確率論的計画法について

片 岡 信 二

序

条件附き最大（ないし最小）を取扱う問題の中で，係数が確率変数である場合を総称して確率論的計画法（Stochastic Programming）と呼ぶ[(1)-(9)]．この論文においては，とくに，線型計画の確率化について考える．以下に導入される確率化された条件式は，Charnes および Cooper によって始められたものであるが[(3),(4)]，その具体的な計算法については不満足なものがあった．筆者はこの小論において，確率変数が多重正規分布をなす場合に対して，いくつかの計算法を提出する．なお，確率化された条件式を目的函数に適用することの自然な結果として，最大（ないし最小）化する値は，目的函数の平均値からその標準偏差の定数倍を引いたものとなる．これは従来の単なる平均値の最大最小問題から一歩進めて，目的函数の分布をも考慮したことになる．得られた主な結論は次の二つである．

（i） 条件式の変数 x の係数が定数の場合（後で輸送型問題と定義する）には，二次計画の繰り返しによって解くことができる．また二次計画はある種の線型計画に等価であることが Wolfe[(10)]によって示されている故，結局われわれの確率論的計画はシンプレックス法で解くことができる．

（ii） さらに一般に，すべての係数が多重正規分布をなす場合は，凸の領域での凹函数の最大化（または凸函数の最小化）の問題となり，局所的な極値が全領域での最大（最小）値となることが保証される．これを解く方法としては傾斜法（Gradient methood)[(11)(12)] ないし，切断面法（Cutting plane method)[(13)]がある．

1.　問題の定義

$x(x_1\ x_2,\cdots\cdots,\ x_n)$ および $p(p_1,\ p_2,\cdots\cdots,\ p_n)$ を n 次のベクトル，$b(b_1,\ b_2,\cdots\cdots,\ b_m)$ を m 次のベクトル，$A(a_{ij})$ を $m\times n$ の行列とする．さらに，これらのベクトルおよび行列の要素はすべて確率変数とする．このとき，われわれの確率論的計画の基本式を次の如く定義しよう．

問題 1:

$$\mathrm{Max}\ f, \tag{1.1}$$

subject to

$$\mathrm{Prob}(p'x\geqq f)\geqq\beta_o, \tag{1.2}$$

$$\mathrm{Prob}\ \left(\textstyle\sum_j a_{ij}\, x_j\leqq b_i\right)\geqq\beta_i, \tag{1.3}$$

$$x_j\geqq 0, \tag{1.4}$$

$i=1,\ 2\cdots\cdots,\ m,\ j=1,\ 2\cdots\cdots\ n,$

ここに p' はベクトル p の転置を意味し，β_o, β_i はあらかじめ与えられた確率である．

(1.3) 式および (1.2) 式は次のような意味をもつ．係数 a_{ij}, b_i が確率変数であるとき，線型の条件式

$$\sum_j a_{ij}\, x_j\leqq b_i \tag{1.5}$$

は固定された x の値に対して必ずしも成立たなくなる．そこで，条件式 (1.5) の代りに，この条件式の成立つ確率が β_i よりも大きくなるということを要請したのが (1.3) である．この確率化された条件式は前述のように Charnes および Cooper によって導入されたものである．さらにわれわれは，(1.1), (1.2) 式によって，目的函数（これも一つの確率変数である．）の値が f 以上になる確率 β_o を与えて，f を最大にすることを考える．

2.　輸送型の問題

この節においては，**問題 1** における $b_i(i=1,\ 2,\cdots\cdots,\ m)$, $p_j(j=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n)$ が確率変数で，a_{ij} は定数である場合について考察する．

需要量および輸送費が確率変数であるときの輸送問題がこの型になり，これを輸送型の問題と呼ぶ.

（a） 仮定と定式化

仮定 1: 確率変数 b_i は平均値 $\overline{b_i}$ で分散 $\sigma^2{}_{bi}$ をもつ正規分布をなす.

このとき，（1.3）式における確率は簡単な演算により

$$\mathrm{Prob}(\sum_j a_{ij}\,x_j \leqq b_i) = \mathrm{Prob}\left(\frac{b_i-\bar{b}_i}{\sigma_{bi}} \geqq \frac{\sum a_{ij}\,x_j-\bar{b}_i}{\sigma_{bi}}\right) \qquad (2.1)$$

と変形される. **仮定 1** から右辺の括弧の中の左辺の量は平均値 0, 分散 1 の正規分布をなすから，確率化された条件

$$\mathrm{Prob}(\sum_j a_{ij}\,x_j \leqq b_i) \geqq \beta_i$$

は

$$G\left(\frac{\sum_j a_{ij}\,x_j-\bar{b}_i}{\sigma_{bi}}\right) \geqq \beta_i \qquad (2.2)$$

または

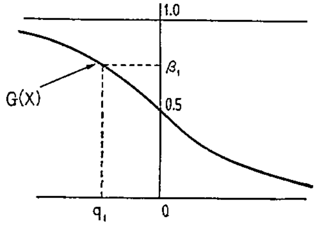
$$\frac{\sum_j a_{ij}\,x_j-\bar{b}_i}{\sigma_{bi}} \leqq G^{-1}(\beta_i) \qquad (2.3)$$

と同値となる. ここで函数 $G(y)$ は誤差積分

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_x^\infty e^{-\frac{y^2}{2}}\,dy \qquad (2.4)$$

である.

