ノイマン・モルゲンシュテルンの効用可測性の理論の吟味

久武雅夫

一　序　説

財の効用、あるいは貨幣の効用が測定可能であるということの論証はフリッシュおよびフィッシァーの学説[1]を一つの段階としてその後しばらく学界の論議の対象とならなかった。このことはフリッシュやフィッシァーの証明が完全であって何等の疑問を残さなかったということを意味しない。彼等の証明の方法は多少異っているが、いずれも独立財の存在を仮定し、これを用いて他の財の効用ならびに貨幣の効用を測定している点において共通である。この独立財を用いる方法はフィッシァーがその初期の著書「価値と価格の理論の数学的研究[2]」の中で提唱している方法であり、彼等の方法はこれを実際の統計資料に適用する工夫であるということができる。ところでこれらの方法については理論的に尚究明すべき問題が残されていたのである。たとえば独立財を如何に定義すべきかということも問題となり得るし、また統計的に効用を測定するとすれば、個人的効用と、社会的な平均効用との関係も明らかにされなければならない。

フリッシュやフィッシァーの研究の発表後における学界の動向にはこれらの問題を究明するという努力が殆んど見当らず、その後の約十年間の傾向はむしろ、効用測定を断念して、効用を単に順序数として定義し、これを基礎として経済均衡の理論や経済厚生の学説を樹立しようとするいわゆる ordinalism の理論が、ヒックスの「価値と資本」を中心として著しく発達したのである。

このような状態において経済学において効用概念はどのような取扱いを受けたかといえば、大体次のように説明してよいであろう。純理論的にいえば効用概念を用いないで理論を展開することが可能である。しかし、無差別曲線を基礎とする ordinalism の理論は難解で直感的に理解し難いから、便宜上効用概念を用いてその結果を説明する。たとえば限界代替率均等の法則というよりも限界効用均等の法則として説明した方が分り易いから、説明手段として効用概念を用いるのである。もちろん学者によってその取扱い方は異なるのであるが、学界一般の傾向としては右のような取扱い方が支配的であったと理解してよいと思う。そしてこの傾向は現在においてもつづいているのである。

経済学者がフリッシュの「限界効用測定の新方法」の歴史的な業績に敬意を払いながらも、これを積極的に展開しようとする試みをなさず、反対にむしろこれを無視するような方向に進んだことは、たまたまヒックスやアレンによる業績が現われて経済学者を惹きつけたことにもよるが、フリッシュ等の理論や方法の根底にある困難を学者が直感的に感得してその方向に進む努力を不毛であると考えたのであるかも知れない。仮りにそうであるとしても、フリッシュ等の業績が充分に吟味されないで終るということは、もし効用の測定（cardinalism の立場）が経済理論において積極的意義を有するとするならば、あってはならないことである。

とにかくこのようにして効用測定の問題が一時学界の視点から消え去ったように見えたとき、突然、ノイマンおよびモルゲンシュテルンの「ゲームと経済行動の理論」が出現してこの問題に新しく点火した。[3] ゲームの参加者はゲームによる利得を最大にしようとして行動する。いわゆる零和ゲームにおいてはこの利得は多くは金銭その他の賞品の獲得を意味するから、利得の計量可能性について問題はないが、非零和ゲームにおいては無形の利益が利得として取扱われる場合が多い。特に経済行動において対象となるのは効用であり、したがって効用の可測性ということが、ゲーム理論を経済行動に適用する場合の必要な前提となる。ノイマン・モルゲンシュテルンはこの問題を、risk を含む財の選択の可能性という前提をおいて解決した。ここに risk というのはある財を獲得することが確実ではないがその確率が分っている場合を指す。たとえば財Ａを獲得する確率が$\frac{1}{2}$で財Ｂを獲得する確率が$\frac{1}{2}$であるというときに、財ＡまたはＢを獲得することと財Ｃを確実に獲得することとを比較してその何れかを選択することが可能であるばかりでなく、この選択の順位が各財の獲得の確率に対して連続な体系を形成するというのがＮＭ（ノイマン・モルゲンシュテルンを以下このように略称する）の前提である。この前提さえ承認すれば、効用の量的性質は数学的に証明せられるというのがＮＭの主張である。

このような前提は現実に遠いものではない。たとえば消費者が貨幣である商品を買うときは、貨幣と商品との選択を行なうわけであるが、この場合の貨幣は他のＡ、Ｂ、Ｃ等の商品の購入に振り向けられるべきものであり、毎月の所得の中でそれらの商品の購入に振り向けられる金額の百分率はそれらの商品の購入の確率と考えてよいから、前記の前提はわれわれの日常の経済行為に普通に見られる行為であると考えてよい。

しかしNMがこのような前提に考え及んだのは、ゲーム理論の推理過程の中にそのような思い付きの動機があったことによると思われる。ゲームにおいてはプレーヤーは常に相手の行動を考慮におきながら行動する。自分にとって有利な手は相手にとっても有利であるとは限らない。しかし自分の手を相手に示してそれに対して相手が選ぶであろう幾組かの手の中から自分に最も有利な手を選ぶことができ、しかもこの手が相手方にとっても同じ意味で最も有利な手であるときに両者とも満足するプレイが成立する。このような一組の手を幾何学的に表現すれば鞍点となる。ゲームに安定解が存在するか否かは鞍点が存在するか否かにかかる。鞍点は全てのゲームにおいて必らずしも存在するとは限らないが、もし各プレーヤーが選び得る手にその手を選ぶ確率を付与し得るならば、この確率を変数とする座標軸において鞍点が存在することが可能となる。いい換えれば各プレーヤーは各手の確率を自分に有利なように定めることによって鞍点に到達することができる。

