

普通債の価格変動性の指標について

木村 増三

一 はじめに

ここに普通債の価格変動性というのは、利回り（本稿では、有期債の満期利回りおよび永久債の永久利回りを総称して簡単に「利回り」という）の一定の変化に應ずる価格変化の程度を意味する。このような価格変動性を測る指標については、すでに別稿⁽¹⁾で若干の考察を試みたことがあるが、ここでは二種の指標を取り上げるにとどまった。本稿では他の二種の指標について前稿と同様の考察を試みる。ただし、論述のために必要な限りにおいて前稿の考察を再述することとする。

前稿で取り上げた二種の指標は、マコーレーの定義による duration⁽²⁾（前稿ではこれを実効残余期間と訳した）および価格の利回り弾力性の絶対値である。前稿と同様に本稿でも、前者を記号 D によって表わし、後者を記号 E によって表わす。本稿で新たに取り上げる二種の指標のうちの一種は、後掲の算式により計算され、 D と近似した数値を結果するものであって、記号 F によって表わすことにする。

D 、 E および F の考察における前提および使用記号は次のとおりとする。

- ① 利付債（有期利付債および永久債）の利払日は、発行日から半年ごととする。
- ② 利付債の半年当り券面利率（coupon rate——小数で表示する）を c で表わす。 $0.1N \leq V < 0$ とする。
- ③ 有期利付債についての満期までの残存利払回数 n で表わす。 n は正の整数である。
- ④ 有期債（有期利付債および割引債）についての満期までの残余期間の長さ（半年を一として表示する）を m で表わす。

有期利付債については $m \geq 1$ である。

- ⑤ 利付債についての、発行日または直前の利払日（現在日⁽³⁾が利払日に当るときは現在日）から現在日までの片おとし計算による経過日数を、次回利払の対象総日数に対する割合によって表示したものを α で表わす。 $0 \leq \alpha \leq 1$ である。 α がゼロになるのは、現在日が利払日に当る場合であり、それ以外の場合には $0 < \alpha < 1$ である。

有期利付債については、 $m \geq 1$ である。現在日が利払日に当る場合には $m \geq 1$ であり、それ以外の場合には $m \geq 1$ である。

- ⑥ 額面一円当りの現在価格⁽³⁾（利子含み値段）を p で表わす。
- ⑦ 有期債の額面一円当りの満期償還金は、額面と等額の一円とする。
- ⑧ 半年単位の複利による利回りの実効半年率（小数で表示する）を i で表わす。 $0.1N \leq V < 0$ とする。

そうすると、 p とその他の諸変数との関係は、有期利付債については、

$$[1A] \quad p = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+i)^i} + \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n} \left\{ 0 \sum_{i=1}^n \frac{1}{(1+i)^i} + \frac{1}{(1+i)^n} \right\}$$

となり、その特殊な場合として $m=1$ のときには、次式のようになる。

$$[1A] \quad p = (1+e)/(1+i)^{1-a}$$

他方、割引債については、

$$[1B] \quad p = 1/(1+i)^m$$

また、永久債については、

$$[1C] \quad p = e \sum_{i=1}^{\infty} 1/(1+i)^i - a = (1+i)^{-a} e/i$$

となる。

(1) 木村増三「債券の実効残余期間と債券価格の利回り弾力性」一橋論叢八三一六（昭和五五年六月）

(2) F. R. Macaulay, *The Movements of Interest Rates, Bond Yields, and Stock Prices in the United States since 1856*, National Bureau of Economic Research, 1938, pp. 44-53 に於て定義された duration を指す。

(3) ここにいう現在日は、実際の現在日ではなく、もしも実際の現在日に取引が成立すると仮定すれば、その取引の決済が行われるべき日を意味する。これに対して、⑥にいう現在価格は、実際の現在日における価格を意味する。

二 指標 D (duration) のつじつ

二一 D の定義および算式

一時点の一債券に含まれる債務の内容は、有期利付債の場合には将来各回の利払債務および償還債務であり、割引債の場合には償還債務であり、永久債の場合には無期限の将来にわたる各回の利払債務である。 D は、満期前償還が行われないものと仮定して、各銘柄に含まれるそれぞれの債務についての履行期限までの残余期間の長さを、それぞれの債務金額の現在価値（利回り i を割引利率に用いる）をウェイトにして加重平均したものである。

D の値 (半年をひととして表示する) を求める算式は、有期利付債については、

$$[2A] \quad D = (1-\alpha) \cdot \frac{c(1+i)^{1-\alpha}}{p} + (2-\alpha) \cdot \frac{c(1+i)^{2-\alpha}}{p} + \dots + (n-\alpha) \cdot \frac{c(1+i)^{n-\alpha}}{p} + (n-\alpha) \cdot \frac{1/(1+i)^{n-\alpha}}{p}$$

$$= \frac{1}{p} \left\{ c \sum_{t=1}^n \frac{t-\alpha}{(1+i)^{t-\alpha}} + \frac{n-\alpha}{(1+i)^{n-\alpha}} \right\} = \frac{(1+i)^{\alpha}}{p} \left\{ c \sum_{t=1}^n \frac{t}{(1+i)^t} + \frac{n}{(1+i)^n} \right\} - \alpha$$

であり、その特殊な場合として $n=1$ (したがって $m=1$) のときは、次式のようになる。

$$[2A'] \quad D = 1 - \alpha = m$$

他方、割引債につづては、常に、

$$[2B] \quad D = m$$

また、永久債については、

$$[2C] \quad D = (1+i)/i - \alpha = 1/i + 1 - \alpha$$

である。

ところで、 D は、(1) (2) に対する普通債価格の弾力性の絶対値に等しい。すなわち、

$$[2] \quad D = - \frac{\partial p}{\partial(1+i)} \cdot \frac{1+i}{p} = - \frac{\partial p}{\partial i} \cdot \frac{1+i}{p}$$

である。

二二 D に対する券面利率 c の影響

ここでは割引債を、券面利率 c がゼロである銘柄として考える。(他の指標についても、 c の影響を考察する場合

には同様とする。)

永久債および $n=1$ (したがって $m=1$) である利付債の場合には、前記の [2C] および [2A] を見れば明らかのように、 D は c の大小によって影響されない。また、[2A] と [2B] から、 $m=1$ である有期債の全般を通じて、 D は c の大小によって影響されない、ということが出来る。

$n \geq 2$ (したがって $m < 1$) である有期利付債の場合には、

$$[2.1] \quad \frac{\partial D}{\partial c} = -\frac{i\{(n-1)(1+i)^n + 1\} - \{(1+i)^n - 1\}}{\{c(1+i)^n + i - c\}^2} < 0$$