1 図



次にベクトル p の要素 p_j の平均値，および分散行列（dispersion matrix）V の要素を下のように定義する.

$$\bar{p}_j = Ep_j, \qquad (2.5)$$

$$v_{ij} = E(p_i-\bar{p}_i)(p_j-\bar{p}_j),$$

$$V = (v_{ij}). \qquad (2.6)$$

このとき，目的函数 $\sum_j p_j x_j$ の分散は

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\sum_j p_j x_j)&=E(\sum_j (p_j-\bar{p}_j)x_j)^2\\&=\sum_{ij}E(p_i-\bar{p}_i)(p_j-\bar{p}_j)x_i x_j=\sum_{ij}v_{ij}x_i x_j=x'Vx\end{aligned} \tag{2.7}$$

となる．

仮定 2：ベクトル p の要素 $p_j(j=1,\cdots\cdots, n)$ は平均値 $\bar{p}_j$, 正値な分散行列 $V(v_{ij})$ をもつ多重正規分布をなすものとする*.

この仮定 2 から，目的函数 $p'x$ は平均値 $\bar{p}'x$ および分散 $x'Vx$ をもつことがわかる**．したがって（1.2）式は次のように変形される．

$$\mathrm{Prob}(p'x\geqq f)=\mathrm{Prob}\left(\frac{p'x-\bar{p}'x}{\sqrt{x'Vx}}\geqq\frac{f-\bar{p}'x}{\sqrt{x'Vx}}\right) \tag{2.8}$$

$$\geqq\beta_o, \tag{2.9}$$

故に

$$\frac{f-\bar{p}'x}{\sqrt{x'Vx}}\leqq G^{-1}(\beta_o), \tag{2.10}$$

または，

$$f\leqq\bar{p}'x+G^{-1}(\beta_o)\sqrt{x'Vx}. \tag{2.11}$$

附録 A に証明されているように，函数 $\sqrt{x'Vx}$ は凸（convex）であるから，次の仮定が成立つとき $G^{-1}(\beta_o)$ は負となり，（2.11）式の左辺は凹函数となる．

仮定 3：　$\beta_o\geqq 0.5$

この仮定は，一般にはつねに許容されるものである．

（1.1），（2.11），（2.3）から，われわれは次の非線型計画の問題を得る．

問題 2.1：Max $f_I=\bar{p}'x-q\sqrt{x'Vx}$, (2.12)

---

* たとえば，Kendall M. G., A. Stuart, *The Advanced Theory of Statistics*, 1958, p. 350.

** （2.7）式より V は非負値（positive semi-definite）行列であることがわかるが，後の議論を簡単にするため正値行列とした．

subject to　$Ax \leqq b^*,$　(2.13)

ここに　$q = -G^{-1}(\beta_o) \geqq 0,\quad q_i = -G^{-1}(\beta_i),$

$b_i^* = \bar{b}_i - q_i \sigma_{bi}$

である.

次へ進む前に，一つの線型計画の問題と仮定を設けておく.

問題 2.0:　Max $\bar{p}'x$

subject to　$Ax \leqq b^*,\ x \geqq 0.$

仮定 4: 問題 2.0 は $b^* \geqq 0$ であり有限な最適解 $\hat{x}_o$ をもつ.

（b） Kuhn-Tucker 条件

前述のように，問題 2.1 の目的函数は凹であり，その条件式は線型で，従ってその領域は凸であるから，次の Kuhn-Tucker 条件(14) を満足する解 x は問題 2.1 の最適解となる.

すなわち，$F_I(x,\ u)$ を一つの Lagrange 函数とし，$x(x_1,\ x_2, \cdots\cdots,\ x_n)$ および $u(u_1,\ u_2, \cdots\cdots,\ u_m)$ を非負ベクトルとするとき，

$$F_I(x,u) = \sum_j \bar{p}_j x_j - q\sqrt{\sum_{ij} v_{ij}\, x_i\, x_j} + \sum_i u_i\Big(b_i^* - \sum_j a_{ij}\, x_j\Big) \tag{2.14}$$