各プレーヤーが選んだ手の組合せに対する効用を想定し、これにその手の実現する確率を掛けて加えたものは、各プレーヤーにとってゲームの成果に対する効用の期待値に外ならない。NMはこの期待値の大小がその手を選ぶ基準となるという想定から、この効用が量として確定するという命題を導き出したのであって、これはゲーム理論の推理の過程の一部に外ならない。

NMが考え出した効用の可測性の命題は、既述のように停滞状態にあったこの問題に大きな進展の刺戟を与えた。ゲーム理論に対する直接の応用から離れて、効用の可測性の問題が再び学者の研究問題として取り上げられた。NMの方法に対する多少の批判はあったが、その後の研究の大部分はこの理論の積極的意義を認め、この方法により効用

曲線の形態を推定し、あるいは実証的にこれを測定しようとする試みである。NMの業績が出てから、効用測定の理論はフリッシュ、フィッシァーの理論から飛躍して、全く新しい基礎の上に再建されつつあるといってよい。

NMに対する批判の代表的なものはジョーゼスキューレーゲンのそれであろう。(4) しかし彼の批判はNMに対する内在的批判ではなくして全く新しい選択理論を構成しようとする立場からなされたものである。従来の効用理論乃至消費理論はあらゆる財が分割可能でかつあらゆる点において代替可能であることを前提とし、従って消費の限界線に消費の対象となるあらゆる財が排列せられ、それらの財の限界効用がそれらの財の価格に比例すると考える。しかしわれわれの消費の構造は段階的であり、基本的な欲求が充足せられた後に第二次的な欲求が満たされる。従って全ての財を同時代替的に考える無差別曲線の集合を用いて選択の構造を表わそうとする従来の選択理論はこの消費の段階を正しく表現しない。この新しい選択の場においてはたとえ risk による財の結合を考えても効用の可測性を導き出すことができないというのが彼の批判である。

彼の欲求段階説が従来の選択理論を全く無効にするか否かは問題であって、彼の理論の論理的厳密性についてはなお検討の余地があるように思われる。しかし彼の批判はNMの基本的前提に関するものであって、従来の選択理論の基礎の上に立つ限り、NMの結論が数学的な帰結として生ずることは彼も認めている。

NMに対する批判としてもう一つ挙げられるのは、それがいわゆる強独立性の仮定に基づいているという指摘である。この批判は、Mann, Samuelson, Malinvaud によってなされたものである。(5) この強独立性の仮定の意味については後に詳論するが、要するにそれは、NMが明示しなかった仮説が尚存在するという指摘であって、この仮説の妥当

性が問題とならない限り、単にＮＭの理論構造を明らかにしたのに止まる。前述のジョージェスキューレーゲンの批判は、ＮＭの理論にはこの強独立性の仮説の外にもう一つ別の仮説、すなわち無差別点が必らず存在するという仮説が存在し、そしてこの仮説が現実に妥当しないことを指摘したものである。

本論の問題点を明らかにするために、問題の学説史的背景を以上にスケッチしたが、本論で取り上げようとする問題は、ＮＭ自身の仮説ならびにその後の批判で指摘された強独立性の仮定だけで、効用の可測性の証明ができるかどうかという問題である。ＮＭの数学的証明の過程については何人もその正確さを疑うものはないが、果して、その証明はＮＭの仮定のみに基いて為されたか否かを吟味することがこれからの問題である。

このような吟味を行なう積極的な意味がどこにあるであろうか。効用可測性の証明は百年に近い年月に渉る経済学者への宿題であったが、それがＮＭの理論においては極めて自明の事柄であるかのように解決している。リスクを含む財の選択という極めて常識的な自然の事実を承認することが何故このような大きな結果を生ずるのか。ＮＭの精緻な数学的証明にも拘らずこのような疑問が起るのは当然であろう。この論文を書く動機もこのような疑問を自ら提出し自ら答えようとすることにあったのである。

ＮＭの方法による効用測定に対するもう一つの問題は、それがもっぱら賭や保険に対する需要を通して貨幣の効用を測定するという方法で行われていることである、このような方法に道を開いたのは Friedman と Savage による効用曲線の形状に関する仮説であるが[6]、この仮説はＮＭのリスクを含む財の選択に関する前提を基礎とするものである。しかしこのような特殊の財に対する需要から果して消費財全般に渉る効用曲線の形状を導き出し得るものである

かという問題についても十分な検討を必要とする。この論文ではこのような問題も取り上げてＮＭの理論の妥当性を吟味したいと思う。

（１） I. Fisher: A statistical method for measuring 'marginal utility' and testing the justice of a progressive income tax. Economic essays contributed in honor of John Bates Clark, 1927.

R. Frisch: New methods of measuring 'marginal utility.' 1932.

（２） I. Fisher: Mathematical investigations into the theory of value and prices 1892.

（３） J. von Neumann and O. Morgenstern: Theory of games and economic behavior. 1943. pp. 15～31, 617～628.

（４） N. Georgescu-Roegen: Choice, expectations and measurability. Quart. Jour of Ec. vol. 68, 1954.

（５） A. Manne: The strong independence assumption. Econometrica. vol. 20. Oct. 1952.

