，

$$x_1=\prod_{\xi}F(0,\ \xi_2,\cdots\cdots,\ \xi_n)+\sum_{\xi}F'(1,\ \xi_2,\cdots\cdots,\ \xi_n)u_1$$

であり，　$u_1\leqq(\prod_{\xi}F(0,\ \xi_2,\cdots\cdots,\ \xi_n))'\sum_{\xi}F'(1,\ \xi_2,\cdots\cdots,\ \xi_n)$

すなわち

$$u_1\leqq\sum_{\xi}F'(1,\ \xi_2,\cdots\cdots,\ \xi_n)\sum_{\xi}F'(0,\ \xi_2,\cdots\cdots,\ \xi_n)$$

である.

これは定理で $i=1$ のときを示す.

これを $x_1(u_1)$ また x_1 と略記すれば，

$$\prod_{\xi} F(x_1,\ \xi_2,\cdots\cdots,\ \xi_n)=0$$

が成立っている.

これは x_2 についての1元方程式

$$\prod_{\xi} F(x_1,\ 1,\ \xi_3,\cdots\cdots,\ \xi_n)x_2+\prod_{\xi} F(x_1,\ 0,\ \xi_3,\cdots\cdots,\ \xi_n)x_2'=0$$

が可解であることを示し，その根は 4〔定理〕によって

$$x_2=\prod_{\xi} F(x_1,\ 0,\ \xi_3,\cdots\cdots,\xi_n)+\sum_{\xi} F'(x_1,\ 1,\ \xi_3,\cdots\cdots,\ \xi_n)u_2$$

であり，$u_2 \leqq (\prod_{\xi} F(x_1,\ 0,\ \xi_3,\cdots\cdots,\ \xi_n))' \sum_{\xi} F'(x_1,\ 1,\ \xi_3,\cdots\cdots,\ \xi_n)'$

すなわち

$$u_2 \leqq \sum_{\xi} F'(x_1,\ 1,\ \xi_3,\cdots\cdots,\ \xi_n)\sum_{\xi} F'(x_1,\ 0,\ \xi_3,\cdots\cdots,\ \xi_n)$$

である.

これは定理で $i=2$ のときを示す.

ここで x_2 は u_1, u_2 の函数 $X_2(u_1,\ u_2)$ である.

一般に $i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ s-1$ まで

$$x_i=X_i(u_1,\ u_2,\cdots\cdots,\ u_i)$$
$$=\prod_{\xi} F(X_1,\cdots\cdots,\ X_{i-1},0,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)$$
$$+\sum_{\xi} F'(X_1,\cdots\cdots,\ X_{i-1},1,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)u_i$$
$$u_i \leqq \sum_{\xi} F'(X_1,\cdots\cdots,\ X_{i-1},1,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)$$
$$\sum F'(X_1,\cdots\cdots,\ X_{i-1},0,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)$$

が定まり，これら $X_1,\cdots\cdots,\ X_{s-1}$ が

$$\prod_{\xi} F(X_1,\cdots\cdots,\ X_{s-1},\xi_s,\cdots\cdots,\ \xi_n)=0$$

を満したとする.

これは，x_s についての1元方程式

$$\prod_{\xi} F(X_1,\cdots\cdots,\ X_{s-1},1,\ \xi_{s+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)x_s$$
$$+\prod_{\xi} F(X_1,\cdots\cdots,\ X_{s-1},0,\ \xi_{s+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)x_s'=0$$

が可解であることを示し，その根は 4〔定理〕によって

$$x_s = X_s(u_1, \cdots\cdots, u_s)$$
$$= \prod_\xi F(X_1, \cdots\cdots, X_{s-1}, 0, \xi_{s+1}, \cdots\cdots, \xi_n)$$

$$+ \sum_\xi F'(X_1, \cdots\cdots, X_{s-1}, 1, \xi_{s+1}, \cdots\cdots, \xi_n) u_s$$