に対して，二つのベクトル $\hat{x}(\hat{x}_1,\ \hat{x}_2, \cdots\cdots,\ \hat{x}_n)$ および $\hat{u}(\hat{u}_1,\ \hat{u}_2, \cdots\cdots,\ \hat{u}_m)$ が

$$\left(\frac{\partial F_I}{\partial x_j}\right)_{\hat{x}\hat{u}} = \bar{p}_j - \frac{q\sum_i v_{ij}\,\hat{x}_i}{\sqrt{\sum_{ij} v_{ij}\,\hat{x}_i\,\hat{x}_j}} - \sum_i \hat{u}_i\, a_{ij} \begin{cases} \leqq 0 & \text{for } \hat{x}_j = 0, \\ = 0 & \text{for } \hat{x}_j > 0, \end{cases} \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{\partial F_I}{\partial u_i}\right)_{\hat{x}} = b_i^* - \sum_i a_{ij}\,\hat{x}_j \begin{cases} \geqq 0 & \text{for } \hat{u}_i = 0, \\ = 0 & \text{for } \hat{u}_i > 0 \end{cases} \tag{2.16}$$

なる関係式 (2.15), (2.16) を満足するとき，この $\hat{x}$ は問題 2.1 の解となる. 以上が，この問題 2.1 に対する Kuhn-Tucker 条件である.

（c）　最適解のいくつかの性質

定理 1: 仮定 4 が成立つならば，問題 2.1 は有限な最適解をもつ.
証明: 問題 2.1 の一つの可能解 (feasible solution) x がもし次の関係,

$$\bar{p}'x-q\sqrt{x'Vx}>\bar{p}'\hat{x}_0$$

を満すとき，$q\geqq 0$ であるから,

$$\bar{p}'x>\bar{p}'\hat{x}_0$$

である．これは $\hat{x}_0$ が問題 2.0 の最適解であることに反する．したがって，問題 2.1 のいかなる可能解 x に対しても,

$$\bar{p}'x-q\sqrt{x'Vx}\leqq\bar{p}'\hat{x}_0 \tag{2.17}$$

である.　　　　Q. E. D.

定理 2: もし $\hat{x}$ および $\hat{u}$ が問題 2.1 の目的函数 f_I の最適解であるときは，f_I の最大値は $\hat{u}'A\hat{x}$ に等しい.
証明: $\hat{x}_j$ を (2.15) 式のおのおのにかけて加えると，不等号の成立つ場合は x_j は 0 であるから,

$$\bar{p}'\hat{x}-q\frac{\hat{x}'V\hat{x}}{\sqrt{\hat{x}'V\hat{x}}}-\hat{u}'A\hat{x}=0,$$

従って，われわれは再び次の関係式をうる.

$$\bar{p}'\hat{x}-q\sqrt{\hat{x}'V\hat{x}}=\hat{u}A\hat{x}. \tag{2.18}$$

Q. E. D.

この関係は目的函数の**一次同次性**に由来するもので，線型計画においても同様な性質があった．これは数値解の**検算**の一方法を与えることになる.

（d）　補助の二次計画

非線型計画問題 2.1 の計算法を見出すために，われわれは次の二次計画を考える.

問題 2.2:　　$\text{Max}\ f_{II}=\bar{p}'x-\dfrac{q}{2R}x'Vx,$　　(2.19)

subject to　　$Ax\leqq b^*,\ x\geqq 0,$　　(2.20)

ここに R は正のパラメーターである.

$x'Vx$ が正値二次形式であるときは，この目的函数 f_{II} は凹であるから，凸領域（2.20）内で f_{II} の局所的極大値は最大値に一致する．問題 2.1 の解法を与えるものとして次の定理を得る.

定理 3: もしも，問題 2.2 の一つの解 $x(R)$ が,

$$R=\sqrt{\hat{x}(R)'Vx(R)} \tag{2.21}$$

という関係を満足するならば，$x(R)$ は問題 2.1 の解である．逆も成立つ.

証明: $x(R)$ が問題 2.2 の解であるための Kuhn-Tucker 条件を書き下すと，$F_{II}(x,u)$ を Lagrange 函数として,

$$F_{II}(x,u)=\sum_j\bar{p}_j x_j-\frac{q}{2R}\sum_{ij}v_{ij}x_i x_j+\sum_i u_i(b_i^*-\sum_j a_{ij}x_j), \tag{2.22}$$

$$\left(\frac{\partial F_{II}}{\partial x_j}\right)_{\hat{x},\hat{u}}=\bar{p}_j-\frac{q}{R}\sum_i v_{ij}x_i-\sum_i\hat{u}_i a_{ij}\begin{cases}\leqq 0 & \text{for } x_j=0,\\ =0 & \text{for } x_j>0,\end{cases} \tag{2.23}$$

$$\left(\frac{\partial F_{II}}{\partial u_i}\right)_{\hat{x}}=b_i^*-\sum_j a_{ij}x_j\qquad\begin{cases}\geqq 0 & \text{for } u_i=0,\\ =0 & \text{for } u_i>0.\end{cases} \tag{2.24}$$

ただし，上の式の中の $\hat{x},\hat{u}$ はパラメーター R の函数 $\hat{x}(R)$, $\hat{u}(R)$ を省略して書いたものである.