であるから、他の諸条件が等しければ、 c が大なるほど D はより小となる。そして、[2A] またはそれを変形した

$$[2Aa] \quad D = n - \alpha - \frac{(1+i)^c}{pi} \left\{ n - 1 - \frac{1 - (1+i)^{-(n-1)}}{i} \right\}$$

から明らかなように有期利付債の D は常に m より小さく、また、[2B] の示すとおり割引債の D は常に m に等しいから、 $m < 1$ である有期債の全般を通じて、他の諸条件が等しければ、 c が大なるほど D はより小となる、ということが出来る。

二—三 D に対する満期までの残余期間 m の影響

ここでは永久債を、満期までの残余期間 m が無限大である銘柄として考える。(他の指標についても、 m の影響を考察する場合には同様とする。)

(一) 割引債および $n=1$ (したがって $m=1$) である利付債の場合

前記 [2B] および [2A] に示したように、どちらの場合にも $D \equiv m$ であるから、他の諸条件のいかに関係なく m が大なるほど D はより大となる。

(二) $m \geq N_2$ (したがって $m \geq 1$) である利付債—— $m \geq N_2$ である有利利付債、および永久債——の場合

ここでは、 α を所与とした場合における n の大小の影響と、 n を所与とした場合における α の大小の影響とに分けて、考察を行う。

(二一) n の大小の影響

α を含めて他の諸条件が等しいならば、 $m \equiv m$ であるときの D の値に対する $m \equiv m+1$ であるときの D の値の増分 (以下、 k を基準とする D の増分と呼び、 ΔD で表わす) は次式のようになる。ただし、 k は、 $m \geq N_2$ なる任意の整数とする。

$$[2.2] \quad \Delta D = \frac{(i-c) \left[c(1+i)^k \left\{ 1 - ki + \frac{i+i^2}{i-c} \right\} + i-i-c \right]}{\{ c(1+i)^{k+1} + i-i-c \} \{ c(1+i)^k + i-i-c \}}$$

この式の分母は常に正である。そして、分子は次のように変形することができる。

$$(i-i)c[1+ki(1+i)^k - (1+i)^k] + ci \left\{ (1+i)^{k+1} - 1 + \frac{i}{c} \right\}$$

ここで第二項は常に正であり、第一項中の c およびそれに続く -1 内も常に正であるから、 $c \geq 0$ ならば、 ΔD は正である。すなわち、 α を含めて他の諸条件が等しく、かつ $c \geq 0$ であるならば、 n が大なるほど D はより大となる。他方、 $c < 0$ である場合においては、[2.2] の分子 (したがって ΔD) は正にも負にもなりうる。それが負となるための条件は、

$$[2.3] \quad (1+i)^* \left\{ k - \frac{1}{i} - \frac{1+i}{i-c} \right\} > \frac{i-c}{ai}$$

であり、この右辺は所与の正の値をとるから、 $k \geq \frac{1}{i} + \frac{(1+i)}{(i-c)}$ であるならば、この条件は成立しない。 k がこれよりも大きく、かつ [2.3] を成立させるほどに大きい場合にのみ、 ΔD は負となる。

[2.3] を成立させる k の値のうち最小のものを k^* で表わすことにすれば、次のように結論することができる。 α を含めて他の諸条件が等しければ、 $k \geq k^*$ なる k の値を基準とする ΔD は正であって、 $k < k^*$ なる範囲内では n が大なるほど D はより大となるが、 $k \leq k^*$ なる k の値を基準とする ΔD は負であって、 $k > k^*$ なる範囲内では n が大なるほど D はより小となる。所与の条件のもとで D が最大となるのは、 $k = k^*$ のときである。

k^* について計算例をあげてみよう。 α はゼロとする。 $c = 0.03$, $i = 0.05$ のとき、 $k^* = 73$ である。 $n = 73$ のときの D の値は 21.38 である。 $n \leq 73$ なる範囲内では、 n が大なるほど D はより小となり、永久債の D の値 (21.00) に近づいてゆく。また、 i 以外の条件が上記と同じで $i = 0.04$ のとき、 $k^* = 130$ である。 $n = 130$ のときの D の値は 26.05 である。 $n \leq 130$ なる範囲内では、 n が大なるほど D はより小となり、永久債の D の値 (26.00) に近づいてゆく。

(12) α の大小の影響

$$[2.4] \quad \frac{\partial D}{\partial \alpha} = -1 < 0$$

だから、他の諸条件が等しければ、 α が小なるほど D はより大となる。 $n = 1$ であるから、これは、所与の n のもとで m が大なるほど D がより大となることを意味する。

二一四 D に対する利回り i の影響

(一) 割引債および $n=1$ である (したがって $n=1$ である) 利付債の場合
前記の [2B] および [2A] に示したように常に $D \equiv 1$ であるから、 D は i の大小によって影響されない。

(二) 永久債の場合

前記の [2C] から、

$$[2.5] \quad \frac{\partial D}{\partial i} = -\frac{1}{i^2} < 0$$

が導かれるから、他の諸条件が等しければ、 i が大なるほど D はより小となる。

(三) $n \geq 2$ である有期利付債の場合

この場合にも、他の諸条件が等しければ、 i が大なるほど D はより小となる。その点は、以下のようにして証明することができる。まず、前記の [2A] を次のように書き換える。

$$[2Ab] \quad D = 1 - \alpha + \frac{c(1+i)^n - c + (n-1)i^2 - nci}{i\{c(1+i)^n + i - c\}}$$

これから次式を得る。

$$[2.6] \quad \frac{\partial D}{\partial i} = \frac{-cX}{i^2\{c(1+i)^n + i - c\}^2}$$

ただし、

$$X = c\{(1+i)^{2n} + 1 - 2(1+i)^n - n^2i^2(1+i)^{n-1} + i[2(1+i)^n - 2 - ni - nci(1+i)^{n-1} + (n-1)i\{1 + ni(1+i)^{n-1} - (1+i)^n\}]\}$$

ここに、 α でくくった「」内および i でくくった「」内は、いずれも正であるから、 X は正であり、 $\partial D/\partial i$ は負である。

三 指標 E (価格の利回り弾力性の絶対値) について

三—一 E の定義および算式

E は、利回り i に対する普通債価格の弾力性の絶対値であり、

$$[3] \quad E = -\frac{\partial p}{\partial i} \cdot \frac{i}{p}$$

である。その値を求める算式は、有期利付債については、

$$[3A] \quad E = -\frac{i}{p} \left\{ \sum_{t=1}^n \frac{t-\alpha}{(1+i)^{t+1-\alpha}} + \frac{n-\alpha}{(1+i)^{n+1-\alpha}} \right\} = \frac{i}{1+i} \cdot \frac{1}{p} \left\{ \sum_{t=1}^n \frac{t-\alpha}{(1+i)^{t-\alpha}} + \frac{n-\alpha}{(1+i)^{n-\alpha}} \right\}$$