となり，$u_s \leqq (\prod_\xi F(X_1, \cdots\cdots, X_{s-1}, 0, \xi_{s+1}, \cdots\cdots, \xi_n))'$

$$\sum_\xi F'(X_1, \cdots\cdots, X_{s-1}, 1, \xi_{s+1}, \cdots\cdots, \xi_n)$$

すなわち，

$$u_s \leqq \sum_\xi F'(X_1, \cdots\cdots, X_{s-1}, 1, \xi_{s+1}, \cdots\cdots, \xi_n)$$

$$\sum_\xi F'(X_1, \cdots\cdots, X_{s-1}, 0, \xi_{s+1}, \cdots\cdots, \xi_n)$$

である．

これは，x_1, $x_2, \cdots\cdots$, x_{s-1} が定理に示した形であり，u_1, $u_2, \cdots\cdots$, u_{s-1} が定理に示した形の不等式をみたせば，x_s も同じ形であり，u_s も同じ形の不等式を満すことを示す．

また X_1, $X_2, \cdots\cdots$, X_{s-1} が

$$\prod_\xi F(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_{s-1}, \xi_s, \cdots\cdots, \xi_n) = 0$$

を満たせば，X_1, $X_2, \cdots\cdots$, X_s は

$$\prod_\xi F(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_s, \xi_{s+1}, \cdots\cdots, \xi_n) = 0$$

を満すことを示す．

証明の前半で X_1, X_2 について検証したから，X_3, $X_4, \cdots\cdots$, X_n も上の形で定まり

$$F(X_1, X_2, \cdots\cdots, X_n) = 0$$

を満す．

各 u_i は各 x_i が洩れなく，重複なく定まるように範囲を定めてあるから，上に定めた $X_i(u_1, u_2, \cdots\cdots, u_i)$ は根の公式になっている．(終)

〔補助定理 3〕 可解な n 元方程式 $F(x_1, \cdots\cdots, x_n) = 0$ の根の数は

$$\sum_{u_{n-1}}\sum_{u_{n-2}}\cdots\cdot\sum_{u_1}N(F'(X_1,\cdots\cdots, X_{n-1},1)F'(X_1,\cdots\cdots,X_{n-1},1))$$

である.

ただし，X_i は補助定理 2 で定めたものであり，u_i の総和範囲も同定理に示したとおりである.

証明：$X_1,\cdots\cdots, X_{n-1}$ を定めた上で，X_n を定める方程式は

$$F(X_1,\cdots\cdots, X_{n-1},1)x_n+F(X_1,\cdots\cdots, x_{n-1},0)X'_n=0$$

である.

したがって，定まった $X_1,\cdots\cdots, X_{n-1}$ すなわち定まった $u_1,\cdots\cdots, u_{n-1}$ に対して，X_n は 4〔定理〕によって

$$N(F'(x_1,\cdots\cdots, X_{n-1},1)F'(X_1,\cdots\cdots, X_{n-1},0))$$

個だけ定まる.

異る $u_1,\cdots\cdots, u_{n-1}$ が異る $(X_1,\cdots\cdots, X_{n-1})$ を定めるから，根の総数は

$$\sum_{u_{n-1}}\sum_{u_{n-2}}\cdots\cdots\sum_{u_1}N(F'(X_1,\cdots\cdots, X_{n-1},1)F'(X_1,\cdots\cdots, X_{n-1},0))$$

となる.（終）

前節にならって，以上三つの補助定理を総括して，多元方程式について次の定理を得る.

〔定理〕 n 元方程式

$$F(x_1,\cdots\cdots, x_n)=0$$

が可解であるための必要十分条件は

$$\prod_{\xi}F(\xi_1,\cdots\cdots, \xi_n)=0$$

であり，根の公式は

$$[(X_1,\ X_2,\cdots\cdots,\ X_n)|X_i=\prod_{\xi}F(X_1,\cdots\cdots,\ X_{i-1},0,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)$$

$$+\sum_{\xi}F'(X_1,\cdots\cdots,\ X_{i-1},1,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)u_i,$$

$$u_i\leqq\sum_{\xi}F'(X_1,\cdots\cdots,\ X_{i-1},1,\xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n)$$

$$\sum_{\xi}F'(X_1,\cdots\cdots,\ X_{i-1},0,\ \xi_{i+1},\cdots\cdots,\ \xi_n),\ i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n]$$

根の個数は

$$\sum_{u_{n-1}}\sum_{u_{n-2}}\cdots\cdots\sum_{u_1}N(F'(X_1,\cdots\cdots,\ X_{n-1},1)F'(X_1,\cdots\cdots,\ X_{n-1},0))$$

である.