さて，$x(R)$ が（2.21）を満足するとすれば，条件式（2.15），（2.16）と条件式（2.23），（2.24）は全く同じくなるから，$x(R)$ は問題 2.1 の解である．逆に，問題 2.1 の最適解 x に対して，次のように R をおくならば:

$$R=\sqrt{x'Vx},$$

この R が 0 でないとき，これを（2.15）の分母と考えると，（2.15）

は (2.23) と全く同値になるかゝる．したがって x は**問題 2.2** の解でもある．　Q. E. D.

行列 V は正値行列と仮定したので，$x'Vx$ が 0 となるのは $x=0$ のときである．$x=0$ が問題 2.1 の解でない条件は後で議論する．

Wolfe[(10)]によれば，どんな二次計画も等価な線型計画に直せるので，われわれの非線型計画も同様な方法で計算されるであろう．

$r(R)=\sqrt{x(R)'Vx(R)}$ の形の函数について，その性質を二三注意しておく．

定理 4: 函数 $r(R)$ は R についての単調非減少函数で，有限な極限値をもつ．

証明: R を無限大に近づけると，(2.19) の非線型項は 0 に近づくから，問題 2.0 となる．従って，

$$\lim_{R\to\infty} r(R)=\sqrt{x_0'Vx_0}$$

次に，x, y を**問題 2.2** の解とし，これに対応する R を R_x, R_y とする．このときわれわれは次の不等式をうる．

$$\bar{p}'x-\frac{q}{2R_x}x'Vx\geqq\bar{p}'y-\frac{q}{2R_x}y'Vy,$$

$$\bar{p}'y-\frac{q}{2R_y}y'Vy\geqq\bar{p}'x-\frac{q}{2R_y}x'Vx.$$

この両辺を加えて整頓すると，

$$(R_x-R_y)(x'Vx-y'Vy)\geqq 0 \tag{2.25}$$

をうる．これから直ちに，$R_x>R_y$ ならば，$x'Vx\geqq y'Vy$ なることがわかり，平方根函数は単調増加であるから，$r(R)$ は単調非減少であることがわかる．　Q. E. D.

さて，条件 (2.23) および (2.24) は R の充分小さいところで，x_j は R に比例し，$\hat{u}_i=0$ であることを示している．すなわち，

$$x_j=\frac{R}{q}t_j\ (j=1,\ 2\cdots\cdots,\ n). \tag{2 26}$$

ここに t_j は R に無関係な x 方向のベクトルである．x_j を（2.23）の各条件式にかけて加えると，

$$\sum \bar{p}_j x_i = \frac{q}{R} \sum_{ij} v_{ij}\, x_i\, x_j,$$

となり，それ故，

$$r = \sqrt{x' V x} = \sqrt{\frac{R}{q} \bar{p}' x} = \frac{R}{q} \sqrt{\bar{p}' t} \tag{2.27}$$

を得る．

定理 5：

$$\frac{1}{q} \sqrt{\bar{p}' t} \geqq 1 \tag{2.28}$$

なるとき，問題 2.1 の単一の（または，縮退した）解が得られる．

証明：R が無限大に近づくと $r(R)$ は一定値 r_0 に近づく．従って，ある小さな R の値に対して $R < r(R)$ ならば，曲線 $r(R)$ は直線 $r = R$ と一点または線分で交わるであろう．問題 2.1 の目的函数は凹であるから，決して**離れた二つ以上の点で交わることはない**．線分で交わるときは，

$$q = \sqrt{\bar{p}' t}, \quad \sqrt{x' V x} = R$$

であり，$q^2 = p' t$, $\bar{p}' x = \dfrac{R}{q} \bar{p}' t = qR$

故に　$\bar{p}' x - q\sqrt{x' V x} = 0$（$R$ に無関係）

となり，縮退することになる．　Q. E. D.

（e） 数値例

非線型計画，問題 2.1 を例題について具体的に計算してみる．

例題：

$$\begin{array}{ll} \bar{p}_1 = 10,\ \bar{p}_2 = 12 & \begin{cases} q = 1.645 \ \text{for}\ \beta = 0.95 \\ q = 2.323 \ \text{for}\ \beta = 0.99 \end{cases} \\ v_{11} = 10,\ v_{12} = 7 & \\ v_{21} = 7,\ v_{22} = 20 & \\ a_{11} = 2,\ a_{12} = 1,\ b_1{}^* = 3 & \end{array} \tag{2.29}$$

このとき，われわれの非線型計画は，

$$\mathrm{Max}\ f_I=10x_1+12x_2-q\sqrt{10x_1^2+14x_1x_2+20x_{i2}} \qquad (2.30)$$

subject to　　　$2x_1+x_2\leqq 3,\ x_1,\ x_2\geqq 0,$　　　(2. 31)

となり，その補助の二次計画は

$$\mathrm{Max}\ f_{II}=10x_1+12x_2-\frac{q}{2R}(10x_1^2+14x_1x_2+20x_2^2),$$

subject to　　　$2x_1+x_2\leqq 3,\ x_1, x_2\geqq 0$　　　(2. 32)