であり、その特殊な場合として $n=1$ のときには、次式のようになる。

$$[3A'] \quad E = (1-\alpha) \cdot i / (1+i) = m \cdot i / (1+i)$$

他方、割引債については、

$$[3B] \quad E = m \cdot i / (1+i)$$

また、永久債については、

$$[3C] \quad E = 1 - \frac{\alpha i}{1+i} = \frac{i}{1+i} \left(\frac{1+i}{i} - \alpha \right)$$

である。

これらを [2] および [2A] ないし [2C] と比べてみればわかるように、常に次式が成り立つ。

$$[3a] \quad E = \frac{i}{1+i} \cdot D$$

三—二 E に対する券面利率 e の影響

前記 [3a] に示したように $E = D \cdot \frac{i}{1+i}$ であるから、 D について前述したところと同様に、次のように言うことができる。

① 永久債および $\frac{i}{1+i}$ である有期債の場合には、 E は e の大小によって影響を受けない。

② $\frac{i}{1+i}$ である有期債の場合には、他の諸条件が等しければ、 e が大なるほど E はより小となる。

三—三 E に対する満期までの残余期間 m の影響

(一) 割引債および $\frac{i}{1+i}$ (したがって $\frac{i}{1+i}$) である利付債の場合

どちらの場合にも $E = D \cdot \frac{i}{1+i}$ であるから、 i が等しければ、 m が大なるほど E はより大となる。

(二) $n \geq 2$ (したがって $\frac{i}{1+i}$) である利付債—— $\frac{i}{1+i}$ である有期利付債、および永久債——の場合

(二—1) α を所与としたときの n の大小の影響

$E = D \cdot \frac{i}{1+i}$ であるから、 D について前述したところと同様に、次のように言うことができる。

α を含めて他の諸条件が等しいならば、 $\frac{i}{1+i}$ である場合には、 n が大なるほど E はより大となり、 $\frac{i}{1+i}$ である場合には、 $\frac{i}{1+i}$ なる範囲内では n が大なるほど E はより小

となる。所与の条件のもとで E が最大となるのは、 $n = k^*$ のときである。

k^* の値は、 $n = 1$ (二) で述べたとおりである。 $\alpha = 0, c = 0.03, i = 0.05$ のとき、 $k^* = 73$ である。 $n = 73$ のときの E の値は 1.0181 である。 $n = 73$ なる範囲内では、 n が大なるほど E はより小となり、永久債の E の値 (1.0000) に近づいてゆく。また、 i 以外の条件が上記と同じで $i = 0.04$ のとき、 $k^* = 130$ である。 $n = 130$ のときの E の値は 1.0020 である。 $n = 130$ なる範囲内では、 n が大なるほど E はより小となり、永久債の E の値 (1.0000) に近づいてゆく。

(二) n を所与とした場合における α の大小の影響

$$[3.1] \quad \frac{\partial E}{\partial \alpha} = \frac{i}{1+i} \cdot \frac{\partial D}{\partial \alpha} = -\frac{i}{1+i} < 0$$

であるから、他の諸条件が等しければ、 α が小なるほど D はより大となる。 $n = 1$ であるから、これは、所与の n のもとで m が大なるほど E がより大となることを意味する。

三—四 E に対する利回り i の影響

(一) 割引債、 $n = 1$ である利付債、および永久債の場合

割引債および $n = 1$ (したがって $n \leq 1$) である利付債の場合には、前記の [3B] および [3A] から、

$$[3.2] \quad \frac{\partial E}{\partial i} = \frac{m}{(1+i)^2} > 0$$

が導かれるから、他の諸条件が等しければ、 i が大なるほど E はより大となる。

永久債の場合には、[3C] から、

$$[3.3] \quad \frac{\partial E}{\partial i} = -\frac{\alpha}{(1+i)^2} \leq 0$$

が導かれるから、 α がゼロであるときは、 E は i の大小によって影響されないが、 α が正であるときには、 i が大なるほど E はより小となる。

(1) $n \geq 2$ である有利付債の場合

前記の [3A] を、

$$[3Aa] \quad E = E_n + E_a$$

と書く、

$$E_n = 1 + \frac{i\{(n-1)i - nc - 1\}}{(1+i)[c(1+i)^n + i - c]} ; \quad E_a = -\frac{\alpha i}{1+i}$$

と書き換え、それから導かれた

$$[3.4] \quad \frac{\partial E}{\partial i} = \frac{\partial E_n}{\partial i} + \frac{\partial E_a}{\partial i}$$

と書く、

$$\frac{\partial E_n}{\partial i} = \frac{Y}{(1+i)^2 [c(1+i)^n + i - c]^2}$$

$$Y = c\{2 + nc - (n-1)i\} \{1 + n[c(1+i)^n - (1+i)^n] + c[(1+i)^n - 1 - ni]\} \{1 - i + (n-1)i^2\} + ni^2\{(n-1)ci + 1\}$$

$$\frac{\partial E_a}{\partial i} = -\frac{\alpha}{(1+i)^2}$$

にめぐって考察を進める。

まず、 Y の中身を見れば明らかなように、 $2+ne-(n-1)e \geq 0$ なる限り、したがって、

$$[3.5i] \quad i \leq \frac{2+ne}{n-1} = c + \frac{2+c}{n-1}$$

なる限り、 Y は正であり、 $\partial E_n / \partial i > 0$ である。なぜなら、 $[1+ne(1+i)^n - (1+i)^n] - 1 - ne$ も常に正だからである。

次に、

$$[3.5ii] \quad i > \frac{2+ne}{n-1} = c + \frac{2+c}{n-1}$$

の場合を考える。この場合でも、

$$[3.5iii] \quad i - \left(c + \frac{2+c}{n-1} \right) < \frac{Z}{(n-1)c \{ 1 + ne(1+i)^n - (1+i)^n \}}$$

ただし、

$$Z = c \{ (1+i)^n - 1 - ne \} [1 - i + (n-1)e^2 + ne^2 \{ (n-1)ci + 1 \}]$$

である限り、 Y は正であり、 $\partial E_n / \partial i > 0$ である。

$(2+ne)/(n-1) \wedge i \wedge 1$ なる範囲内において、 $[3.5iii]$ における不等号の代りに等号を成立させる i の値（すなわち、 $Y = 0, \partial E_n / \partial i = 0$ を成立させる i の値——以下、これを i_n^* と書くことにする）が存在するかどうか、また、 $[3.5ii]$ における不等号の代りに逆方向の不等号を成立させる i の値（すなわち、 $Y > 0, \partial E_n / \partial i < 0$ を成立させる i の値）が存在するかどうか、ということを知るためには、具体的に計算を試みるほかはない。