P. Samuelson: Probability, utility, and the independence axiom. Econometrica. vol. 20, Oct. 1952.

E. Malinvaud: Note on von Neumann-Morgenstern's strong independence axiom. Econometrica, vol. 20, Oct. 1952.

（６） M. Friedman & L. J. Savage: The utility analysis of choice involving risk. Jour. of Pol. Ec. Aug., 1948.

——: Expected-utility hypothesis and the measurability of utility. Jour. of Pol. Ec. Dec., 1952.

二　ノイマン・モルゲンシュテルンの効用測定理論

ＮＭの効用測定可能の命題は「ゲームと経済行動の理論」の初の部分に掲げられ、その詳細な数学的証明は付録に掲げられている。これを紹介することは本論の目的ではないが、本論の論旨を理解するに必要な程度にこれを要約す

ることにする。(1)

経済学者は効用を量として定義することに用心深く、無差別曲線の概念 (ordinal utility) をもって満足している。しかしこれから量的効用に到達するにはほんの僅かの努力が必要とされるに過ぎない。いま一人の人がある任意に選ばれた二つの事物に対して完全な選択をなし得る、すなわちその何れかを常に選択し得るものとする。この場合彼が事物を比較し得るだけでなく、ある確率をもって生起する幾つかの事物の結合についても選択をなし得ると考えることは極めて自然である。いま例えば二つの事象BとCとがそれぞれ50%の確率で生起し、この二つの事象は排反事象であるとしよう。この何れか一つの事象が起ることは絶対確実である。彼がこのBとCとの結合と確実に生起するA事象との選択を行なうとき、もし彼がAを確実なBよりも好み、また確実なCよりも好むならば、AをBとCとの確率結合より好むことは明らかである。同様にAよりもBを、またAよりもCを好むならば、AよりもBCの確率結合を好むことは当然である。しかし、AをBより好み、同時にCをAより好むならば、AとBCの結合との比較については一般的な結論は下せない。特に、この場合、BCの確率がそれぞれ50%の確率であるとして、AをBCの結合より好むならば、彼がAをBより好む程度はCをAより好む程度よりも大であると推定しなければならぬ。このように二つの効用の差の大小を比較できるということは、効用を量として確定する基礎となるものである。

この議論を一般化するために、Cの生起する確率をαとし、Bの生起する確率を$1-\alpha$とする。そして事象の選択の順序がC, A, Bであり、AとCBの結合とが同値である(効用が等しい)とするならば、このαでAの効用とBの効用の差と、Cの効用とBの効用の差との比を表わすことができるというのが、NMの提唱である。

いま分り易いためにＡの効用を $U(A)$ で表わし、その他の効用についても同様とすれば、Ａの効用がＣＢの結合の効用と等しいということは

$$U(A)=\alpha U(C)+(1-\alpha)U(B)$$

これからαを求めると

$$\alpha=\frac{U(A)-U(B)}{U(C)-U(B)}$$

右の式はαで二組の効用の差の比率を表わし得ることを示し、従ってこれを基礎として効用を数量として確定することができるというのである。

いまこのことを公理的に説明しよう。いま二つの事象の効用をu、vで表わし、仮りに $u>v$ であるとする。この関係は選択の行為によって確かめ得る自然的な関係である。uを獲得し得る確率をα、vを獲得し得る確率を $1-\alpha$ とすれば、この二つの効用の結合は $\alpha u+(1-\alpha)v$ で表わされることも自然的な関係である。

いま効用uをある数値に置き換えようとする。この数値をρとすれば、$\rho=V(u)$ とおくことができる。このようなρはただ一つではなく数多く存在し得るが、必らず次の二つの条件を満足しなければならない。

(1. a) $u>v$ が成り立てば $V(u)>V(v)$

(1. b) $V(\alpha u+(1-\alpha)v)=\alpha V(u)+(1-\alpha)V(v)$

(1. a) の関係は説明をまたないでも自明であろう。(1. b) は二つの効用の結合に対する効用尺度が、各効用の尺

度を結合したものに等しいことを表わす。これもきわめて当然の関係であるように思われる。

　このように効用に対応する数値はただ一つであるとは限らない。たとえばそれが単なる順序を表わす数値であるとすれば、パレートが指摘したように二つの数値の間には一方が他方の単調増加函数であるという関係が存在することが必要なだけであるから、このような数値は無数に存在する。しかしもしこれらの数値が効用の尺度であるとすれば、それらの間の関係は単調増加函数というだけでなく、一次函数でなければならぬ。換言すれば単位と原点の変更だけで互いに変換し得る関係でなければならない。すなわちuに対応する今一つの数値をρ'とし、$\rho'=V'(u)$ とおけば、ρ'とρとの関係は一般的に

(2)　$\rho'=\phi(\rho)$

と表わすことができる。もしρとρ'とがuの尺度として役立つならば前述した理由により

(3)　$\rho'=\phi(\rho)=\omega_0\rho+\omega_1$

が成立しなければならない。ただし、ω_0、ω_1はある定数である。NMはこのことが成り立つことを次のように簡単に説明し、その証明は付録に譲っている。

　いまuの尺度をρ、vの尺度をδで表わせば、$u>v$ という関係から、当然 $\rho>\delta$ という関係が成立し、また他の尺度、$\phi(\rho)$ と $\phi(\delta)$ とについても同じ関係が成立する。すなわち