となる．

まず第一に，楕円 $f_{II}=\mathrm{const}$ の中心の座標を計算しよう．

$$\frac{\partial f_{II}}{\partial x_1}=0:\ 10x_1+7x_2=10\frac{R}{q},$$
$$\frac{\partial f_{II}}{\partial x_2}=0:\ 7x_1+20x_2=12\frac{R}{q}, \qquad (2.33)$$

これらをといて，

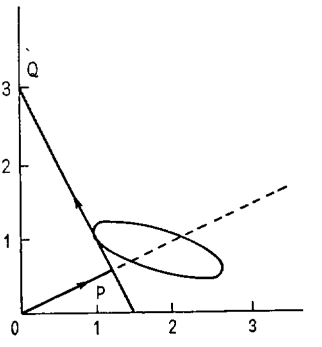
$$x_1=\frac{116}{151}\ \frac{R}{q},\ x_2=\frac{50}{151}\ \frac{R}{q} \qquad (2.34)$$

を得る．充分小さい R に対しては，前述したように，これらは Kuhn-Tucker 条件を満す．2 図において，R が増加するに従って，中心は

$$2x_1+x_2=3$$

という直線の方向へ原点から動いて，点 P に到達する．そこでは

2 図



$$x_1=1.234,\ x_2=0.532,$$
$$\frac{R}{q}=1.606,$$
$$r(R)=5.484,\ R=\begin{cases}2.643 \text{ for } \beta_0=0.95\\ 3.736 \text{ for } \beta_0=0.99,\end{cases} \qquad (2.35)$$

という結果を得る．点 P に到達してから，最適解は $2x_1+x_2=3$ 上を Q の方へ動き，そこへ到着する．P と Q の間の，問題（2. 32）の解

は，楕円 f_{II}=定数と，線分 PQ の接点として求められる．すなわち，

$$\frac{df_{II}}{dx_1}=\frac{\partial f_{II}}{\partial x_1}+\frac{\partial f_{II}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dx_1}=0:\ 4x_1+33x_2=14\frac{R}{q},\qquad(2.36)$$

$$2x_1+x_3=3,$$

これらから

$$x_1=\frac{99}{62}-\frac{14}{62}\frac{R}{q},\quad x_2=-\frac{12}{62}+\frac{28}{62}\frac{R}{q}.\qquad(2.37)$$

点 Q において，

$$x_1=0,\ x_2=3,\ \frac{R}{q}=\frac{99}{14},$$

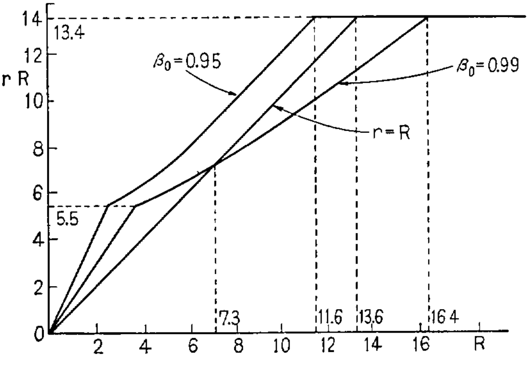
$$r(R)=\sqrt{20\times9}=13.416,\ R=\begin{cases}11.633 \text{ for } \beta_0=0.95\\16.427 \text{ for } \beta_0=0.99,\end{cases}\qquad(2.38)$$

なる値を得る．この R よりも大きい値に対しては，問題 2.2 の最適解は Q 点に留り，これは問題 2.0 の解に他ならない．

$\beta_0=0.95$ と 0.99 の二つについて，曲線 $r(R)$ が 3 図に示されてある．$\beta_0=0.95$ に対しては，$r(R)$ と直線 $r=R$ との交点は Q 点に到達してから後で交わっているから，問題 2.1，(2.30) に対する解は $x_1=0$, $x_2=3$ である．しかしながら，$\beta_0=0.99$ に対しては，P と Q の間に解が存在する．(2.37) の x_1, x_2 を使って，

$$R=\sqrt{x'Vx}$$

3 図



を満す R を計算すると，$R=7.274$ を得る．結局問題 2.1，(2.30)，(2.31) は $\beta_0=0.95$ と 0.99 に対して次の解をうる．

$$\begin{cases}\beta_0=0.95,\ \hat{x}_1=0,\ \hat{x}_2=3,\ \hat{u}_1=4.6434,\ r=R=13.416, \\ q=1.645,\ \bar{p}'\hat{x}=36,\ f_I=13.391,\ \hat{u}'A\hat{x}=4.6434\times 3=13.390.\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_0=0.99,\ \hat{x}_1=0.8897,\ \hat{x}_2=1.2206,\ \hat{u}_1=2.2150,\ r=R=7.274, \\ q=2.323,\ \bar{p}'\hat{x}=23.544,\ f_I=6.646,\ \hat{u}'A\hat{x}=2.215\times 3=6.645.\end{cases}$$