例　特に3元方程式

$$f(x,\ y,\ z)=0$$

について，この定理を明示すれば，

$$\prod_{\xi}\prod_{\eta}\prod_{\zeta}f(\xi,\ \eta,\ \zeta)=0$$

が可解条件である.

$$x=X(u)=\prod_{\eta,\zeta}f(0,\ \eta,\ \zeta)+\sum_{\eta,\zeta}f'(1,\ \eta,\ \zeta)u$$

$$u\leqq\sum_{\eta,\zeta}f'(0,\ \eta,\ \zeta)\sum_{\eta,\zeta}f'(1,\ \eta,\ \zeta)$$

$$y=Y(u,\ v)=\prod_{\zeta}f(Y,\ 0,\ \zeta)+\sum_{\zeta}f'(X,1,\zeta)v$$

$$v\leqq\sum_{\zeta}f'(X,\ 0,\ \zeta)\sum_{\zeta}f'(X,\ 1,\ \zeta)$$

$$z=Z(u,\ v,\ w)=f(X,\ Y,\ 0)+f'(X,\ Y,\ 1)w$$

$$w\leqq f'(x,\ y,\ 0)f'(x,\ y,\ 1)$$

から根 $(X,\ Y,\ Z)$ が定まる.

根は

$$\sum_{v}\sum_{u}N(f'(X,\ Y,\ 1)f'(X,\ Y,\ 0))$$

個だけある.

$$a'xyz+b'xyz'+c'xy'z+gxy'z'$$
$$+b'x'yz+c'x'yz'+d'x'y'z+gx'y'z'=0$$

について適用してみる.

$a'b'c'g\cdot b'c'd'g=d\cdot a=0$ であるから，可解である.

$$\prod_{\eta,\zeta}f(0,\ \eta,\ \zeta)=b'c'd'g=a$$

$$\sum_{\eta,\zeta}f'(1,\ \eta,\ \zeta)=a+b+c+g'=d'$$

によって

$$X(u)=a+d'u \qquad u\leqq a'd'=g'$$

$u=0,\ b,\ c,\ g'$ に対して

$$x=a,\ e,\ f,\ d'$$

$$\prod_{\zeta} f(X,\ 0,\ \zeta)=(c'X+d'X')(gX+gX')=gX+aX'$$

$$\sum_{\zeta} f'(X,\ 1,\ \zeta)=(aX+bX')+(bX+cX')=eX+g'X'$$

によって

$$Y(u,\ v)=gX+aX'+(eX+g'X')v$$

$$v\leqq(g'X+a'X')(eX+g'X')=bX+g'X'$$

$x=a$ のとき

$$Y=a+g'v \qquad v\leqq g'a'=g'$$

$v=0,\ b,\ c,\ g'$ に対して,

$$y=a,\ e,\ f,\ d'$$

$x=e$ のとき

$$Y=a+d'v \qquad v\leqq a'd'=g'$$

$v=0,\ b,\ c,\ g'$ に対して,

$$y=a,\ e,\ f,\ d'$$

$x=f$ のとき

$$Y=a+bv \qquad v\leqq a'b=b$$

$v=0,\ b$ に対して,

$$y=a,\ e$$

$x=d'$ のとき

$$Y=a+ev \qquad v=a'e=b$$

$v=0,\ b$ に対して,

$$y=a,\ e$$

$$Z(u,\ v,\ w)=(b'XY+gXY'+c'X'Y+gX'Y')$$
$$+(aXY+cXY'+bX'Y+dX'Y')w$$

$$w\leqq cXy'$$

$X=a,\ Y=a$ のとき $w\leqq 0$ で $Z=g$

$X=a,\ Y=e$ のとき $w\leqq 0$ で $Z=c'$

$X=a,\ Y=f$ のとき $w\leqq 0$ で $Z=g$

$X=a,\ Y=d'$ のとき $w\leqq 0$ で $Z=c'$

$X=e,\ Y=a$ のとき $w\leqq 0$ で $Z=g$

$X=e,\ Y=e$ のとき $w\leqq 0$ で $Z=g$

$X=e,\ Y=f$ のとき $w\leqq 0$ で $Z=g$

$X=e,\ Y=d'$ のとき $w\leqq 0$ で $Z=g$

$X=f,\ Y=a$ のとき $w\leqq c$ で

$Z=g+b'w$

$w=0,\ c$ に対して $Z=g,\ b'$

$X=f,\ Y=e$ のとき $w\leqq c$ で

$Z=c'+w$

$w=0,\ c$ に対して $Z=c',\ 1$

$X=d',\ Y=a$ のとき $w\leqq c$ で

$Z=g+cw$

$w=0,\ c$ に対して$Z=g,\ b'$

$X=d'\ Y=e$ のとき $w\leqq c$ で

$Z=g+cw$

$w=0,\ c$ に対して $Z=g,\ b'$

である.