(4)　$\rho>\delta$　ならば　$\phi(\rho)>\phi(\delta)$

また（1. b）の関係は当然、ρ、δについても成立するから

$$(5)\qquad \phi(\alpha\rho+(1-\alpha)\delta)=\alpha\phi(\rho)+(1-\alpha)\phi(\delta)$$

この(5)から(3)の関係を導き出すことができるというのである。その証明を付録によって要約して見よう。ただしここでは証明の筋道を追うだけであるから、公理からの論理的展開を正確に追跡することはしない。

先ず証明のために使用せられる公理を列挙しておこう。

(A)　$u>v$ はUの完全な順序数である。これは次の二つのことを意味す。

(A. a)　Uに属する任意の二つの要素 u、v に対して次の三つの関係の何れか一つが成り立ち、一つだけしか成り立たない。

$$u=v,\quad u>v,\quad u<v$$

(A. b)　$u>v$, $v>w$ であるときは $u>w$（推移の法則）

(B)　順序数の結合に関する公理

(B. a)　$u<v$　であるときは　$u<\alpha u+(1-\alpha)v$

(B. b)　$u>v$　であるときは　$u>\alpha u+(1-\alpha)v$

(B. c)　$u<w<v$　であるときは

$$\alpha u+(1-\alpha)v<w$$

を成立せしめる α が存在する。

(B. d)　$u>w>v$　であるときは

$$\alpha u+(1-\alpha)v>w$$

を成立せしめる α が存在する。

ただし $1>\alpha>0$ である。

(C)　順序数の結合の代数

(C. a)　$\alpha u+(1-\alpha)v=(1-\alpha)v+\alpha u$

(C. b)　$\alpha\{\beta u+(1-\beta)v\}+(1-\alpha)v=\gamma u+(1-\gamma)v$

ただし β は α と同じく1と0との間の数であり、$\gamma=\alpha\beta$ である。

NMは以上の公理系から ρ の変換函数 ϕ が一次函数であることを証明する。まず次の命題が証明せられる。

(A. A)　$u<v$, $\alpha<\beta$ が成り立つときは次の関係が成立する。

$$(1-\alpha)u+\alpha v<(1-\beta)u+\beta v$$

右の式は高い確率をもつ小さい効用と低い確率をもつ大きい効用との結合は、低い確率をもつ小さい効用と高い確率をもつ大きい効用との結合よりも小さいことを意味する。

(A. B)　u_0、v_0 を所与の効用とし、かつ $u_0<v_0$ とする。いま

$$w=(1-\alpha)u_0+\alpha v_0$$

と α とを対応させると、α が0から1まで単調に増加するに従って、w は u_0 から v_0 まで単調に増加する。すなわち α は w の u_0 から v_0 に至る値を0から1までの区域に写像したものであると考えられる。

(A. C) (A. B) の写像は0と1との間にある α の全てを u_0 と v_0 との間にある w の全てに写像する。

(A. B) と (A. C) の二つの命題により、u_0 と v_0 との間にある効用は v_0 の確率 α と一対一に対応せしめられることが可能となる。これは効用の数量的表現の第一歩ではあるが、その全てではない。第一にこの方法では u_0 と v_0 との間の効用が表現せられるだけで、これ以外の効用に対する表示法は与えられていない。またこの命題は効用の数量的表現 ρ に結びついていない。しかしこの ρ あるいは δ が満足すべき(4)の関係は、単調性の条件 (A. B) によって明らかに満たされる。また ρ と δ との結合が単調変換 ϕ の関係を満たすという(5)の関係は次の幾つかの補助定理を用いて証明することができる。

(A. D) $u_0<v_0$ であるとし、$u_0<w<v_0$ の全ての w に対して次のような条件を満足する数量函数 $f(w)$ を考える。

(i) $f(u_0)=0$　(ii) $f(v_0)=1$　(iii) $f(w)=\alpha$

(A. E) 函数 $f(w)$ は次の性質をもつ。

$0<\beta<1$ と $w\neq u_0, w\neq v_0$ の β および w に対し

(iv) $f\{(1-\beta)u_0+\beta w\}=\beta f(w)$

(v) $f\{(1-\beta)v_0+\beta w\}=1-\beta+\beta f(w)$

(A. D) (iv)または(v)の変換は(iii)の変換と同値である。いい換えれば(iv)または(v)の関係を満足する函数 f は、w を α に変換し、その逆も成り立つ。

(A. G) $u_0<v_0$ および $\alpha_0<\beta_0$ であるとき $u_0\leqq w\leqq v_0$ の全ての w について、$g(w)$ を $g(w)=(\beta_0-\alpha_0)f(w)+\alpha_0$

のように定義する。

（A. D）を用いれば

$$g(u_0)=\alpha_0,\ g(v_0)=\beta_0$$

が成り立つ。

（A. E）と（A. G）とから次の命題が証明せられる。

（A. H）函数 $g(w)$ は次の性質をもつ。

(i) それは単調である。

(ii) $0<\beta<1$ と $w\neq u_0$ に対して

$$g\{(1-\beta)u_0+\beta w\}=(1-\beta)\alpha_0+\beta g(w)$$

(iii) $0<\beta<1$ と $w\neq v_0$ に対して

$$g\{(1-\beta)v_0+\beta w\}=(1-\beta)\beta_0+\beta g(w)$$

（A. I）w を（A. G）によって変換することは、（A. H）によって変換することと同値である。いい換えれば（A. G）で示されたような $f(w)$ の一次変換は（A. H）の変換を可能ならしめる。