ここで，f_I と $\hat{u}'A\hat{x}$ が大体等しいことは計算の check になる．また，2 図の線分 PQ 上で，目的函数 (2.30) を直接に計算しても同じ結果が得られる．

この例は特別な場合であるけれども，われわれは，いくつかの興味深い事実を見出す．activity x_2 の利益は 12 で x_1 のそれより大きいから，低い管理水準 (0.95) のもとでは activity x_2 だけを使用するとよい．しかし高い管理水準 (0.99) では，x_2 の利益の分散 v_{22} も比較的大きいから，x_2 だけを使用することは危険であり，x_1 と混合して用いた方がよいという結果になる．すなわち，ここに，確率論的計画の意味がある．更にくわしい計算をおこなえば v_{12} の影響などもわかるであろう．

3.　計算法の概観

前節では，簡単な例題のグラフによる解法を示したが，大きな問題に対しては，計算機に適した計算法 (algorithm) を必要とするのであろう．現在，二つの方法が考えられる．一つは繰り返し法で他は内挿法である．

(a)　繰り返し法

手順 1: 問題 2.0 より $r_0=\sqrt{x_0'Vx}$ を求め，R の初期値とせよ．

手順 2: この R を使って問題 2.2 を解き $x(R)$ を求めよ．もし，$r=\sqrt{x'Vx}=R$ ならば，$x(R)$ が問題 2.1 の解である．手順 3 に移れ．もし $r<R$ ならば r の値を R とし，この手順 2 を繰返えせ．も

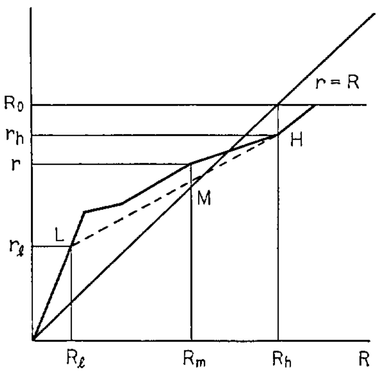
し $r>R$ ならば誤りである．（$r(R)$ は単調非減少であることに注意，4 図参照）

手順 3：解の縮退が起っているかどうかをテストするために，R を ΔR だけ減少して，交点が依然として $r=R$ の上にあるかどうかを見る．もし，縮退していれば，この手順3をはじめから繰返えせ．もし，最早縮退た解がなければ，計算を終了せよ．もしも充分小さな R に対して交点が見出せないときは，われわれは，無意味な解 $x=0$ を得るであろう．

（b）内挿法

手順 1：問題 2.0 を解いて R_o を得よ．R_o に対して問題 2.2 を解き，$r(R_o)$ を得よ．もし $R_o=r(R_o)$ ならば計算を止めよ．$r(R_o)<R_o$ ならば R_o を R_h に，r を r_h とせよ．ここに R_h, r_h は 4 図の点 H の座標である．定理5の（2.28）が満されているとして，小さな R に対して点 L をとり，その座標を R_l, r_l とせよ．

4 図



手順 2：線分 LH と $r=R$ の交点 M を計算せよ．M の横座標を R_m とし，R_m に対して問題2を解き r を求めよ．もし，$r<R_m$ ならば R_m を R_h とし，r を r_h として，この手順2を繰返えせ．$R_m<r$ ならば，R_m を R_l, r を r_l としてこの手順2を繰返えせ．$r=R_m$ ならば，前と同様にして縮退をチェックせよ．もし縮退がなければ計算を止めよ．

両方について，Wolfe の二次計画の方法はサブルーチンとして用いることができる．

4.　検討と一般論への展望

（a）　$x=0$ の解

理論的には，計算における不必要な努力をしないために，$x=0$ の存在するための必要充分条件を簡単な形で見出すことが望ましいけれども，今回は存在しないための充分条件のみにとどめておくことにする．(2.12) 式の f_I を x_j について微分すると，

$$\frac{\partial f_I}{\partial x_j}=\bar{p}_j-q\frac{\sum v_{ij}\,x_i}{\sqrt{x'Vx}} \tag{4.1}$$

を得る．ε_k を充分小さくとって，点 $P_k\,(0,\ 0,\cdots\cdots,\ \varepsilon_k,\ 0,\cdots\cdots 0)$ を考えると，

$$\left(\frac{\partial f_I}{\partial x_k}\right)_{\substack{x_k=\varepsilon_k\\ \text{他は }0}}=\bar{p}_k-q\sqrt{v_{kk}}>0, \tag{4.2}$$

$$p_k/\sqrt{v_{kk}}>q$$

ならば，f_I はこの点の P_k の近傍で増加しており f_I は連続であるから，原点 $x=0$ は最大点ではない．実際問題としては，平均値と標準偏差の比は $2.323(\beta_0=0.99$ として）より大きいから（もしそうでないときは，データの不確定性が非常に大きいということになる．）許容しうる仮定である．さらに (4.2) は $j=1,\cdots\cdots n$ のうちで少くとも一つについて成立てばよい．