まず、 $c = 0.3, n = 100$ の場合について、 $(2+ne)/(n-1) = 0.50505$ であることを手がかりにして、 i_n^* を求めてみると、

i_n^* は、 $.0534 \wedge i_n^* \wedge .0535$ の範囲内のどこかに存在する。 i がこの i_n^* より小さい限り、 i が大なるほど E_n はより大となり、 i が i_n^* に等しいときに E_n はこの場合の最大値(1.01191)に達し、 $i \vee i_n^*$ なる範囲内においてはじめて、 i が大なるほど E_n がより小になるという事態が生ずる。

次に、 $c \parallel .03, n \parallel 80$ の場合には、 i_n^* は、 $.0598 \wedge i_n^* \wedge .0599$ の範囲内のどこかに存在する。この場合における E の最大値、すなわち $i \parallel i_n^*$ のときの E_n の値は1.02367である。

また、 $c \parallel .04, n \parallel 100$ の場合には、 i_n^* は、 $.0631 \wedge i_n^* \wedge .0632$ の範囲内のどこかに存在する。この場合における E の最大値、すなわち $i \parallel i_n^*$ のときの E_n の値は1.00407である。

以上、 E のうちの E_n の部分に対する i の影響を見てきたが、全体としての E (すなわち E_n と E_a との和)に対する i の影響については、 α がゼロである場合には $E \parallel E_n$ であって、 E_n について上述した所がそのまま E にも当てはまるが、 α が正である場合には次のようになる。

[3Aa] および [3.4] から明らかなように、 E_a の値は、 c および n の大小にかかわらず、 α および i の値に依じてきまり、 α の正の所与値のもとでは、 i が大なるほど E_a はより小となる(具体的には、 i が大なるほど E_a の絶対値がより大となる)。全体としての E に対する i の影響は、このような E_a に対する i の影響と前述した E_n に対する i の影響とが総合されたものである。

$0 \wedge i \wedge 1$ なる範囲内において $\partial E / \partial i \parallel 0$ を成立させる i の値を i^* と書くことにすれば、前述した i_n^* が存在する場合には常に i^* が存在することは明らかである。他方、 i_n^* が存在しない場合については、 i^* が存在しないこともありうるし、 i^* が存在することもありうる。

まず、 i_n^* が存在する前例の三つの場合について、 $c \parallel 9$ のときの i^* の値を求めてみると、 $c \parallel .03, n \parallel 100$ の場合に

は、 $0.466 \wedge i^* \wedge 0.467$ であつて、 i^* が i_n より小さいのは当然であるが、 $\alpha \parallel 9$ のときにはその差がかなり大きい。次に、 $e \parallel 0.03, n \parallel 80$ の場合には、 $0.534 \wedge i^* \wedge 0.535$ であつて、これも i_n よりかなり小さい。また、 $e \parallel 0.04, n \parallel 100$ の場合には、 $0.508 \wedge i^* \wedge 0.509$ であつて、 i^* より一・二%余も小さい。

他方、 i_n が存在しない場合の例をあげると、 $\alpha \parallel 9, e \parallel 0.03$ であつて $n \parallel 20$ および $n \parallel 30$ の場合には、 i^* は存在しない。これに対して、 $\alpha \parallel 9, e \parallel 0.03$ であつて $n \parallel 80$ の場合には、 $0.874 \wedge i^* \wedge 0.875$ の範囲内のどこかに i^* が存在するところ、前述したように、 α の正の所与値のもとでは、永久債の E は常に、 i が大なるほどより小となる。したがつて、有利付債であつても n が極端に大きいときには、 α の正の所与値のもとで、終始、 i が大なるほど E がより小になるという場合がありうると考えられる。具体例を探してみると、 $e \parallel 0.01, \alpha \parallel 9$ であつて $n \parallel 750$ の場合とか、 $e \parallel 0.02, \alpha \parallel 9$ であつて $n \parallel 850$ の場合が、それに該当している。(前者の場合、 $n \parallel 700$ とすれば該当せず、後者の場合、 $n \parallel 800$ とすれば該当しない。)

四 指標 F について

四—一 F の定義および算式

D は、前掲「2」に示したように、(21)に対する価格の弾力性の絶対値に等しい。それは言い換えれば、(21)の一定率の変化に應ずる価格の変化率(絶対値)の計算において、その一定率を限りなくゼロに近づけるときの極限值である。 E は、前掲「3」に示したように、 i に対する価格の弾力性の絶対値であり、言い換えれば、 i の一定率の変化に應ずる価格の変化率(絶対値)の計算において、その一定率を限りなくゼロに近づけるときの極限值である。

これに対して F は、 i の一定幅の変化——それは(21)の一定幅の変化に等しい——に應ずる価格の変化率(絶

対値)の計算において、その一定幅を限りなくゼロに近づけるときの極限值であり、

$$[4] \quad F = -\frac{\partial p}{\partial i} \cdot \frac{1}{p}$$

である。これを [2] および [3] と比べてみれば明らかのように、常に次式が成立する。

$$[4a] \quad F = \frac{D}{1+i} = \frac{F}{i}$$

F の数値を求める算式は、有期利付債については、

$$[4A] \quad F = \frac{1}{p} \left\{ 0 \sum_{t=1}^n \frac{t-\alpha}{(1+i)^{t+\alpha}} + \frac{n-\alpha}{(1+i)^{n+\alpha}} \right\} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{1}{p} \left\{ 0 \sum_{t=1}^n \frac{t-\alpha}{(1+i)^{t-\alpha}} + \frac{n-\alpha}{(1+i)^{n-\alpha}} \right\}$$

であり、その特殊な場合として $n=1$ のときには、次式のようになる。

$$[4A'] \quad F = (1-\alpha)/(1+i) = m/(1+i)$$

他方、割引債については、

$$[4B] \quad F = m/(1+i)$$

また、永久債については、

$$[4C] \quad F = \frac{1}{i} - \frac{\alpha}{1+i} = \frac{1}{1+i} \left(\frac{1+i}{i} - \alpha \right)$$

である。

四—二 F に対する券面利率 i の影響

前記「4」に示したように $F = D/(1+i)$ であるから、 D について前述したところと同様に、次のように言うことができる。

- ① 永久債および $i \neq 1$ である有期債の場合には、 F は e の大小によって影響されない。
- ② $i \neq 1$ である有期債の場合には、他の諸条件が等しければ、 e が大なるほど F はより小となる。