（A. J）（省略）

（A. K）u_0 と v_0 との間をその中間の値 w_0 によって二分するとき、u_0 と w_0 との間の w に対応する $g(w)$ は、u_0 と v_0 との間の w に対応する $g(w)$ の $g(u_0)$ から $\gamma_0=g(w_0)$ までの間と一致する。また w_0 と v_0 との間の w に対応する

$g(w)$ は、u_0とv_0との間のwに対応する $g(w)$ の γ_0から $g(v_0)$ までの間と一致する。換言すれば $g(w)$ の値は w の変域を制限しても変化しない。

(A. L) wの変域の両端を制限してu_1とv_1との間（ただし $u_0 \leqq u_1 < v_1 \leqq v_0$）としても$u_1$と$v_1$との間にある$w$に対する変換 $g(w)$ はu_0とv_0との間のwに対する変換 $g(w)$ の一部 $g(u_1)$ と $g(u_2)$ との間の数値と一致する。

(A. M) u_0とv_0との間にある任意の値$\overset{*}{u}$と$\overset{*}{v}$ $(u^* < v^*)$とに対し

$$g(\overset{*}{u})=0,\ g(\overset{*}{v})=1$$

となるようなただ一つの変換 $g(w)$ が存在する。換言すれば任意の二つの効用の一つを0、他方を1となるように変換式gを定めることができる。この変換式を $h(w)$ で表わす。

(A. N) 前記の変換式 $h(w)$ はu_0とv_0との幅を$\overset{*}{u}$と$\overset{*}{v}$との間を含む範囲で縮少しても変化がない。いい換えれば、$u_0 \leqq u_1 \leqq u^* < v^* \leqq v_1 \leqq v_0$ であるとき、u_0 v_0の代りにu_1 v_1を用いても同じ変換式が成立する。

(A. O) 任意の効用wに対して、wと$\overset{*}{u}$と$\overset{*}{v}$とがu_0とv_0との間にあるようにu_0、v_0を選ぶことができる。すなわちu_0とv_0とを適当に選ぶことによって、任意の幾つかの効用を比較し得るような $h(w)$ を確定することができる。この $h(w)$ が効用の尺度として使用せられる。

(A. R) $h(w)$ は次の性質を有する。

(i) $h(u^*)=0$

(ii) $h(v^*)=1$

(iii) $h(w)$ は単調である。

(iv) $0<r<1$ と $u<v$ に対して

$$h\{(1-r)u+rv\}=(1-r)h(u)+rh(v)$$

(A. R) によって $h(w)$ が効用 w の尺度として必要な性質は殆んど与えられている。しかしまだ充分ではない。何故ならば (A. R) の (iv) は (1. b) の関係と形式上似ているが、(1. b) は任意の u、v に対して成立するのに対し、(A. R) は $u<v$ に対してのみ成立するからである。NMは次にこの制限を取り除いて (A. R) が任意の u、v に対して成立することを証明する。また u^*、v^* を定めてこれらの点における尺度をそれぞれ0および1とするように効用尺度 $h(w)$ を定めたが、これも一般的でないので、一般に、次の性質をもつ写像函数 $V(w)$ を考える。

(A. V) (i) $V(w)$ は単調函数である。

(ii) $0<r<1$ の r および、任意の u、v に対して

$$V\{(1-r)u+rv\}=(1-r)V(u)+rV(v)$$

(A. W) 右の(i)および(ii)の性質をもつ函数 V は多数存在し得るが、その内任意の二つ $V(w)$ と $V'(w)$ との間には次の関係が成立する。

$$V'(w)=\omega_0 V(w)+\omega_1$$

ただし、ω_0、ω_1 は適当な定数で $\omega_0>0$ である。

右の結果により効用の可測性が証明されたことになる。何故ならば w は単なる順序数として考えられた効用である

が、$V(w)$ については、u^*とv^*とを固定しておけば（ただし $u^*<v^*$）

$$h_1(w)=\frac{V(w)-V(u^*)}{V(v^*)-V(u^*)}$$

の値は $V'(w)$ についても同一となることは容易に知られる。すなわち $h_1(w)$ は $V(v^*)-V(u^*)$を効用の単位とし、$V(u^*)$ を原点に取った場合の効用の尺度となる。もし単位と原点とを任意に定めることを許されるならば $V(w)$ が効用の尺度となるのである。

以上がＮＭの証明した効用の可測性の証明の大要である。証明の筋道を紹介するが目的であるから、証明の過程の大部分を省略し、記号や説明の方法を簡単にして、多少の正確性を犠牲にして分り易くしたことを了解されたい。

ＮＭの証明は数学的には正確であって疑問の余地がないことは、ジョージェスキューレーゲンも述べている通りである。[2] 従ってもしこの論議に問題があるとすれば、それは仮説すなわち公理系に存在するわけである。ＮＭの公理系に加えられた批判の中で、ジョージェスキューレーゲンの批判はむしろ超越的な批判であり、彼の新説も必らずしも学界の承認を得ているとも思われないことは既に指摘した。ここではいま一つの批判について次の節に検討することにする。

（1） Neumann and Morgenstern: Ibid. pp. 15～31. 証明については pp. 617～628.

（2） Georgescu-Roegen: Ibid, p. 505.