（b）　最小値問題

これまでは，最大値問題のみを取扱ってきたが，(1.1), (1.2) および (1.3) の代りに，

$$\text{Min } f, \tag{4.3}$$

$$\text{Prob}(c'x\leqq f)\geqq\beta_0, \tag{4.4}$$

$$\text{Prob}(\sum_j a_{ij}\,x_j\geqq b_i)\geqq\beta_i, \tag{4.5}$$

$$x_j\geqq 0,$$

という問題を考えることができ，これらは，

$$\text{Min } f=\bar{c}'x+q\sqrt{x'Vx}, \tag{4.6}$$

$$\sum_j a_{ij}x_j \geqq b_i+q_i\sigma_{bi},\ x_j\geqq 0 \tag{4.7}$$

という，前と類似な問題に書き直すことができる．これは，凸領域における凸函数最小の問題であることは直ちに分り，同様な方法で解ける．

(c)　より一般的な確率論的計画

最後に，より一般的な確率論的計画について述べる．すなわち，(1.3) における a_{ij} も多重正規分布をなす場合である．このとき，

$$\text{Prob}\left(\sum_j a_{ij}x_j\leqq b_i\right)\geqq\beta_i$$

は $\beta_i\geqq 0.5$ であるから

$$(\bar{b}_i-\sum\bar{a}_{ij}x_j)-q_i\sqrt{\sigma_{bi}{}^2+2\sum_j w_{ij}x_j+\sum_{jk}w_{ijk}x_jx_k}\geqq 0 \tag{4.8}$$

となる．ここに

$$\begin{aligned}&q_i=-G^{-1}(\beta_i)\geqq 0,\ \bar{a}_{ij}=Ea_{ij},\\&w_{ij}=E(b_i-\bar{b}_i)(a_{ij}-\bar{a}_{ij}),\ w_{ijk}=E(a_{ij}-\bar{a}_{ij})(a_{ik}-\bar{a}_{ik}).\end{aligned} \tag{4.9}$$

(4.8) の左辺の根号は確率変数 b_i に対する dummy な変数として x_{n+1} を考えれば，$\sqrt{x'Vx}$ の形をしており，これは附録 A により凸であるから，$x_{n+1}\equiv 1$ と置いても凸性は失はれない．従って，(4.8) の左辺は x の凹函数であり，(4.8) は x の凸領域となる．

そこで，われわれの問題は，

$$\text{Max}\quad f, \tag{4.9}$$

subject to
$$-f+\sum_{j=1}^{n}\bar{p}_jx_j-q\sqrt{\sum_{i,j=1}^{n}v_{ij}x_ix_j}\geqq 0, \tag{4.10}$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\bar{a}_{ij}x_j-q_i\sqrt{\sigma_{bi}{}^2+2\sum_{j=1}^{n}w_{ij}x_j+\sum_{jk=1}^{n}w_{ijk}x_jx_k}+b_i\geqq 0, \tag{4.11}$$

$$x_j\geqq 0$$

となる．もし少し見やすくするために，(4.10)(4.11) を

$$g_o(x)\geqq 0 \tag{4.12}$$

$$g_i(x)\geqq 0,\ i=1,\cdots\cdots,\ n, \tag{4.13}$$

とおくと，g_i は凹函数である

さて，附録 B より，$g_i(x)\geqq 0$ が凸領域で $g_i(x)$ が微分可能なときは，曲面 $g_i(x)=0$ 上の一点 x_0 での接平面よりつくられる領域，

$$(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}g_i(x_0)\geqq 0 \tag{4.14}$$

は凸領域 $g_i(x)\geqq 0$ を含むから，Kelley[13] にならって，切断面法 (Cutting plane method) で逐次近似的に解に近づくことができる．

以上は切断面法であるが，問題の凸性がわかっているから，傾斜法によっても解は得られるであろう．これらはすべて今後の研究課題となる．

附　　録 A

定理 A：$\sqrt{x'Vx}$ は凸函数 (convex) である．

証明：x, y および z は次の関係をもつベクトルとする．

$$z=\lambda x+(1-\lambda)y,\ 0\leqq\lambda\leqq 1.$$

このとき，

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Sign}\{\sqrt{z'Vz}-(\lambda\sqrt{x'Vx}+(1-\lambda)\sqrt{y'Vy})\}\\
&=\mathrm{Sign}\{(z'Vz)-(\lambda\sqrt{x'Vx}+(1-\lambda)\sqrt{y'Vy})^2\}\\
&=\mathrm{Sign}\{\lambda^2x'Vx+2\lambda(1-\lambda)x'Vy+(1-\lambda)^2y'Vy\\
&\qquad -\lambda^2x'Vx-2\lambda(1-\lambda)\sqrt{x'Vx}\sqrt{y'Vy}-(1-\lambda)^2y'Vy\}\\
&=\mathrm{Sign}\{2\lambda(1-\lambda)(x'Vy-\sqrt{x'Vx}\sqrt{y'Vy})\}.
\end{aligned}\tag{a}$$