四—三 F に対する満期までの残余期間 m の影響

(一) 割引債および $i \neq 1$ (したがって $i \neq 1$) である利付債の場合

どちらの場合にも $F = m/(1+i)$ であるから、 i が等しければ、 m が大なるほど F はより大となる。

(二) $i \neq 2$ (したがって $i \neq 1$) である利付債—— $i \neq 2$ である有期利付債、および永久債——の場合

(二—一) α を所与としたときの n の大小の影響

$F = D/(1+i)$ であるから、 D について前述したところと同様に、次のように言うことができる。

α を含めて他の諸条件が等しいならば、 $i \neq 2$ である場合には、 n が大なるほど F はより大となり、 $i \neq 2$ である場合には、 $i \neq 2$ なる範囲内では n が大なるほど F はより大となるが、 $i \neq 2$ なる範囲内では n が大なるほど F はより小となる。所与の条件のもとで F が最大となるのは、 $i \neq 2$ のときである。

n^* の値は、二—三 (二—一) で述べたとおりである。 $\alpha = 0, e = 0.03, i = 0.05$ のとき、 $n^* = 73$ である。 $n = 73$ のときの F の値は 20.36 である。 $i \neq 73$ なる範囲内では n が大なるほど F はより小となり、永久債の F の値 (20.00) に近づいてゆく。また、 i 以外の条件が上記と同じで $i = 0.04$ のとき、 $n^* = 130$ である。 $n = 130$ のときの F の値は 25.05 である。 $i \neq 130$ なる範囲内では n が大なるほど F はより小となり、永久債の F の値 (25.00) に近づいてゆく。

(二) n を所与とした場合における α の大小の影響

$$[4.1] \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{\partial D}{\partial \alpha} = -\frac{1}{1+i} < 0$$

であるから、他の諸条件が等しければ、 α が小なるほど F はより大となる。 $n \geq 1$ であるから、これは、所与の n のもとで m が大なるほど F がより大となることを意味する。

四—四 F に対する利回り i の影響

(一) 割引債、 $n=1$ である利付債、および永久債の場合

割引債および $n=1$ (したがって $n \leq 1$) である利付債の場合には、前記の [4B] および [4A'] から、

$$[4.2] \quad \frac{\partial F}{\partial i} = -\frac{m}{(1+i)^2} < 0$$

が導かれるから、他の諸条件が等しければ、 i が大なるほど F はより小となる。

永久債の場合には、[4C] から、

$$[4.3] \quad \frac{\partial F}{\partial i} = -\frac{1+2i+(1-\alpha)i^2}{i^2(1+i)^2} < 0$$

が導かれるから、他の諸条件が等しければ、 i が大なるほど F はより小となる。

(二) $n \geq 2$ である有利利付債の場合

前掲の [4a] で示したように $F = D/(1+i)$ であるから、

$$[4.4] \quad \frac{\partial F}{\partial i} = \frac{(1+i) \frac{\partial D}{\partial i} - D}{(1+i)^2}$$

である。 D はもともと正であり、さきに二—四(三)で述べたように、 $\sum V_2$ である有利付債の場合には $\partial D / \partial i$ は常に負であるから、この場合の $\partial F / \partial i$ は負である。すなわち、この場合にも、他の諸条件が等しければ、 i が大なるほど F はより小となる。

四—五 D 、 E および F についてのまとめ

(一) 三指標の値に対する e の影響

三指標とも、他の諸条件が等しければ、次の例外を除いて、 e が大なるほどその値はより小となる。《例外》永久債および $\sum V_1$ である有利債の場合には、その値は e の大小によって影響されない。

(二) 三指標の値に対する m (n および α) の影響

割引債および $\sum V_1$ である有利債の場合には、他の諸条件のいかんに関係なく、 m が大なるほど D はより大となり、また、 i が等しければ、 m が大なるほど E および F はより大となる。

$\sum V_2$ である利付債の場合には、次のとおりである。

三指標とも、他の諸条件 (α を含む) が等しければ、次の例外を除いて、 n が大なるほど (すなわち、所与の α のもとで m が大なるほど) その値はより大となる。《例外》 i が e より大きい場合に、 n がある値 (前述の k^*) 以上であるときには、 n が大なるほどその値はより小となる。

三指標とも、他の諸条件（ n を含む）が等しければ、 α が小なるほど（すなわち、所与の n のもとで m が大なるほど）その値はより大となる。

(三) 三指標の値に対する i の影響

上述のように、 c および n または α の大小は、三指標に対して同様の影響を与えるが、 i についてはそうでない。

(三あ) D に対する i の影響

他の諸条件が等しければ、次の例外を除いて、 i が大なるほど D はより小となる。《例外》割引債および $\frac{1}{1+i}$ である利付債の場合には、 D は i の大小によって影響されない。

(三い) F に対する i の影響

他の諸条件が等しければ、常に、 i が大なるほど F はより小となる。

(三う) E に対する i の影響

他の諸条件が等しければ、次の例外を除いて、 i が大なるほど E はより大となる。

《例外1》永久債の E は、 α がゼロの場合には i の大小によって影響されず、また α が正の場合には、 i が大なるほどより小となる。

《例外2》 $\frac{1}{1+i}$ なる有利付債であって α がゼロの場合、 $0 < \frac{1}{1+i} < 1$ （ c も同様）の前提のもとで、所与の c と n の値のいかんによつては、 i がある値——前述の i_n^* であり、 $i_n^* \leq \frac{1}{1+i} < 1$ ——に等しいときに E （この場合、 $\frac{1}{1+i}$ ）が最大値に達し、 i がそれより大きい範囲内においては i が大なるほど E がより小になる、という状況が生ずることがある。

《例外3》 $\frac{1}{1+i}$ なる有利付債であって α が正の場合、右記の前提のもとで、所与の $c \cdot n$ および α の値のいかん

によつては、① i がある値——前述の i^* であり、 i_n^* が存在するときには $i^* \wedge i_n^*$ ——に等しいときに E が最大値に達し、 i がそれより大きい範囲内においては i が大なるほど E がより小になる、という状況が生ずることがあるし、あるいは、② n が極端に大きいときには、永久債の場合と同様に、終始、 i が大なるほど E がより小になる、という状況が成立することがある。

五 指標 G について

五— G の定義および算式

前提および記号は、記号 i を除いて、従前どおりとする。

所与の e および m のもとで、利回りが瞬間的に（具体的にいえば同じ日のうちに）一定率の変化をしたとする。当初の利回りを i で表わし、変化後の利回りを βi で表わす。 β は、 $\beta > 0, \beta \neq 1, \beta \neq 1$ なる一定値とする。利回りの変化率（小数表示）は、 $(\beta - 1)$ によって示されることになる。

そのような一定率の瞬間的利回り変化に應ずる価格変化率の絶対値を、ここでは指標 G と呼ぶ。すなわち、当初の利回り i における価格を $p(i)$ と書き、変化後の利回り βi における価格を $p(\beta i)$ と書くことにすれば、 $\beta < 1$ （利回り上昇、価格低下）の場合には

$$[5, \beta > 1] \quad G = -\frac{p(\beta i) - p(i)}{p(i)} = 1 - \frac{p(\beta i)}{p(i)}$$