三　強独立性の仮定

ＮＭの効用測定理論には、ＮＭの掲げた公理系だけでなく、その外に暗黙の仮説があるというのがサムエルソンの主張であって、彼はこれを強独立性の仮定と呼んでいる。この説は最初彼が一九五二年の三月パリーの学会で発表したものであるが、[1]これをウォルトの紹介によって記せば次の通りである。[2]

いまお互に排反的な三つの賭金Ａ、Ｂ、Ｃがあり、ＡとＢとを比較して何れを選ぶかを考えるとき、ＡとＣとをある確率で結合したものと、ＢとＣとを同じ確率で結合したものとを比較して何れかを選ぶ順序と同じである。換言すれば同じＣをＡとＢとに確率結合しても選択の順序には変りない。

この公理の意味を明らかにするためにこれを記号化すれば

$$U(A) \geqq U(B)$$

とし、α、βを確率を表わす数とすれば

$$\alpha U(A)+\beta U(C) \geqq \alpha U(B)+\beta U(C)$$

この公理はＮＭの公理とどのような関係にあるか。ＮＭの理論においては、二つの事象の確率結合に対する効用は、各事象の効用の確率結合に等しいと見なされている。このことは例えば（1. b）の次の式において暗に仮定されている。

$$V\{\alpha u+(1-\alpha)v\}=\alpha V(u)+(1-\alpha)V(v)$$

この式の左辺は効用の結合に対する尺度を表わし、右辺は各効用尺度の結合を表わす。この関係は自明なようであって、実はこれが効用の尺度性を決定する鍵ともいうべき関係であるから、必らずしも自明とはいえない。しかし、もし強独立性の仮説を承認するならば、この仮説から右の関係を導き出すことができる。

いま強独立性の仮定を承認するならば、AとCとの効用の確率結合は各賭金の確率結合の効用を表わすことになる。何故ならばもし、そのことが成り立たないとすれば、Aの効用とCの効用の確率結合よりBの効用とCの効用の確率結合の方が大きいという場合が起り得、それはAの効用とCの効用、あるいはBの効用とCの効用が独立でないか、あるいは効用の確率結合と賭金の確率結合の効用が無関係であるか何れかである。ところでA、B、Cは排反であるから、その効用も独立である。したがって強独立性の仮定は効用の確率結合と賭金の確率結合の効用とが一致するという仮定、すなわち(1. b)の命題と結び付くのである。

サムエルソンがその強独立性の公理をNMの論証の基礎においた理由については、彼はエコーメトリカに発表した短い論文では充分に説明していないので明瞭ではないが、私は右のように解釈したのである。

この仮定に強という形容詞を冠したのは、単なる効用の加法性だけでなく、確率的結合についても加法性が成立すること、換言すれば効用に確率を掛けたものがお互に独立であるという意味においてであろうと思われる。サムエルソンはNMがこの仮定を暗黙に置いたことを指摘すると共にこの仮定は尤もらしい命題であるとして承認しているが、その仮定についてはサムエルソンの指摘に刺戟され、Wold や Manne がその非妥当性を主張し、これによって間接にNMの効用可測論に疑問を投げかけている。

ウォルトはこの強独立性の仮定がＮＭが問題としたような金銭価値のみに適用されるのであれば問題はないが、Ａ、Ｂ、Ｃが異なる消費財である場合には必らずしも成立しないことを指摘している。(2) いまたとえばＡがミルクの一定量、Ｂが葡萄酒の一定量、Ｃが他のミルクの一定量であるとする。そしてＡまたはＣの結合についてはミルクＡの確率が$\frac{1}{12}$、ミルクＣの確率が$\frac{11}{12}$であるとし、ＢまたはＣの結合についても同じ確率であるとする。いまミルクが必需品、葡萄酒が贅沢品である段階、たとえばＡとＢがそれぞれ１リットルであるような段階では $U(A)>U(B)$ である。しかし、Ｃがたとえばミルク５リットルであるような場合では、$\frac{1}{12}U(A)+\frac{11}{12}U(C)$ よりは $\frac{1}{12}U(B)+\frac{11}{12}U(C)$ の方が選好せられるであろう。もちろん選択が一回しか行われない場合には、ミルクの方が必要である場合には前者の方が選好せられるであろう。しかし選択が反復して行われる場合には後者の方が選ばれると考える方が自然である。このことは強独立性の仮定が、財の消費効用まで考慮するとき必らずしも成立しないことを意味するものである。

マンもまたガソリン混合の問題を例にとって強独立性の仮定に疑問を提出している。(3) オクタン価の異なるガソリンを混合したとき、その混合物のオクタン価は元のオクタン価の一次結合ではない。二つのガソリンをＡ、Ｂとしそのオクタン価を y_1、y_2 とすれば、混合ガソリン y は Eastman によれば次の式で表わされる。

$$y=x\cdot y_1+(1-x)y_2+c\sqrt{x}\,|y_2-y_1|$$

ただし x はＡの混合率、$1-x$ はＢの混合率である。また c は感応度 (sensitivity factor) といって、ガソリンの種類によって異なる値である。いまオクタン価を効用に置き換えると、y_1, y_2, y はＮＭの公理(A)(B)(C)を全部満足する。