行列 V を非負行列 (positive semi-defisite) とすると，任意の実数 t に対して，

$$(tx+y)'V(tx+y)=t^2x'Vx+2tx'Vy+y'Vy\geqq 0$$

故に

$$(x'Vy)^2\leqq(x'Vx)(y'Vy),$$

$$x' Vy \leqq \sqrt{x' Vx}\sqrt{y' Vy}.$$

したがって，sign function (a) は非正となり，

$$\sqrt{z' Vz} - (\lambda\sqrt{x' Vx} + (1-\lambda)\sqrt{y' Vy}) \leqq 0$$

を得るから，$\sqrt{x' Vx}$ は凸 (convex) である．　Q. E. D.

附　録 B

(i)　$g(x)$ が x の凹 (concave) 函数であるとき，領域 $g(x) \geqq 0$ は凸である．

(ii)　この $g(x) \geqq 0$ に含まれるすべての点 x は，$g(x_0)=0$ を満す点 x_0 における接平面によってつくられ半空間 (half space)

$$(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}g(x_0) \geqq 0$$

内に含まれる．ここに$\frac{\partial}{\partial x}g$ は g の gradient vector を示す．

証明：

(i)　$0 \leqq \lambda \leqq 1$ なる λ をとり，x, y をそれぞれ $g(x) \geqq 0$, $g(y) \geqq 0$ を満すベクトルとするとき，g は concave であるから，

$$g(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqq \lambda g(x) + (1-\lambda)g(y) \geqq 0.$$

故に　$g(x) \geqq 0$ は凸である．

(ii)　g は concave であるから，

$$g(x_0) + \lambda(g(x) - g(x_0)) \leqq g(x_0 + \lambda(x-x_0))$$

$$= g(x_0) + \lambda(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}g(x) + 0(\lambda^2).$$

故に $\lambda \to 0$ とおいて，

$$g(x) \leqq g(x_0) + (x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}g(x_0)$$

を得る．$g(x_0)=0$, $g(x) \geqq 0$ であるから，

$$(x-x_0)\frac{\partial}{\partial x}g(x_0) \geqq 0$$

となる．　Q. E. D.

文　献

(1) Dantzig. G. B., "Linear Programming Under Uncertainty," Management Science, vol. 1, 1955, pp 197—206.

(2) Ferguson, A. R., G. B. Dantzig, "Allocation of Aircraft to Routes—An Example of Linear Programming Under Uncertain Demand," Management Science, vol. 3, 1956, pp. 45—73.

(3) Charnes, A., W. W. Cooper, G. H. Symonds, "Cost Horizons and Certain Equivalent: An Approach to Stochastic Programming of Heating Oil," Management Science, vol. 4, 1958, pp. 235—263.

(4) Charnes, A., W. W. Cooper, "Chance Constrained Programming," Management Science, vol. 6, 1959, pp. 73—79.

(5) Madansky, A., "Inequalities in Stochastic Programming," Management Science vol. 6, 1960, pp. 197—204.

(6) Kataoka, S., "On Stochastic Programming 1—Stochastic Programming and Its Application to Production Horizon Problem—," The Hitotsubashi Journal of Arts and Sciences, vol. 2, No. 1, March 1962, pp. 23—36.

(7) Kataoka, S., "On Stochastic Programming II—A Preliminary Study Of A Stochastic Programming Model—" The Hitotsubashi Journal of Arts and Sciences, vol. 2, No. 1, March 1962, pp. 36—44.

(8) Kataoka, S., "On Stochastic Programming III—A Stochastic Programming Model—" The Hitotsubashi Journal of Arts and Sciences, vol. 2, No. 1, March 1962, pp. 44—55.

(9) Charnes, A., W. W. Cooper, "Chance Constraints and Normal Deviates," Journal of American Statistical Association, March 1962, pp. 134—148.

(10) Wolfe, P. "The Simplex Method for Quadratic Programming," Econometrica, vol. 27, 1959, pp. 382—389.

(11) Zoutendiik, G., "Maximizing a function in a convex region," J. Roy. Statist. Soc. B 21, 1959.

(12) Arrow, K. J., L. Hurwicz, H. Uzawa, *Studies in Linear and Nonlinear Programming*, Stanford Mathematical Studies, 1958.

(13) Kelley, J. E. Jr., "The Cutting Plane Method for Solving Convex Programs," Industrial and Applied Mathematics vol. 8, 1960, pp. 703—712.

(14) Kuhn, H. W., A. W. Tucker, "Nonlinear Programming" *Second*

Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, 1951, pp. 481—492.