であり、 $\beta > 1$ （利回り低下、価格上昇）の場合には、

$$[5, \beta < 1] \quad G = \frac{p(\beta i) - p(i)}{p(i)} = \frac{p(\beta i)}{p(i)} - 1$$

である。

G の値を求める算式は、有期利付債については、

$$[5A, \beta > 1] \quad G = 1 - (1 + \beta i)^{-\alpha} \left\{ \frac{c}{i} \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1 + \beta i)^t} + \frac{1}{(1 + \beta i)^n} \right\} + (1 + i)^{-\alpha} \left\{ \frac{c}{i} \sum_{t=1}^n \frac{1}{(1 + i)^t} + \frac{1}{(1 + i)^n} \right\} \\ = 1 - \frac{(1 + i)^{-\alpha} \{ c(1 + \beta i)^n + \beta i - c \}}{(1 + \beta i)^{-\alpha} \beta i \{ c(1 + i)^n + i - c \}}$$

または、これと正負の符号を逆にした $[5A, \beta < 1]$ (算式は省略) であり、その特殊な場合として $n=1$ (したがって $m=1-\alpha$) のときは、

$$[5A', \beta > 1] \quad G = 1 - \frac{(1 + i)^{1-\alpha}}{(1 + \beta i)^{1-\alpha}} = 1 - \frac{(1 + i)^m}{(1 + \beta i)^m}$$

または、これと正負の符号を逆にした $[5A', \beta < 1]$ (算式は省略) となる。他方、割引債については、

$$[5B, \beta > 1] \quad G = 1 - (1 + i)^m / (1 + \beta i)^m$$

または、これと正負の符号を逆にした $[5B, \beta < 1]$ (算式は省略) となり、また、永久債については、

$$[5C, \beta > 1] \quad G = 1 - \frac{(1 + \beta i)^{-\alpha}}{\beta i} \div \frac{(1 + i)^{-\alpha}}{i} = 1 - \frac{(1 + \beta i)^{-\alpha}}{\beta(1 + i)^{\alpha}}$$

または、これと正負の符号を逆にした $[5C, \beta < 1]$ (算式は省略) となる。

以下においては、煩雑さを避けるため、利回り上昇 ($\beta < 1$) の場合だけを詳しく扱い、利回り低下の場合については最後に簡単に付言することにする。

五—二 G ($\beta > 1$ の場合) に対する券面利率 c の影響

永久債の場合には、 $[5C, \beta > 1]$ を見れば明らかなように、 G は c の大小によって影響されない。

$m \leq 1$ である有期債の場合も、 $[5A', \beta > 1]$ および $[5B, \beta > 1]$ から明らかなように、 G は c の大小によって影響されない。

$m > 1$ である有期債の場合は、利付債については $[5A, \beta > 1]$ から、

$$[5.1, \beta > 1] \quad \frac{\partial G}{\partial c} = - \frac{(1+i)^m [(1+\beta c)^m - 1 - \beta \{(1+i)^m - 1\}]}{\beta (1+\beta c)^m \{c(1+i)^m + i - c\}^2} < 0$$

が導かれるから、他の諸条件が等しければ、 c が大なるほど G はより小となり、また、 m および i が等しければ、割引債 ($c=0$) の G $[5B, \beta > 1]$ は利付債 ($c > 0$) の G $[5A, \beta > 1]$ より常に大であるから、 $m > 1$ である有期債の全般を通じて、他の諸条件が等しければ、 c が大なるほど G はより小となる、ということができる。

五—三 G ($\beta > 1$ の場合) に対する満期までの残余期間 m の影響

(一) 割引債および $m \leq 1$ (したがって $m \leq 1$) である利付債の場合

前掲の $[5B, \beta > 1]$ および $[5A', \beta > 1]$ から明らかなように、どちらの場合にも $G = 1 - \{(1+i)(1+\beta c)\}^m$ であるから、 i が等しければ、 m が大なるほど G はより大となる。

(二) $m \geq 2$ (したがって $m > 1$) である利付債—— $m \geq 2$ である有期利付債、および永久債——の場合

(二—一) α を所与としたときの n の大小の影響

α を含めて他の諸条件が等しいならば、 $m \geq 2$ であるときの G の値に対する $m \geq 2+1$ であるときの G の値の増分

(以下、 q を基準とする G の増分と呼び、 ΔG で表わす)は次式のようになる。ただし、 q は、 $q \geq 2$ なる任意の整数とする。

$$[5.2, \beta > 1] \quad \Delta G = \frac{(1+i)^{q-1} [e(c-i) \{ (1+\beta i)^{q+1} - 1 \} - e(c-\beta i) \beta \{ (1+i)^{q+1} - 1 \} + (\beta-1) \beta i^2]}{\beta (1+\beta i)^{q+1} - e \{ e(1+i)^{q+1} + i - e \} [e(1+i)^q + i - e]}$$

ここで、 $i < e, \beta i < e$ の場合、 $i < e, \beta i = e$ の場合、 $i < e, \beta i > e$ の場合、および $i = e, \beta i > e$ の場合には、 $\Delta G > 0$ であり、他の諸条件が等しければ、 n が大なるほど G はより大となる。

$i < e, \beta i < e$ である場合には、[5.2]の分子の「」内(したがって ΔG)は正にも負にもなりうる。それが負となるための条件は、[5.2, $\beta > 1$]の分子の「」内を書き直してみればわかるように、

$$[5.3, \beta > 1] \quad (i-e)(1+\beta i)^{q+1} > (\beta i-e) \beta (1+i)^{q+1} + (\beta-1)(i-e)(\beta i/e-1)$$

である。

[5.3, $\beta > 1$]を成立させる q の値のうちで最小のものを q^* で表わすことにすれば、次のように結論することができる。 α を含めて他の諸条件が等しければ、 $q < q^*-1$ なる q を基準とする ΔG は正であって、 $n < q^*$ なる範囲内では n が大なるほど G はより大となるが、 $q \geq q^*$ なる q の値を基準とする ΔG は負であって、 $n \geq q^*$ なる範囲内では n が大なるほど G はより小となる。所与の条件のもとで G が最大となるのは、 $n = q^*$ のときである。