しかしその場合強独立性の命題は成立しない。何故ならばいま混合物のオクタン価を $r(A, B; \alpha)$ で表わし、α をAの混合率とすれば、AとBのオクタン価が等しいことは

$$r(A; 1)=r(B; 1)$$

で表わされる。いまオクタン価の異なる他のガソリンをCとし、AまたはBをCと α の混合率で混合したとすれば、強独立性の仮定によれば、

$$r(A, C; \alpha)=r(B, C; \alpha)$$

が全てのC、α について成立しなければならない。しかしAとCを混合する場合と、BとCとを混合する場合とでは感応度 c が異なり得るから、一般にその場合強独立性の仮定が成立することは限らない。従って強独立性の仮定はノイマンの公理系に含まれない、新らしい仮定であることが分る。NMおよびその追随者の大部分にとってこの仮定は自明のように思われたが、サムエルソンはこの仮定の存在することを指摘すると同時に、その仮定を支持しようと努めたのである。彼はそれを次のように説明している。

いま x の確率で与えられる賭金X［$(X; x)$］が y の確率で与えられる賭金Y［$(Y; y)$］よりも有利であるか、あるいは少なくともこれと等価であるとする。ここに二本のくじがあり、その何れも確率 $1-\alpha$ で同じくじ $(Z; z)$ を与えるものとする。もし第1回にこの二本のくじを引いて両方とも $(Z; z)$ が出たならば、両者の何れを選択するということは起り得ない。しかし第一のくじは α の確率で $(X; x)$ を与え、第二のくじが確率 α で $(Y; y)$ を与えるときは、$(Z; z)$ が引かれると否とに関係なく第一のくじは第二のくじよりも有利であるか、あるいは少なくともこ

れと等価である。

マンはこのサムエルソンの説明に対して、このようなくじを反復して引く場合には $1-\alpha$ の確率でZを引くということがXあるいはYの選好に影響を与えることを無視し得ないことを指摘し、ガソリンの混合について述べた問題は一般の選好についても妥当すると主張している。

サムエルソンはこのウォルトとマンの批判に対して次のように述べている。ウォルトの指摘したミルクと葡萄酒の間の独立性の欠除は、数年間に渉るような長い期間の消費の割合を決定するような場合に存在するのであって、それは確率的な場合に存在する独立性とは無関係である。非確率的なミルクと葡萄酒の結合は独立的ではないが、このような結合の幾つかの間を確率的に選択する場合、その関係は独立的であると考えてよい。

強独立性の妥当性についてのサムエルソンの説明は、ウォルトやマンの提出した疑問に充分答えたものであるか否かは問題である。確率結合をウォルトらのように反復選択に適用することの方が、常識的であり、この場合は当然結合の内容によっては非独立的な場合が起り得る。NMの論証においても、u、v は順序数として現定せられた効用であって、その事象の内容については特別の限定は与えられていないから、u と v とがそれぞれミルクと葡萄酒であることもあり得る。従って反復される選択については当然ウォルトが指摘したような問題が起り得るわけである。ただ一回だけの選択であれば u と v とは同時には起り得ないから、u と v とは独立であると考えてよいが、その場合には効用の期待値 $\alpha u+(1-\alpha)v$ が何を意味するかということが問題となり得る。サムエルソンもこのことが問題となり得ることに言及している。[4] もしこの期待値に具体的な意味を付与し得ないとすれば、強独立性の仮定に基く理論は単

なる形式的論理になってしまうが、それでもこの理論は現実の経験に対する可なりよい接近にはなると、幾分苦しい弁護をしている。

要するに強独立性の仮定の存在を明らかにしたことはサムエルソンの功績であるが、これがＮＭの理論の積極的基礎付けとした役立ち得るか否かについてはなお問題が残されていると思われる。

（1） Samuelson: Utility, preference, and probability. Heteographed abstract of paper given before the conference on *Les Fondements et Applications de la Théorie du Risque en Econometrie*, March, 15. 1952. ただしこの原文は見ることができなかったので、本論文では次に掲げるウルトおよびサムエルソン自身の紹介を資料として用いた。

——:Probability, utility, and the independence axiom. Econometrica, vol. 20, No. 4, Oct. 1452.

（2） H. Wold: Ordinal preferences or cardinal utility? Econometrica, vol. 20, No. 4, Oct. 1952.

（3） A. Mann: The strong independence assumption——gasoline blends and probability mixtures. Econometrica, vol. 20, No. 4, Oct. 1952.

（4） Samuelson: Ibid, p. 677.

四　線型性の仮定

サムエルソンの指摘した強独立性の仮定は効用の期待値が選択の基準となるという命題に外ならない。それに対する批判は、効用の発生する確率が統計的確率である場合に、効用の連関関係（財の補完、代替の関係）が加法性を撹乱する場合があるということであった。しかし選択すべき二つの財が単なる貨幣量であるような場合には、この二財

は完全な代替財ではあるが、反復選択の場合においてウォルトが指摘したような独立性の攪乱は現われない。たとえば1/10の確率で十万円の賭金が得られるくじと9/10の確率で一万円の賭金を得られるくじの2本から1本のくじを反復して引けば、平均の利得は

$$10\text{万円}\times\frac{1}{10}+1\text{万円}\times\frac{9}{10}=19{,}000\text{円}$$

であり、このくじを引くことは19,000円を獲得することと同じになる。しかしもし貨幣について効用逓減の法則が成立するとすれば、

$$\frac{1}{10}u(\mathrm{A})+\frac{9}{10}u(\mathrm{B})=u\left(\frac{1}{10}\mathrm{A}+\frac{9}{10}\mathrm{B}\right)$$