こうして次の 16 個の根を得る.

$$(aag)\quad (aec')\quad (afg)\quad (ad'c')$$
$$(eag)\quad (eeg)\quad (efg)\quad (ed'g)$$
$$(fag)\quad (fab')\quad (fec')\quad (fe1)$$
$$(d'ag)\quad (d'ab')\quad (d'eg)\quad (d'eb')$$

個数を数えるだけならば

$$X(u)=a+d'u \qquad u\leqq g'$$

によって

$$Y(u,v)=a+(eu+g'u')v \quad v\leqq bu+g'u'$$

となり

$$f'(X,\ Y,\ 1)f'(X,\ Y,\ 0)=cXY'=cu$$

であるから

$$\sum_{v \leqq bu+g'u'} \sum_{u \leqq g'} N(cu)$$

を計算すればよい.

$$u=0 \text{ では} \sum_{v \leqq g'} N(0)=4$$

$$u=b \text{ では} \sum_{v \leqq g'} N(0)=4$$

$$u=c \text{ では} \sum_{v \leqq b} N(c)=4$$

$$u=g' \text{ では} \sum_{v \leqq b} N(c)=4$$

で $4+4+4+4=16$ となる.

6. むすび

ブール代数での方程式について筆者が採り上げた限りでは一応完結した結論を得た. 当然次は不等式について同じ問題を考察することになる.

ところが, ある種の問題は本稿で得た結果を使って簡単に答えられる.

たとえば
$$f(x)>0$$
は $f(1)f(0)>0$ ならば, 不定である. $f(1)f(0)=0$ ならば, その解法は別として, 根の数が

$$N(1)-N(f'(1)f'(0))$$

であることは 4〔定理〕から直ちに明らかである.

他方また, ある種の問題については多くの準備考察が必要なようである.

たとえば, 連立不等式は, そのままでは単一式にまとめられない. 一つの方法は筆者が前に活用した擬項の考えを使うことである. そして, このとき, また次の新しい問題が生れる. それは多元方程式

$$F(x_1,\cdots\cdots, x_n)=0$$

の正根をもつための必要十分条件とこの根の公式を作ることについての一般理論である. ここに正根とは, 上の方程式の根 $(a_1,\cdots\cdots, a_n)$ で $a_1>0,\cdots\cdots, a_n>0$ であるものをいう

正根問題は理論的に面白いばかりでなく，応用とくに集団構成で大切な意味をもつ話題であるので，続いて考察してみたい

（1） 山田欽一：Boolean Algebra に於ける方程式　大塚数学会誌 VIII—1 (1939)

（2） 山田欽一：可補分配束の初等的応用　一橋論双　XXI—1・2 (1949)

（3） 山田欽一：ブール代数に擬項を導入することとその応用　同上 XLII—2 (1959)

いわゆる述語算をブール代数に作用素を導入して組織立てる研究は

Halmos, P R.: Algebraic Logic New York (1962)

がある．これは Halmos 自身の研究の集録であるが，関連文献目録も入っている．

（4） 本稿 **6** 参照．

（5） 山田欽一：論理器具としての可補分配束計算具　一橋論双 XXV—2 (1951)

（6） ブール代数の公理論的研究も近来盛んであって

Scott: The Independence of Certain Distributive Laws in Boolean Algebras　Transactions of the American Mathematical Sciety　vol. 84 (1957)

などがある．

（7） 本稿 **3** 定理 9 の註釈参照．

（8） 本稿 **4** 参照．

（9） 無限回演算を採り入れた場合の研究も多く発表されている．たとえば

Chang: On the Representation of α-complete Boolean Algebras　T. A. M. S.　vol. 85 (1957)

(10) log N(a) は一種の measure になる．measure については

Horn & Tarski: Measures in Boolean Algebras　T. A. M. S.　vol 64 (1948)

(1963—8—19)

付記：正根問題の応用については近く Hitotsubashi Journal に発表する。

(1964—8—31)