α がゼロのときの q^* の計算例をあげてみよう。 $e = 0.3, i = 0.45, \beta = 10/9, \beta i = 0.5$ のとき、 $q^* = 82$ である。 $n = 82$ のときの G の値は、.1012である。 $n \geq 82$ なる範囲内では、 n が大なるほど G はより小となり、永久債の G の値(.1000)に近づいてゆく。また、 i 以外の条件が上記と同じで、 $i = 0.36, \beta i = .04$ のとき、 $q^* = 159$ である。 $n = 159$ のときの G の値は、.1001である。 $n \geq 159$ なる範囲内では、 n が大なるほど G はより小となり、永久債の G の値(.1000)に

近づいてゆく。

(一2) n を所与としたときの α の大小の影響

前掲の [5A, $\beta > 1$] を書き換えた

$$[5A\alpha, \beta > 1] \quad G = 1 - \frac{(1+i)^n [c(1+\beta i)^n + \beta i - c]}{(1+\beta i)^n \beta [c(1+i)^n + i - c]} \cdot \left(\frac{1+\beta i}{1+i} \right)^\alpha$$

から明らかなように、他の諸条件が等しければ、 α が小なるほど G はより大となる。これは、所与の n のもとで m が大なるほど G がより大となることを意味する。

五—四 G ($\beta > 1$ の場合) に対する利回り i の影響

(一) 割引債、 $\alpha = 1$ である利付債、および永久債の場合

割引債および $n = 1$ (したがって $m \leq 1$) である利付債の場合には、前記の [5B, $\beta > 1$] および [5A, $\beta > 1$] から、

$$[5.4, \beta > 1] \quad \frac{\partial G}{\partial i} = \frac{m(1+i)^{m-1}(1+\beta i)^{m-1}(\beta-1)}{(1+\beta i)^{2m}} > 0$$

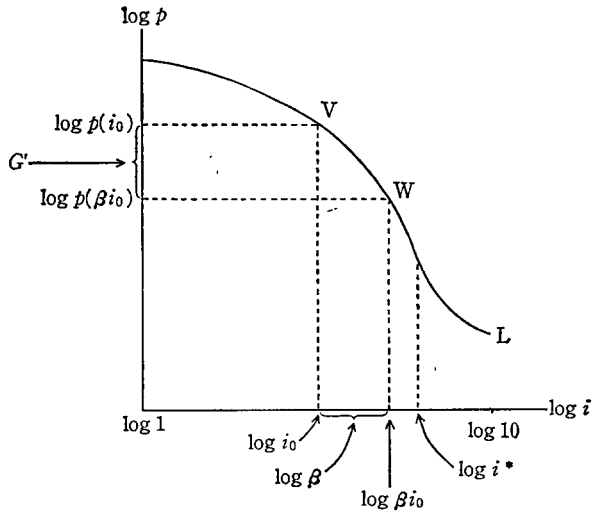
が導かれるから、他の諸条件が等しければ、 i が大なるほど G はより大となる。

永久債の場合には、[5C, $\beta > 1$] から、

$$[5.5, \beta > 1] \quad \frac{\partial G}{\partial i} = \frac{\alpha(1+i)^{\alpha-1}(1+\beta i)^{\alpha-1}(\beta-1)}{\beta(1+i)^{2\alpha}} \leq 0$$

が導かれるから、 α がゼロであるときには、 G は i の大小によって影響されないが、 α が正であるときには、 i が大なるほど G はより小となる。

図 1 $\beta > 1$ の場合



(二) $\approx \sqrt{2}$ である有利付債の場合

この場合の G は、 i の大小によって、 E について三—四 (二) で前述したところと類似の影響を受ける。そうなることの証明は以下のとおりである。

図 1 は、 $\approx \sqrt{2}$ である有利付債における、他の諸条件を所与としたときの $\log i$ と $\log p$ の関係を、模型的に一本の曲線 (L 線と名づける) によって例示したものである。ただし、ここでは、 p および i はパーセント単位で表わした数値であって、 p は 1% なる事態は生じないものとし、また i については 1% から 10% の範囲だけを图示し、その範囲内に i^* が存在するものと仮定してある。 E は、

$$[3b] \quad E = -\frac{\partial(\log p)}{\partial(\log i)}$$

上各点における接線の傾斜 (絶対値) にはかならない。これに対して、

$$[5.6, \beta > 1] \quad G' = \log p(i) - \log p(\beta i) = -\log [p(\beta i)/p(i)]$$

という指標を考えると、 L 線上の一点 (たとえば図 1 の V) と、その右方にある L 線上の点であって、前者との水平距離が $\log \beta i - \log i = \log(\beta i/i) = \log \beta$ に等しい他の一点 (図 1 の W) との、二点間の垂直距離 (図 1 の G') にほか

ならない。ゆえに、 i^* が存在する場合についていえば、 i^* より小さい一定の i の値（以下、 i と書く）を境目として、 $\wedge$ なる限り i が大なるほど G' はより大となり、 $\searrow$ のときに G' は所与の条件下での最大値に達し、 $\vee$ なる限り i が大なるほど G' はより小となる。

この G' [5.6, $\beta > 1$] と G [5, $\beta > 1$] との間には、

$$[5.7, \beta > 1] \quad \frac{\partial G'}{\partial i} = \frac{p(i)}{p(\beta i)} \cdot \frac{\partial G}{\partial i}$$

という関係が成り立つ。⁽⁴⁾ $p(i)/p(\beta i)$ は常に正であるから、この式から、それぞれの i の値ごとに $\partial G'/\partial i$ の正・ゼロまたは負と $\partial G/\partial i$ の正・ゼロまたは負とは一致する。かくして、 i が i に達するまでは i が大なるほど G はより大となり、 $\searrow$ のときに G は所与の条件下での最大値に達し、 i が i を超えると i が大なるほど G はより小となる、ということができるのである。

i は、 $\partial G/\partial i = 0$ なる条件をみたす i の値である。[5A, $\beta > 1$] から、次式が導かれる。

$$[5.8, \beta > 1] \quad \frac{\partial G}{\partial i} = \frac{(1+i)^{n-1-a} U}{\beta(1+\beta i)^{n+1-a} [c(1+i)^n + i - c]^2}$$

ただし、

$$\begin{aligned} U = & c(1+i)(1+\beta i) [(1+\beta i)^n - 1 - \beta(1+i)^n - 1] + n\beta(\beta-1)i^2 \\ & + ne[(c-i)(1+\beta i)^{n+1} - 1] - (c-\beta i)\beta(1+i)^{n+1} - 1 \\ & - a(\beta-1)[c(1+\beta i)^n + \beta i - c][c(1+i)^n + i - c] \end{aligned}$$