は必らずしも成立しない。ここにAは10万円、Bは1万円を表わす。たとえば仮りに $u(\mathrm{A})=\sqrt{\mathrm{A}}$ と仮定すれば、右の式の左辺は

$$\frac{1}{10}\times\sqrt{100{,}000}+\frac{1}{10}\times\sqrt{10{,}000}=121.6$$

であり、右辺は137.8である。しかしもし効用が一次函数であり

$$u=a\mathrm{A}+b,\quad u=a\mathrm{B}+b$$

で表わされるとすれば、右の式の両辺は一致する。

NMの効用の可測性の論証の鍵は彼の公理（1. b）にあるが、これを強独立性の仮定によって基礎づけるということ

とは、独立性という表現に伴う疑義が生ずることは度々言及したことである。殊に選択すべき二つの財が同一財である場合には独立性そのものが成立し得ないから、これを独立性の仮定と呼ぶことは形容矛盾ともいうべきである。

私はこの疑義の多い強独立性の仮定よりもむしろ、NMの明示されない公理（1. b）を一つの公理と認め、それを線型性の公理と名づけることを提案したい。これを線型性の公理と名付けるのは、この公理は順序数としての効用函数uが線型変換が可能であることを規定するからである。そしてこの公理が成立する直観的な基礎づけは効用の確率結合に何等かの実質的な意味があり、その実質的内容は形式的な変換によって影響を受けないという認識にある。問題はこの形式的な関係から、効用の尺度性という実質的な関係が出てくるという根拠がどこにあるかという点であり、この根拠となるべき実質的内容がこの線型性の仮定の中に隠されているというのが私の主張である。

強独立性の仮定によれば、結合事象の選択の基準はこの事象の効用の期待値とならねばならぬ。しかし反復される選択においては選択の基準はこの結合事象の効用でなければならぬが、この結合事象の効用は各事象の効用の期待値と、特殊の例外を除いては一致しないことは前に例示した通りである。線型性の仮定はこのような矛盾を避けて一般的に妥当する。それはより一般的な仮説である。それは反復される選択についても一回限りの選択についても妥当する。それにしても、それは効用の期待値が選択の基準であることを前提とする。そして一回限りの選択においては効用の確率的な結合が基準となり、反復される選択については、結合事象の効用が選択の基準となる。何れの場合についても、線型性の仮定が成立すると考えられる。

線型性の仮定は効用の変換函数を制限する。パレートが規定した[1]、順序数としての効用の変換函数 $F(u)$ に関する

一般的規定は単調変換すなわち $F'(u)>0$ という性質だけであった。いまたとえば $F(u)=u^2$ と仮定してこのような変換が（1. b）を成立せしめるか否かを吟味すると

$$V\{\alpha u+(1-\alpha)v\}=\{\alpha u+(1-\alpha)v\}^2=\alpha^2u^2+2\alpha(1-\alpha)v+(1-\alpha)v^2$$

$$\alpha V(u)+(1-\alpha)V(v)=\alpha u^2+(1-\alpha)v^2$$

すなわち（1. b）はこの変換に対しては成立しない。一見自明のように見えるこの命題は効用の変換を特殊の型に限定するものであり、この型が一次変換であるという定理をＮＭが証明したのであるが、その証明がＮＭの公理系だけでは不可能であることは、サムエルソンによって指摘された通りである。

反復されない選択においては、効用の期待値と結合事象の効用との間にギャップが生じ得ることは前述の通りである。このギャップが正であるか負であるかによって賭に対する選好と保険に対する選好とが生ずる。そこで賭や保険に対する選好の行動から、効用函数の形を推定しようとする試が、Friedman, Savage, Mosteller, Nogee, Strotz, Halter, Archbald 等によって研究せられており、その中心をなすものは Friedman & Savage の研究である。(2) これらの研究はＮＭの効用可測性の証明を前提としているものであるから、ＮＭの効用理論の発展ともいうべきものである。なお我国では愛知大学の村上雅子講師がこの線に沿って注目すべき研究を推進していられることを付言しておきたい。(3)

これらの研究については稿を改めて、検討したいと思う。(4)

（1） V. Pareto: Manuel d'économie politique. 2 éme éd. 1927. p. 542.

(2) M. Friedman & L. Savage: The utility analysis of choices involung risk. Jour. of Pol. Ec. Aug. 1948.
——: Expected-utility hypothesis and the measurability of utility. Jour. of Pol. Ec. Dec. 1952.
F. Mostelles & P. Nogee: An experimental measurement of utility. Jour. of Pol. Ec. Oct. 1951.
H. Markowitz: The utility of wealth. Jour. of Pol. Ec. April. 1952.
H. Strotz: Cardinal utility. Am. Ec. Review, Papers & Proceeding, 1953.
W. Edwards: Experiments on economic decision-making in gambling situations. Econometrica Oct., 1953
A. Halter: Utility of wealth among farm managers. Econometrica, Oct. 1958.
G. Archbald: Utility, risk and linearity. Jour. of Pol. Ec., Oct., 1959.

(3) 村上雅子、効用の測定理論について、愛知大学法経論集、三一号、昭和三五年六月、同、効用函数の形に関する一分析、愛知大学法経論集、三三号、昭和三六年一月。

(4) 筆者は次の論文についてこの問題について簡単に触れた。
効用概念の再吟味、一橋論叢、昭和三四年八月。
A reconsideration on the concept of utility. Annals of the Hitotsubashi Academy, vol. x, no. 2. 1959.