まず、 a がゼロの場合には、右の U の式の三行目がゼロとなって消える。この場合の U および G を特に U_n および G_n

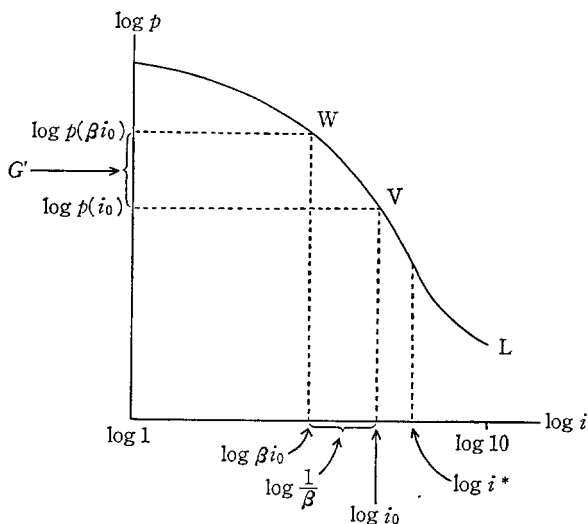
と書くことにする。 U_n を構成する二行のうち、一行目は常に正であるが、二行目は正にも負にもなりうる。ただし、後者の二行目は、 $i \in I_n$ なる範囲内（その中には、 $i \in I_n, p_i \in I_n$ の場合、 $i \in I_n, p_i \in I_n$ の場合、および $i \in I_n, p_i \in I_n$ の四種の場合が含まれる）においては正となる。ゆえに、 $i \in I_n$ である範囲内では、 U_n は正であり、 $\partial G_n / \partial i > 0$ である。 $i \in I_n, i \in I_n$ なる範囲内において $U_n = 0, \partial G_n / \partial i = 0$ を成立させる i の値、すなわち α がゼロのときの i （これを特に i_n と書くことにする）が存在するかどうかを知るためには、具体的に計算してみるほかはない。たとえば、 $p_i = 10/9, \alpha = 0.3, n = 100$ のとき、 i_n は、 $.05076 \wedge i_n \wedge .05085, .0564 \wedge p_i \wedge .0565$ の範囲内のどこかに存在する。 $i = i_n$ のときの G_n の値（この場合における G_n の最大値）は、 $.101120$ である。また、 $\alpha = 0.04$ で他の条件を上記と同じにすれば、 i_n は、 $.06003 \wedge i_n \wedge .06012, .0667 \wedge p_i \wedge .0668$ の範囲内のどこかに存在し、 $i = i_n$ のときの G_n の値は、 $.100381$ である。次に、 α が正である場合には、前掲の U の式の三行目は常に負である。したがって、 U をゼロにする i の値（ i ）は、前記の i_n よりも小さいはずである。計算例を示すと、前記と同じく $p_i = 10/9, \alpha = 0.3, n = 100$ であって、 $n = 9$ の場合には、 i は、 $.04419 \wedge i \wedge .04428, .0491 \wedge p_i \wedge .0492$ の範囲内のどこかに存在し、 $i = i$ のときの G の値は、 $.097081$ である。また、 $\alpha = 0.04$ で他の条件は同じとすれば、 i は、 $.04834 \wedge i \wedge .04833, .0536 \wedge p_i \wedge .0537$ のどこかに存在し、 $i = i$ のときの G の値は、 $.095874$ である。

五―五 $p \wedge 1$ の場合の G について

$p \wedge 1$ である場合には、以上に掲げた $p \vee 1$ の場合における各数式の正負を逆にした数式が当てはまることになるが、 β が一より小さいことによって、 $p \vee 1$ の場合と同様の結論が導かれる。

ただ、 $n \vee 2$ である有利利付債における G に対する利回り i の影響について次の三点を付記しておくことが必要で

図 2 $\beta < 1$ の場合



あろう。

① 前掲の図 1 の代りに、ここでは図 2 が当てはまる。

② ここでは、 $\beta i \wedge i_0$ なる範囲内（その中には、 $\beta i \wedge i_0 \wedge i_0$ の場合、 $\beta i \wedge i_0 \wedge i_0$ の場合、および $\beta i \wedge i_0 \wedge i_0$ の四種の場合が含まれる）においては U_n は正であり、 $\partial G_n / \partial i > 0$ である。（ $\beta > 1$ のときは、 $i \wedge i_0$ の範囲

内においてそうであった。）

③ ここでの β が $\beta < 1$ のときの β の逆数に等しいならば、 i_n および i の値も等しくなる。たとえば、 $\beta = 9, \alpha = 0.3, n = 100$ の場合の i_n は、 $.05076 \wedge i_n \wedge .05085$ の範囲内、ここに存在し、 $\beta = 10/9$ の場合の i_n と等しい値をもつ。また、 $\beta = 9, \alpha = 0.3, n = 100, \alpha = 9$ である場合の i_n は、 $.04419 \wedge i_n \wedge .04428$ の範囲内、ここに存在し、 $\beta = 10/9$ の場合の i と等しい値をもつ。しかし、 $i = i_n$ のときの G_n の値および $i = i$ のときの G の値は、 $\beta < 1$ の場合と $\beta > 1$ の場合とで異なる。たとえば、 $\alpha = 0.3, n = 100$ の場合における $i = i_n$ のときの G_n は、 $\beta = 10/9$ ならば、 $.101120$ であるが、 $\beta = 9$ ならば、 $.112495$ である。また、 $\alpha = 9, \alpha = 0.3, n = 100$ の場合における $i = i$ のときの G は、 $\beta = 10/9$ ならば、 $.097081$ であるが、 $\beta = 9$ ならば、 $.107519$ である。これは、価格変

化幅は等しいが、 G を算出するためにその変化幅を除すべき当初価格が異なるのであるから、当然のことである。 $\beta < 1$ のときの G を $G(\beta < 1)$ と書き、 $\beta > 1$ (ただし、この β は前者の β の逆数とする)のときの G を $G(\beta > 1)$ と書くことにすれば、次式が成り立つ。

$$G(\beta > 1) = \frac{G(\beta < 1)}{1 + G(\beta < 1)}$$

$$G(\beta < 1) = \frac{G(\beta > 1)}{1 - G(\beta > 1)}$$

(4) [5.6, $\beta > 1$]から、

$$\frac{\partial G'}{\partial i} = -\frac{1}{p(\beta i)/p(i)} \cdot \frac{\partial [p(\beta i)]}{\partial i} \cdot \frac{\partial [p(i)]}{\partial i} = -\frac{p(i)}{p(\beta i)} \cdot \frac{\partial [p(\beta i)]}{\partial i}$$

他方、[5, $\beta > 1$]から

$$\frac{\partial G}{\partial i} = -\frac{\partial [p(\beta i)]}{\partial i} \cdot \frac{\partial [p(i)]}{\partial i}$$

したがって、次式が成り立つ。

$$\frac{\partial G'}{\partial i} = \frac{p(i)}{p(\beta i)} \cdot \frac{\partial G}{\partial i}$$

(昭和五六年十一月一七日 受理)